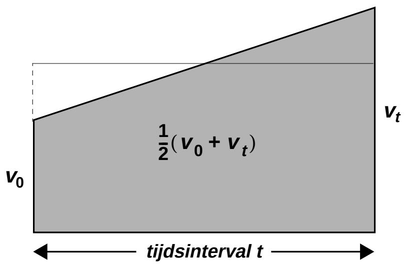
Wat te bewijzen is

Rubriek

In boeken over de geschiedenis van de wiskunde kun je lezen dat de eerste grafiek bij een functie rond het jaar 1350 is gemaakt en wel door de Franse scholasticus Nicole Oresme. Het was een snelheid,tijd diagram. In die dagen waren de begrippen ‘snelheid’ en ‘snelheidsverandering’ onderwerp van filosofische en wiskundige studie. Voor een eenparig versnelde beweging gedurende een tijdspanne van t seconden met begin- en eindsnelheid v_0 en v_t had men een mooie regel ontdekt, die destijds verbaal werd uitgedrukt, maar die wij nu liever lezen als:

$$s(t) = \tfrac{1}{2} \cdot t \cdot (v_0 + v_t)$$

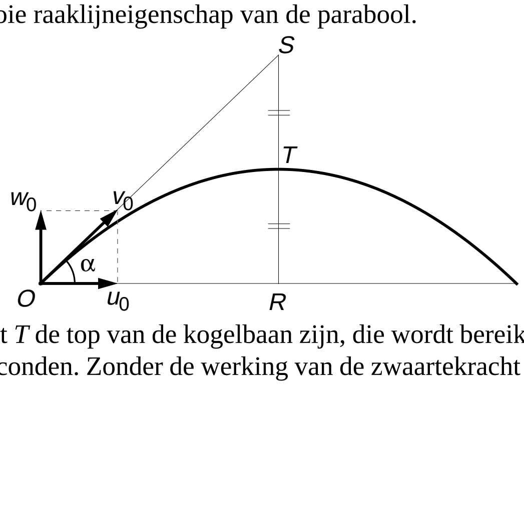
Hierin is s(t) de afgelegde weg.
Oresme verklaarde deze regel meetkundig met behulp van zijn snelheid,tijd diagram. Hij begreep (hoe, dat is niet zo duidelijk) dat de oppervlakte onder de snelheidsgrafiek (hier een trapezium) de afgelegde weg voorstelt.



Deze ‘regel van Oresme’, die eleganter is dan de thans gangbare formule: $s(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, speelt een cruciale rol in het vervolg van dit verhaal.

Kogelbaan

Zo’n 200 jaar later werd (onder andere door Galileï) de theorie van de kogelbaan ontwikkeld. Uit de valwet volgt tamelijk eenvoudig dat de onder een scherpe hoek α afgevuurde kanonskogel een parabolische baan aflegt.
In combinatie met de regel van Oresme leidt dit tot een mooie raaklijneigenschap van de parabool.



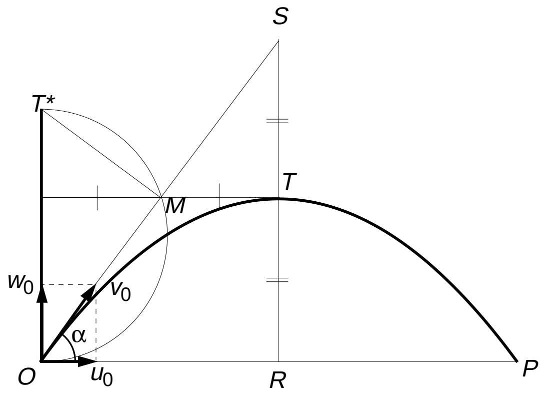
Laat T de top van de kogelbaan zijn, die wordt bereikt na t seconden. Zonder de werking van de zwaartekracht zou de onder de hoek α met dezelfde beginsnelheid v_0 afgeschoten kogel een rechtlijnige baan volgen. Let nu op de verticale snelheidscomponent w_t. Voor de paraboolbeweging geldt $w_t = 0$, en dus volgens Oresme:

$$|TR| = s(t) = \tfrac{1}{2} \cdot t \cdot (w_0 + 0) = \tfrac{1}{2} \cdot t \cdot w_0$$

Voor de beweging zonder verticale vertraging is de verticale component constant en in S (recht boven T) dus nog steeds w_0, dus: $|SR| = t \cdot w_0$.
Gevolg: $|TR| = \frac{1}{2} \cdot |SR|$.
Anderzijds is het duidelijk dat de lijn OS de raaklijn in O aan de parabool moet zijn en zo weten we dus iets van het snijpunt van een raaklijn met de symmetrie-as!

Vuurbereik

Het ligt voor de hand om het verband te bestuderen tussen het ‘vuurbereik’ en de hoek α. Dat je bij een zeer scherpe hoek en een hoek die bijna recht is niet ver komt, is intuïtief duidelijk. Een goede gok is dat met een hoek halverwege 0° en 90°de maximale afstand wordt overbrugd. De geijkte bewijsvoering is: stel de bewegingsvergelijkingen (x_t = ... , y_t = ...), los dan de vergelijking $y_t = 0$ op en bereken de bijbehorende waarde van x_t.
Resultaat: reikwijdte = $c \sin\alpha \cos\alpha$ met $c = v_0^2 / 2g$.
Via de formule $2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha$ wordt duidelijk dat de optimale hoek inderdaad 45° is. Ook kan hieruit worden begrepen dat voor twee complementaire hoeken α_1 en α_2, de reikwijdten gelijk zijn.
In *Learn from the Masters* (een uitgave van the Mathematical Association of America) schrijft Frank J. Swetz over de kogelbaan in historisch perspectief. Het artikel in goed leesbaar Engels zou wat mij betreft zo aan VWO B2-leerlingen kunnen worden gegeven, met de opdracht er, in het kader van het profielwerkstuk, een mondelinge presentatie over te houden. Met als zakelijke opbrengst een bijdrage aan de examendossiers Natuurkunde, Wiskunde en Engels! Swetz laat zien hoe Torricelli het probleem van de maximale reikwijdte meetkundig aanpakte. Ik parafraseer nu dit bewijs en reduceer daarbij het rekenwerk nog wat meer. Het briljante idee van Toricelli was om ook te kijken naar de ‘kogelbaan’ OT^*O bij α = 90°. Laat M het midden van OS zijn en verbind M met de beide toppen T en T^* (figuur op de volgende pagina).
En nu komt het: de driehoeken OT^*M en SOR zullen blijken gelijkvormig te zijn, met als gevolg: $\angle T^*MO = 90°$. Volgens de stelling van Thales ligt M dan op een halve cirkel die OT^* als middellijn heeft! Merk op dat de diameter van die cirkel uitsluitend afhangt van de grootte van v_0. Bij variatie van de hoek α en handhaving van de



beginsnelheid zal M die cirkel doorlopen.
Omdat MT middenparallel is in driehoek ORS, geldt

$$|OP| = 4|MT|$$

Dus $|OP|$ is maximaal als $|MT|$ maximaal is.
Dat laatste is evident het geval als M het midden is van de halve cirkelboog, dus als $\alpha = 45°$.

Ontbreekt nog het bewijs van de gelijkvormigheid van de driehoeken OT^*M en SOR.
Om te beginnen geldt: $\angle MOT^* = \angle RSO = 90° - \alpha$.
Nu moet er nog een evenredigheid van zijden worden gevonden en daarbij zullen tijd, snelheid en afgelegde weg in rekening moeten worden gebracht.
Stel t^* *is* de tijd die nodig is om van O naar T^* (met beginsnelheid v_0) te komen en stel t is de tijd nodig voor de reis van O naar T (via de parabool).
De snelheden op de hoogste punten T^* en T zijn nul:

$$v_0 - gt^* = 0 = w_0 - gt$$

en dus:

$$\frac{v_0}{w_0} = \frac{t^*}{t}$$

Vergelijk nu de zijden OM en OT^*:

$$|OM| = \tfrac{1}{2}|OS| = \tfrac{1}{2}v_0 t \quad \text{en} \quad |OT^*| = \tfrac{1}{2}v_0 t^* ,$$
dus:

$$\frac{|OT^*|}{|OM|} = \frac{t^*}{t}$$

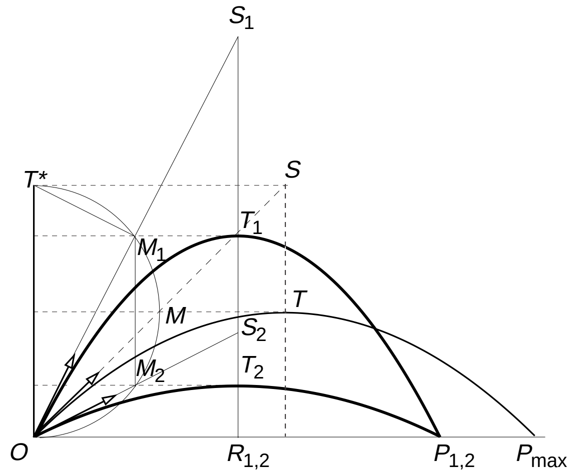
Voor de zijden OS en RS geldt natuurlijk:

$$\frac{|OS|}{|RS|} = \frac{v_0}{w_0}$$

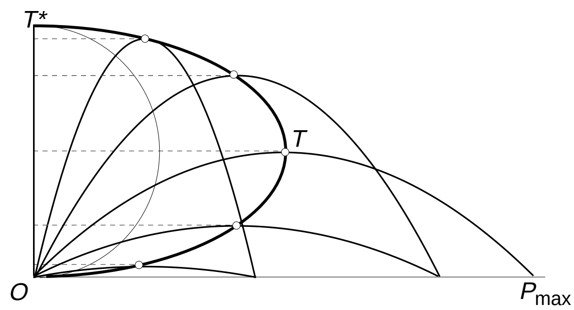
Alles combinerend leidt dit tot het gewenste:

$$\frac{|OT^*|}{|OM|} = \frac{|OS|}{|RS|}$$

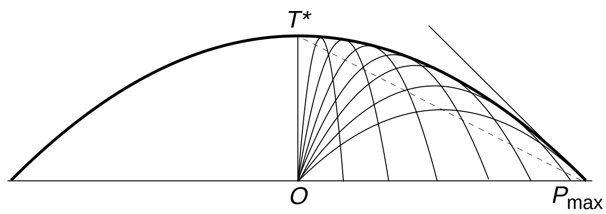
waarmee de kous voltooid is.
Het is leuk om ook nog even naar complementaire afvuurhoeken te kijken. Dat daarbij dezelfde reikwijdte hoort, is nu meetkundig mooi te zien.



Het punt M, behorend bij de 45°-kogelbaan, is het midden van de cirkelboog M_1M_2.
Als je een tuinsproeier neemt die in een verticaal vlak draait, dan beschrijven de toppen van de waterparabolen een mooie curve. Die kromme is het beeld van de cirkel met middellijn OT^* bij (axiale) vermenigvuldiging met factor 2 vanuit die middellijn, dus ... een ellips.



Ik kijk nog even naar de bovenste figuur in deze kolom. De raaklijnen in O en P_{max} aan de 45°-baan ontmoeten elkaar in S en omdat $\angle SOP_{max} = 45°$, ligt het brandpunt van die parabolische baan midden tussen O en P_{max} .
Centrale vermenigvuldiging van deze baan met factor 2 vanuit P_{max} geeft een parabool die aan de kogelbanen corresponderend met $\alpha \geq 45°$ raakt; het is de omhullende van dit stelsel kogelbanen. Die omhullende heeft dus T^* als top en O als brandpunt.



Met analytisch middelen is dit na te pluizen. Een meetkundige redenering lijkt moeilijk. Wie durft?

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl