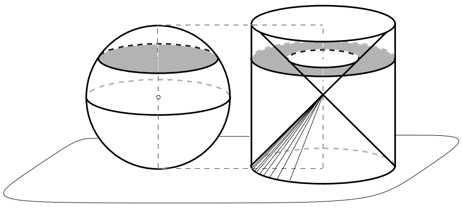
Wat te bewijzen is

Rubriek

De inhoud van een bol

De vorige aflevering van deze rubriek eindigde met een 'filmbewijs' voor de stelling dat de inhoud van een viervlak eenderde deel is van een prisma met zelfde grondvlak en hoogte. Naar aanleiding daarvan zond Hessel Pot mij een aantal knipsels met teksten en plaatjes over wat hij 'zuilvormen' en 'tuitvormen' noemt. Een van zijn plaatjes heeft de naam 'verdubbelingsbewijs' en blijkt nagenoeg op hetzelfde neer te komen als de door mij gekozen bewijsvariant. Zijn andere bewijzen berusten op het principe van Cavalieri. Dat vertelt bijvoorbeeld dat twee zuilvormen met hetzelfde grondvlak en dezelfde hoogte hetzelfde volume hebben, omdat zij op elke hoogte dezelfde doorsnee-oppervlakte bezitten.
Een bekend fraaie toepassing van dit principe is de afleiding van de inhoudsformule van een bol.



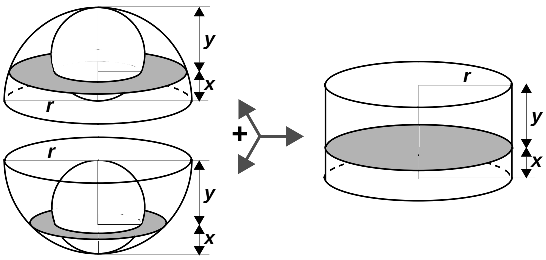
Vergelijk de bol B (straal r) met het ruimtedeel $C \setminus D$ dat zich binnen de cilinder (straal r, hoogte $2r$), maar buiten de 'diabolo' bevindt. De inhoud van $C \setminus D$ is $\frac{2}{3}$ $(= 1 - \frac{1}{3})$ van de inhoud van de cilinder.
Op de hoogten $r + x$ en $r - x$ $(0 \le x \le r)$ zijn de doorsnee-oppervlakten van zowel B als $C \setminus D$ gelijk aan

$$\pi(r^2 - x^2)$$

Volgens Cavalieri hebben B en $C \setminus D$ dus dezelfde inhoud, met als gevolg:

inhoud $B = \frac{2}{3} \times 2r \times \pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3$

Hessel zond mij nog een fraai alternatief bewijs, waarbij de regel voor de schaalvergroting (!) wordt gebruikt.



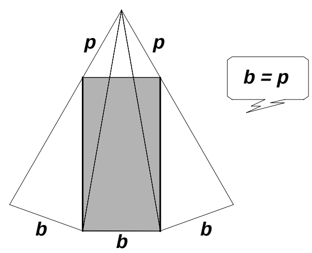
In een halve bol (straal r) met equatorvlak past precies een bol waarvan de straal de helft van r is. De inhoud van het ruimtedeel $H \setminus B^*$ dat door de halve bol H en de kleine bol B^* wordt begrensd, is dan $\frac{3}{8}$ $(= \frac{1}{2} - \frac{1}{8})$ van de inhoud van B. Anderzijds is tweemaal de inhoud van $H \setminus B^*$ gelijk aan de inhoud van de cilinder met straal r en hoogte r. De laatste uitspraak vergt een beetje algebra. Let op de doorsnee op hoogte x. In het geval dat de halve bol met het equatorvlak op de grond staat, gaat het om de ring begrensd door de cirkels waarvan het kwadraat van de straal respectievelijk $r^2 - x^2$ en xy is, zodat de ringoppervlakte gelijk is aan

$$\pi(r^2 - x^2) - \pi xy = \pi r(r - x)$$

Zet je het lichaam op zijn kop, dan verwisselen x en y van rol en heeft de ring op hoogte x de oppervlakte $\pi r(r - y)$. Die beide oppervlakten zijn samen precies πr^2 en dat is de doorsnee-oppervlakte van de cilinder.
Kortom: $2 \times \frac{3}{8}$ inhoud $B = r \times \pi r^2$.
Dit leidt direct tot de bekende inhoudsformule.

Het probleem van Langley

Het bewijzen in de vlakke meetkunde is heel actueel geworden met de invoering van het domein 'voortgezette meetkunde' (B2 VWO). Sieb Kemme en Wim Groen gaven in het vorige nummer van de *Nieuwe Wiskrant* een mooie en leerzame procesbeschrijving van hun oplossing van het probleem van Langley. Ik kon het niet nalaten naar nog andere bewijzen te zoeken (er zijn talloze mogelijkheden!) en vond na enig nadenken een heel inzichtelijke. Van de gelijkbenige driehoek met tophoek 20° heb ik twee kopieën gemaakt en de drie in een waaier gerangschikt.



In de eindpunten van de middelste basis zijn de loodlijnen op die basis getekend, tot zij een opstaande zijde van een buitendriehoek ontmoeten. Die twee lijnen maken een hoek van 10° (= 90°– 80°) met de andere opstaande zijden. Voltooiing van de rechthoek levert aan de top een symmetrische driehoek met een hoek van 60° (= 3 × 20°) en daaruit volgt direct dat de basis b gelijk is aan het met p aangeduide stuk van de opstaande zijde.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl