

Een bekend onderwerp uit de natuurkunde is de werking van spiegels. Voor een leerling uit 2 MAVO is het maken van de constructietekeningen een hele kluit. **Frans Moerlands** probeert met zijn dochter uit of een aanpak met vouwen soms verhelderend werkt.

## Bespiegelingen op papier

Normaal komt ze niet makkelijk met haar huiswerk naar me toe, maar dit keer is de verwarring te groot. Mijn dochter Renée zit in de tweede klas van het MAVO. Ze vreest dat er van de schriftelijke overhoring natuurkunde niet veel terecht gaat komen.

In de natuurkundelessen ging het de afgelopen tijd over spiegelen. In haar schrift staan complexe tekeningen die de werking van spiegels moeten verklaren. Ik herinner me zoiets van mijn eigen middelbare schoolperiode.

Renée vertelt wat haar dwars zit. Het probleem komt erop neer dat ze weet hoe spiegels werken en dat ze in staat is om die mooie lijnconstructies te maken, maar dat ze niet snapt wat die twee zaken met elkaar te maken hebben!

Enig doorvragen leert dat ze ooit één practicum heeft gehad waarbij de leraar (!) een en ander met spiegeltjes heeft gedaan, maar verder zijn er in de lessen vooral veel constructietekeningen gemaakt.

Ik bekijk een paar tekeningen in haar schrift (zie figuur 1) en probeer de constructies te doorgronden. Al snel wordt me duidelijk dat ik haar dit niet één twee drie krijg uitgelegd. Het wiskundig gereedschap dat hier is ingezet om het spiegelverschijnsel te doorgronden, is van een onevenredig hoog niveau.

Eerlijk gezegd begrijp ik niet waarom je leerlingen van deze leeftijd daar op zo'n formeel niveau mee lastig moet vallen. De stap van het spelenderwijs verkennen op de basisschool naar wat er in de natuurkundeles gebeurt, is voor wat betreft het spiegelen wel erg groot.

Maar goed, met die constatering is het probleem van Renée niet opgelost; ze heeft een schriftelijke overhoring in het vooruitzicht!

We gaan toch maar aan de slag. Even terug naar het begin, spelen met een spiegeltje. Gelukkig heeft pa een tijdje terug een laserpen gekocht en daar kun je leuke dingen mee doen. We leggen een spiegeltje op de grond en proberen om beurten te voorspellen waar de rode stip op het plafond komt als we met de laser op het spiegeltje richten. Dat gaat prachtig en Renée blijkt na enige aarzeling wonderwel in staat het eindpunt van de straal te lokaliseren. We stellen samen vast dat het inderdaad alles te maken heeft met de hoek waaronder de straal op het spiegeltje

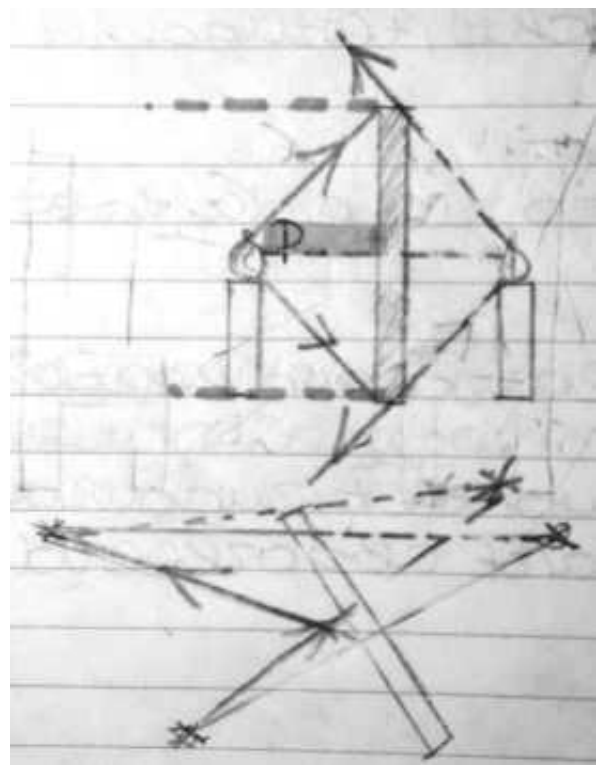


fig. 1

komt: de lichtstraal komt er net zo schuin uit als hij erin komt; 'de hoek van inval is de hoek van uitval', dat had ze al eens eerder gehoord!

We maken er een tekening van op papier. Het principe van de constructie is haar nu duidelijk, maar als ik haar vervolgens wat opgaven voorleg die afwijken van de mooie voorbeelden, dan blijkt dat het uitzetten van hoeken bepaald nog geen gesneden koek is. Met opvallend gemak tekent ze hoeken van 18 of van 108 graden waar het gaat om een hoek van 72 graden. Het is maar net hoe ze de geodriehoek heeft liggen.

Gelukkig wordt deze basisvaardigheid na enig oefenen weer aardig beheerst.

Dat is nodig, want er staat nog meer op het programma. Het gaat immers niet alleen om enkelvoudige lichtstralen.

In het boek volgen opdrachten met lampen, uiteenlopende voorwerpen en waarnemende ogen. Bovendien moeten er ook nog eens spiegelbeelden worden geconstrueerd.

Er gaat steeds meer door elkaar spoken: enkelvoudige en meervoudige lichtstralen, kijklijnen, constructielijnen. De spreekwoordelijke bomen voor het bos.

We besluiten om toch eerst de werking van een echte spiegel verder te bestuderen. Wat opvalt is bijvoorbeeld dat het spiegelbeeld even ver 'achter' de spiegel ligt als het voorwerp zelf 'voor' de spiegel. Triviaal, maar belangrijk om vast te stellen. Het verklaart dat je bij het construeren van een spiegelbeeld iets met gelijke afstanden moet doen. De constructie van de loodlijn in figuur 2 wordt ineens een stuk duidelijker.

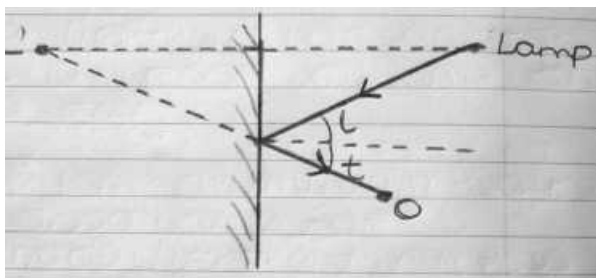


fig. 2

Verder stellen we ook nog eens vast dat je een voorwerp in de spiegel in 'spiegelbeeld' ziet. Het heeft iets te maken met omklappen en stempelen. Kijkend naar een constructietekening van zo'n situatie, bedenk ik dat deze spiegelverschijnselen dan wellicht ook aardig te illustreren zouden zijn door een voorwerp, bijvoorbeeld een kaars, op een papiertje te tekenen en dit vervolgens om te vouwen met de spiegel als vouwlijn (zie figuur 3).

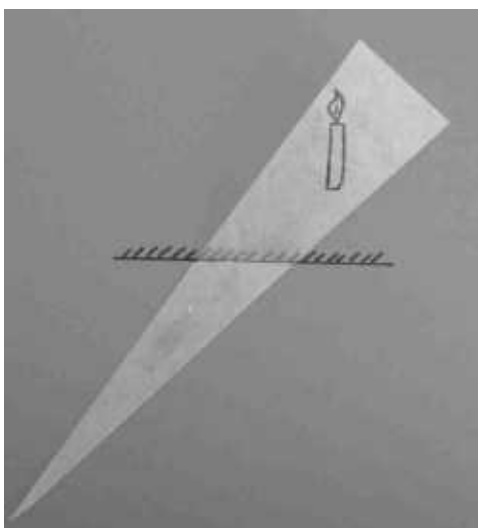


fig. 3

Een stukje overtrekpapier is snel gevonden. We tekenen er een kaarsje op en vouwen de strook volgens een denk-

beeldige spiegel om (zie figuur 4). En inderdaad, bij controle met een echte spiegel blijkt ons papiertje precies te doen wat de spiegel doet.

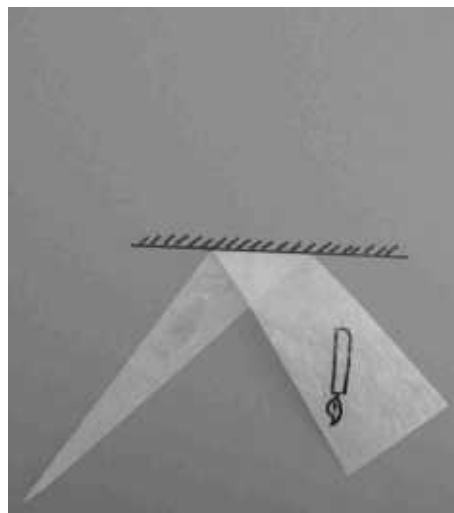


fig. 4

Daarmee doe ik onbewust een ontdekking die me even later een waarachtig Eureka doet uitroepen. Want niet alleen blijkt op deze manier de spiegelomkering mooi te verklaren, met vouwen lijken überhaupt alle spiegelverschijnselen te verklaren.

Om te beginnen, proberen we dit uit met de 'laserstraal'. We snijden wat repen rood papier en jawel hoor, onder wat voor hoek we de strook ook vouwen, de vouwlijn heeft op de straal hetzelfde effect als de spiegel: de straal wordt er keurig door weerkaatst en de hoek van inval is exact gelijk aan de hoek van uitval. (De bewijsvoering daarvan lijkt me een aardig onderwerp voor de wiskundelers.)

We hebben onze ontdekking vervolgens ook uitgetest met een uitwaaiende lichtbron zoals een zaklamp. We namen daarvoor een wigvormige strook geel papier. Ook daar bleek het keurig te kloppen.

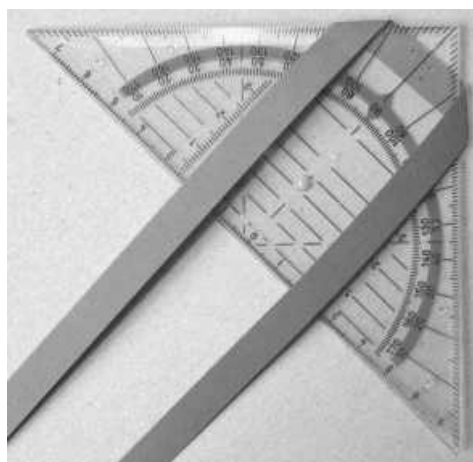


fig. 5

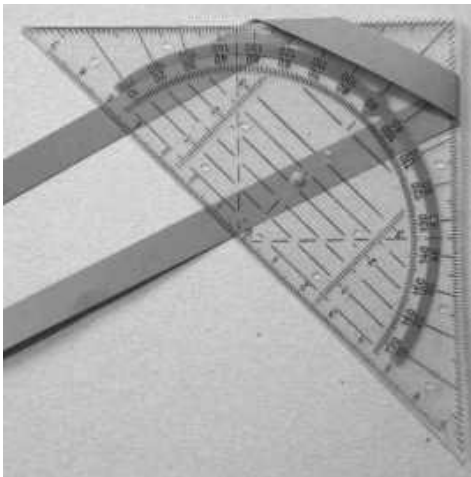


fig. 6

En sterker nog, zelfs het werken met meerdere spiegels blijkt geen probleem. Bijvoorbeeld bij opgaven met een reflector waar het licht via twee haaks op elkaar staande spiegels wordt weerkaatst. Omdat de hoek tussen de spiegels in een reflector 90 graden is, kunnen we hierbij handig gebruik maken van de geodriehoek. In figuur 5 en 6 staan wat voorbeelden die eenvoudigweg zijn verkregen door een 'laser-reep' om de haakse hoek van de Aristo te vouwen.



fig. 7

In figuur 7 is hetzelfde gedaan met een wigvormige lichtstraal die in een latere opdracht aan de orde werd gesteld. Een bijna ondoenlijke opgave, waarvan zelfs het natekenen voor deze leerlingen al te moeilijk blijkt (figuur 8; constructietekening overgenomen in het schrift). Het vouwwerk maakt het een stuk toegankelijker en zorgt dat de essentie in beeld komt.

Bij Renée lijken inmiddels heel wat kwartjes gevallen. Door te denken aan het vouwen, lukt het haar nu om de spiegellijnen met potlood en Aristo in haar schrift te construeren. Hoe de spiegels ook staan en hoeveel het er ook mogen zijn.

fig. 8

Voor haar is dat voorlopig voldoende. Ze begrijpt wat de bedoeling is en ze heeft iets voorstelbaars waar ze op terug kan vallen als het moeilijk wordt.

Zelf ben ik nog wat verdergegaan. Immers, als dit vouwprincipe werkt voor vlakke spiegels, dan zou het ook moeten werken voor holle en bolle spiegels. Dat is nog veel lastiger constructiewerk.

fig. 9

Ik sneed een brede strook papier tot een paar centimeter uit de kant in dunne reepjes (figuur 9). Vervolgens ritste ik met een brievenopener langs de rand van een schoteltje de cirkelvorm van een holle, respectievelijk een bolle spiegel. Mijn voldoening was groot. U ziet het resultaat

op de foto's (figuur 10 en 11). Het omvouwen van de stroken levert prachtige, convergerende en divergerende lichtstralen op.

fig. 10

fig. 11

Voor mij is dit het begin geweest van hernieuwd onderzoek van allerlei spiegelphenomenen. Met wat voor spiegel krijg je alle stralen door één (brand)punt?  
Hoe komt het dat je oog altijd in het midden zit als je in een kerstbal kijkt?  
Hoe zit het met die dode hoek in de achteruitkijkspiegels van een auto?  
Wat doen spiegels met afstanden? Op welke afstand zie je voorwerpen nu eigenlijk in de spiegel?  
Bij het bestuderen van deze boeiende verschijnselen gebruik ik geen stroken papier meer, maar het denken daaraan helpt me wel. Het vouwen heeft geleidelijk plaats gemaakt voor het construeren op de computer. Wiskundige

tekenprogramma's, zoals bijvoorbeeld Cabri, bieden wat dat betreft grote mogelijkheden.

Begrepen essenties laten zich goed vertalen naar abstracte wiskunde!

## Conclusies

In de spiegelmeetkunde blijken natuurkunde en wiskunde onlosmakelijk met elkaar verbonden. Helaas lijkt de onderlinge afstemming niet altijd even gelukkig. Voor mijn gevoel wordt er onnodig veel en onnodig snel geformaliseerd. Zeker voor het MAVO.

Ik zou het liever omdraaien. In plaats van te pogen het natuurkundige principe te verklaren met wiskundige constructies, zou ik proberen de wiskunde voort te laten komen uit de natuurkundige verkenning. De wiskunde zelf verklaart immers de spiegeleffecten niet. De wiskunde kan ze hooguit beschrijven en via bewerkelijke constructies voorspellen. Vaak zijn die constructies echter zo lastig, dat ze de natuurkundige verkenning in de weg staan. Ik ben ervan overtuigd dat spiegelverschijnselen op een veel hoger niveau bestudeerd zouden kunnen worden als ze niet met formele wiskunde, maar met dit soort knip- en vouwwerk onderbouwd zouden worden.

Nu verklaart ook het vouwwerk de spiegelwerking niet, maar het maakt het licht en de spiegeleffecten wel concreet en bestudeerbaar. Het vormt als tussenmodel een concrete oriënteringsbasis, die voor veel leerlingen broodnodig is.

En is de modelfunctie eenmaal geaccepteerd, dan kan het vouwwerk op zijn beurt de wiskunde binnenhalen. In de stroken kun je hoeken en afstanden meten en tekenen. Het spiegeleffect is letterlijk 'beschrijfbaar' geworden.

Als vervolgens nieuwe spiegelsituaties onderzocht worden en daarbij geen vouwpapier voorhanden is, of als situaties in het schrift moeten worden uitgetekend, dan zouden basale wiskundige gereedschappen verder ontwikkeld kunnen worden. Gebaseerd op vragen als: Hoe kun je zorgen dat hoeken even groot worden? Hoe deel je een hoek in gelijke delen? Hoe construeer je haakse lijnen? Hoe krijg je je punten op gelijke afstand? Enzovoorts.

Een wiskunde die daar antwoorden op geeft, kan efficiënt, maar bovenal geaccepteerd en begrepen gereedschap worden.

Zo werkt het bij mij en zo blijkt het ook bij mijn dochter te werken. En als het hier niet om een genetisch bepaalde afwijking gaat, dan zou het wel eens voor meer mensen kunnen gelden.

*Frans Moerlands, Freudenthal Instituut, Utrecht*