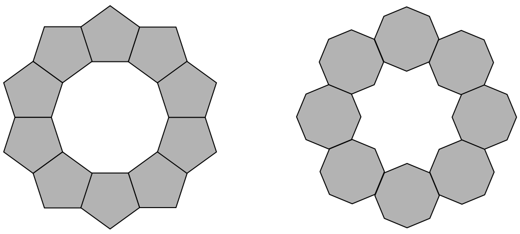
Natuurlijke getallen zijn minder abstract dan reële getallen, rijen zijn concreter dan functies met een continu domein, discrete variabelen meer ‘grijpbaar’ dan continue. In het algebraonderwijs zou hier wat vaker op kunnen worden ingespeeld, bijvoorbeeld door middel van rijen en patronen. **Martin Kindt** doet een aantal leerstofsuggesties in deze richting.

Discrete algebra

Juist voor Kerst draaide in een studiehuis ergens in Nederland een experimenteel Cabri-practicum onder de titel ‘Kerststerren en kransen’. Met Cabri kun je allerlei regelmatige veelhoeken op het scherm tekenen (zowel ‘gewone’ als ‘stervormige’). Door regelmatig spiegelen kan met een gewoon exemplaar een krans worden gemaakt:



krans van 10 vijfhoeken krans van 8 achthoeken

Zo’n computerprogramma maakt het mogelijk in korte tijd een aantal verschillende gevallen te onderzoeken. De 4 VWO-ers, die zich in een halfuurtje(!) de beginselen van Cabri hadden eigengemaakt, gingen ijverig experimenteren. Het leek erop of het steeds mogelijk is een krans te maken, voor sommige veelhoeken lukte het zelfs op meer manieren. Daar ligt dan een typische wiskundige vraag voor het oprapen: ‘lukt het voor *iedere* regelmatige veelhoek en zo ja, hoeveel heb je er nodig?’ Bij dit onderzoek speelt algebra een zekere rol en aan het eind van dit artikel kom ik terug op deze vraag. De lezer krijgt dus ruimschoots de gelegenheid hier zelf aan te puzzelen.

Het al of niet sluiten van een kring veelhoeken heeft te maken met de hoekgrootte en één van de inleidende vragen was om uit te zoeken hoe de hoek van een regelmatige veelhoek afhangt van het aantal hoekpunten. Daar ik als ‘observator-begeleider’ ter plekke was, bood een leerling mij zijn formule ter keuring aan:

$$\frac{(\text{aantal hoeken} - 2) \times 180}{\text{aantal hoeken}}$$

‘Lijkt me mooi, kun je het mij uitleggen?’

Nee, dat kon hij niet: ‘het stond zo vorig jaar in het boek’. Op mijn vraag of hij de formule korter kon opschrijven (ik wilde één letter voor ‘aantal hoeken’), antwoordde hij gretig: je kan dit (= aantal hoeken) tegen dit wegstrepen. ‘Oh, ja, wat hou je dan over?’ Het voorstel werd schielijk ingetrokken. Vervolgens stuurde ik een beetje aan op de rondwandelingstrategie: als je één compleet rondje om de N -hoek loopt maak je N keer dezelfde draai. Gevolg: het aantal graden van een buitenhoek is $360/N$ en van een binnenhoek dus $180 - 360/N$ (deze aanpak heeft het voordeel dat zij ook werkt voor sterren, al moet je dan wel bedenken hoeveel rondjes je in totaal draait). Mijn leerling vond dit nu een inzichtelijke formule, maar wilde ook wel eens kijken of het klopte met die eerdere, met andere woorden of

$$\frac{(N-2) \times 180}{N} = 180 - \frac{360}{N}$$

een identiteit is.

Tja... dat leek bijna onoverkomelijk moeilijk. Bedenk dat het een uitgelezen groep leerlingen betrof (profiel N & T) en dit zeker niet de minste leerling was! Na terugkomst van mijn tochtje langs andere leerlingen, besloot ik hem uit zijn lijden te verlossen. Als je nou eens die N uit de noemer wilt laten verdwijnen... Goed, hij vermenigvuldigde links en rechts met N, ging daarbij nog een keer in de fout, kwam uit op een zeer eenvoudige identiteit, die na zeer diep nadenken ten slotte werd doorzien.

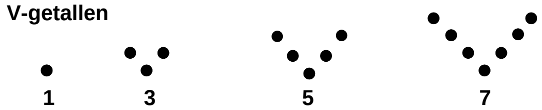
Een voor de hand liggende reactie is misschien: ‘zie je wel, ze leren geen algebra meer tegenwoordig, ze missen de automatismen’. Dat laatste is, denk ik, waar. In het Profi-project zijn we daar bij de differentiaal- en integraalrekening ook regelmatig tegenaan gelopen. In de nieuwe druk van de onderbouwboeken zie je als reactie nu weer een versterking van de algebracomponent en vooral een toename van de rijtjes oefeningen. De grote vraag is of dat wezenlijk helpt. Heel veel vroeger oefenden leerlingen zich suf en beschikten ze inderdaad over veel meer automatismen, vooral waar het ‘letterbreuken’ betrof. Maar ik herinner me maar al te goed de onoverkomelijke problemen bij de zogenaamde ingeklede vergelijkingen. In het huidige wiskundeonderwijs wordt terecht van meet af aan meer aandacht besteed aan het bouwen van formules. Het manco is blijkbaar de vaardigheid in het gebruik ervan. Een evenwichtige algebraleergang zou beide componenten moeten vervlechten. Ik meen dat op het terrein van ‘algebra met natuurlijke getallen’ (‘discrete algebra’) goede mogelijkheden voor een samengaan van begrip, vaardigheid en toepassing liggen.

Rekenen aan letters

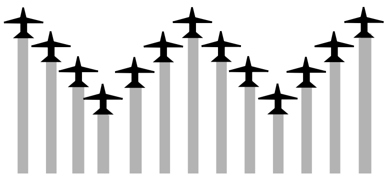
Discrete algebra (waartoe ik ook eenvoudige getaltheorie reken) is oeroud. In de school van Pythagoras was het een geliefde bezigheid. Uit die tijd stamt het idee om getallen voor te stellen door stippenpatronen (op een zandstrand met één vinger te maken).
Fameus in dit verband zijn de driehoeksgetallen, maar daarover straks meer. Geïnspireerd door de Pythagoreeërs hebben we in onze Amerikaanse methode *Mathematics in Context*[1] de zogenaamde V- en W-getallen geïntroduceerd. Trekvogels vliegen soms in een V-formatie, zoals de dichtregels van Marjolein Kool[2] zeggen:

> De ganzen vlogen in een V.
> Er werd geen tijd vermorst
> en ieder die het zag benee,
> riep: 'Kijk, de V van Vorst!'

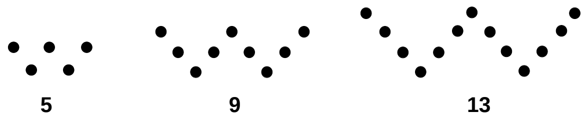
De ideale V-formatie kent één leider en twee even lange linies. Aldus gemathematiseerd



De algebraïsche vorm die zich bij dit patroon opdringt is: $1 + 2\,N$ en hiermee hebben we de gebruikelijke voorstelling voor een oneven getal te pakken. Een andere in het patroon zichtbare formule is $N + (N + 1)$.
Eskadrons van vliegtuigen willen bij showvluchten nog wel eens wat ingewikkelder doen en bijvoorbeeld in W-formatie vliegen:



Ook hierbij pas weer een rijtje stippenpatronen:



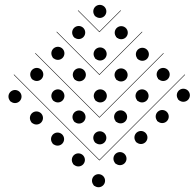
Een geschikte vorm hierbij is bijvoorbeeld: $1 + 4N$, maar er zijn andere mogelijkheden. Zo leert bijvoorbeeld een vergelijking van V- en W-getallen dat een W-getal 1 minder is dan een dubbel V-getal; in algebra-taal:

$$1 + 4\,N = 2 \times (1 + 2\,N) - 1.$$

Een aardige activiteit voor leerlingen is om zelf een letterpatroon met bijpassende formule te bedenken. Inspiratie hierbij kan zijn het geestige vervolg van het ganzenvers [2]:

> Ze vlogen door tot Londen. Daar
> ontwaakte het besef:
> De V van vorst is simpel, maar
> hoe vlieg je in een F?

Die V-getallen komen ook bij de Pythagoreeërs voor, maar daar heten het gnomons. Als je de serie formaties in elkaar schuift, ontstaat er een carré:

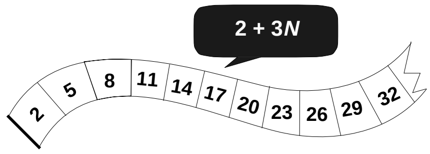


$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

Zo wordt een even mooie als klassieke stelling duidelijk: *de som van N opvolgende oneven getallen vanaf 1 is* N^2.

Als het maar strookt

Het voordeel van de restrictie van een variabele tot het domein van de natuurlijke getallen is dat je je bij een algebraïsche vorm gemakkelijk een voorstelling kunt maken van de verzameling waarden. Met name bij lineaire vormen past een rij getallen waarvan de regelmaat opvalt.



Ik heb hier gekozen voor een getallenstrook als representatie, omdat die minder formeel oogt dan het gangbare

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, ...

De coëfficiënten (hier 2 en 3) hebben een duidelijke betekenis: zij zijn respectievelijk *startgetal* en *spronggetal*. De variabele N staat hier voor het aantal sprongen vanaf het startgetal. Je kunt ook zeggen het nummer van het vakje, maar dan moet je je realiseren dat je, net als bij de jaren van dit millennium, met 0 begint te tellen. Natuurlijke oefeningen in dit kader zijn het ontwerpen van formules bij stroken en het maken van (een beginstuk van) stroken bij formules.
Met stroken kun je rekenen. Wat gebeurt er bijvoorbeeld als je de strook met 5 vermenigvuldigt? Natuurlijk: het startgetal wordt 10 en het spronggetal wordt 15. Kortom:

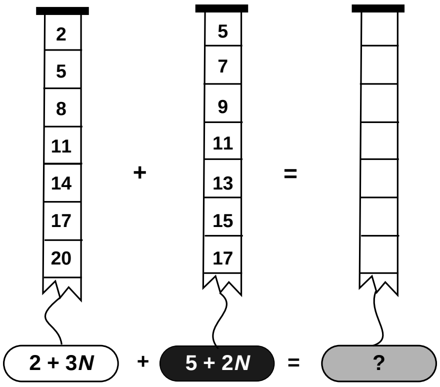
$$5 \times \boxed{2 + 3N} = \boxed{10 + 15N}$$

Niemand kan ontkennen dat de distributieve wet in deze strokencontext volstrekt vanzelfsprekend is! Wel zal de kritische lezer zal zich afvragen hoe het met de haakjes zit. Naar mijn idee kun je leerlingen in het begin beter vragen wat er uitkomt als je $2 + 3N$ met 5 vermenigvuldigt, dan ze meteen de geijkte vorm met haakjes voorschotelen. Zodra er misverstand kan ontstaan, moet er wat verzonnen worden en dat kunnen dan bordjes of kringen of hokjes of ... haakjes zijn. In een notatie als

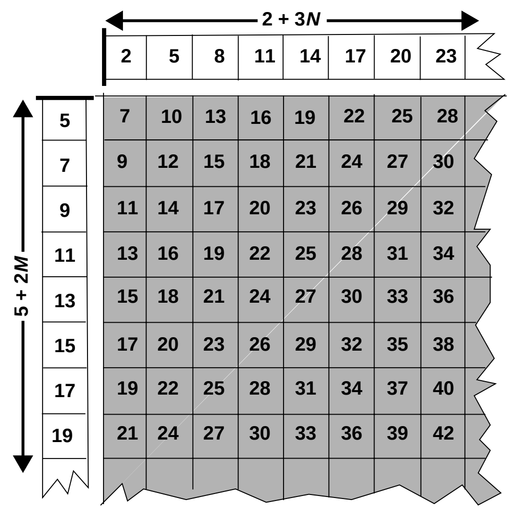
$$2 + 3N \xrightarrow{\times 5} 10 + 15N$$

zijn er nog nauwelijks zorgen. Laten we toch beseffen dat haakjes alles te maken hebben met voorrangsregels, conventies dus, en helemaal niets met wiskunde!
Natuurlijk zullen er een keer communicatieregels moeten worden vastgelegd. Een goed moment kan bijvoorbeeld

zijn als formules in een computer(tje) moeten worden ingevoerd; dat apparaat is zo dom dat je wel extra duidelijk, en vooral niet zuinig met haakjes, moet zijn.
Terug naar de (lineaire) stroken. Vermenigvuldigen met een vast getal is blijkbaar geen probleem. Optellen met een vast getal natuurlijk ook niet. Maar hoe zou je twee (niet-constante) lineaire vormen optellen?



Term voor term optellen ligt het meest voor de hand en het formule-etiket bij de somrij is dan snel te zien: $7 + 5N$. Hier liggen mogelijkheden voor gevarieerd oefenen. Merk op dat daarbij steeds twee niveaus van handelen zijn: het getalsmatige en het formele niveau.
De ene leerling zal sneller afstand doen van het concrete getalsniveau dan de andere, zeker. In ieder geval wordt er een concrete ervaringsbasis gelegd, waarop bij twijfel altijd kan worden teruggegrepen. Voor het gemak heb ik me beperkt tot natuurlijke getallen, de eenvoudigste aftelbare verzameling, maar desgewenst kunnen ook negatieve gehelen worden toegelaten.
Een bekende moeilijkheid bij aanvankelijk algebraonderwijs is het werken met meer variabelen. Hoe tel je bijvoorbeeld $2 + 3N$ en $5 + 2M$ op? Als je aan de bijpassende stroken denkt, betekent dit dat nu ook getallen met verschillende rangnummers kunnen/moeten worden opgeteld. Dat geeft een extra dimensie:



Het formule-etiket bij het tableau is $7 + 3N + 2M$, dat is de algebraïsche som van $2 + 3N$ en $5 + 2M$.

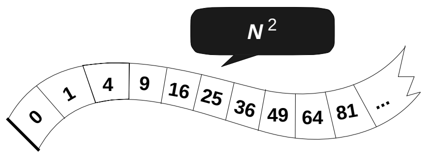
In de vorm $7 + 3N + 2M$ is 7 het startgetal, is 3 het horizontale en 2 het verticale spronggetal, is N het horizontale en M het verticale rangnummer.
Ook hier is er goed voer voor algebrabeginners.
Neem $M = 4$ en je krijgt de (horizontale) rij van het tableau met etiket $15 + 3N$; evenzo brengt een vaste waarde voor N een kolom voort. Ook bij deze substitutieoefeningen zijn er steeds twee niveaus: kijken naar het patroon in het tableau of regelrechte algebra. Een spannende oefening is het om diagonalen te bekijken. De hoofddiagonaal krijg je bij gelijk nummers N en M; in algebra-taal

als $N = M$, dan: $7 + 3N + 2M = 7 + 5N$

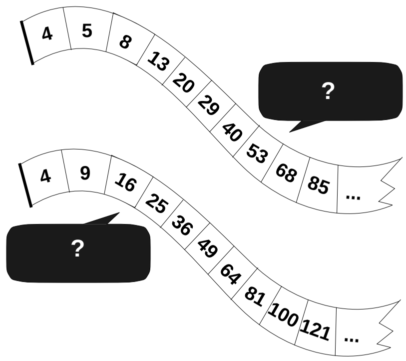
Andere 'diagonalen' (al of niet parallel aan de hoofddiagonaal) krijg je via meer geraffineerde substituties, bijvoorbeeld $M = N + 3$, $M = 2N$, enzovoort. En voor de uitblinkers: hoe komt het dat de diagonalen loodrecht op de hoofddiagonaal series opvolgende getallen tonen?

Vormen van de tweede graad

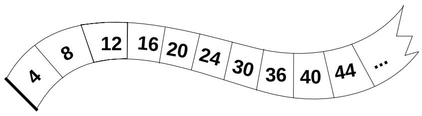
Het voorgaande past best in het eerste leerjaar jaar, al moeten de laatstgenoemde oefeningen niet worden onderschat. Opereren met niet-lineaire vormen kan beter worden bewaard voor wat later. Ziehier een paar ideeën.
Als eerste niet-lineaire strook komt de 'kwadratenstrook' in aanmerking (ik laat exponentiële rijen in dit artikel buiten beschouwing, maar dat betekent niet dat die geen perspectief zouden bieden):



Het sprongetal varieert regelmatig en doorloopt juist de oneven getallen (maar dat wisten we al van de in elkaar geschoven V-getallen!).
Uit die strook kun je weer nieuwe maken (zie figuur hieronder). De sprongen bij de bovenste zijn gelijk aan die bij N^2, dat helpt bij het raden van de passende formule: een kwestie van een vast getal (= 4) bijtellen. Bij de onderste is er sprake van een verschuiving van de kwadratenrij, dat ligt een stuk moeilijker. N vervangen door $N + 2$, iedere leraar weet hoe lastig dat voor leerlingen is. Ik denk wel dat het doorgronden ervan in deze situatie makkelijker is dan bij verschoven grafieken.



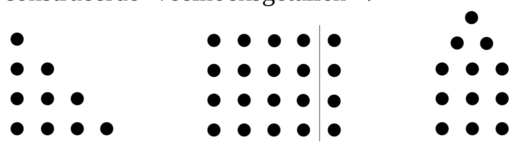
Het verschuifprincipe is belangrijk genoeg om er gezonde aandacht aan te besteden. De substitutie zegt: het gaat om het kwadraat van $N + 2$. Nu zijn haakjes (of een andere afsluitvorm) dus wel erg gewenst! Het voorbeeld laat trouwens zien dat $N^2 + 4$ en $(N + 2)^2$ niet gelijkwaardig zijn. Aardig is het om op de paarsgewijze verschillen te letten tussen $(N + 2)^2$ en N^2. Dat levert de strook:



Een lineaire vorm dus en wel: $4 + 4N$.
Dat leidt dan tot de identiteit $(N + 2)^2 = 4 + 4N + N^2$.
Uiteraard is een goede en gevarieerde sequentie van opdrachten belangrijk. En natuurlijk mag een inzichtelijke verklaring niet ontbreken. Een middel hiertoe is het carré van V-getallen! In de kwadratenrij twee plaatsen opschuiven betekent immers sprongen van $1 + 3$, $3 + 5$, $5 + 7$, ... en dat zijn juist de getallen op de strook $4 + 4N$. Ik laat het aan de fantasie van de lezer over hoever je dit zou kunnen doorvoeren. Het rechthoeksmodel in discrete vorm, dus met stippen of roostervierkantjes, werkt zeker.

Figurale getallen

Behalve de stippenpatronen in carré kenden de Pythagoreeërs ook driehoeksgetallen en rechthoeksgetallen. Nicomachos borduurde 600 jaar later voort op die ideeën en construeerde 'veelhoeksgetallen'[3].



driehoeksgetal rechthoeksgetal vijfhoeksgetal

Een rijke bron voor algebra! Identiteiten kunnen zowel aanschouwelijk als aritmetisch/algebraïsch worden verklaard, waarbij die beide componenten elkaar ondersteunen. Zo leert het lijntje in de middelste figuur dat

$$N \cdot (N + 1) = N^2 + N$$

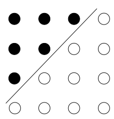
Met een schuin lijntje kan een rechthoekspatroon in twee identieke driehoekspatronen worden verdeeld en daaruit volgt dan de formule:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + N = \frac{N \cdot (N + 1)}{2} = \frac{N^2 + N}{2}$$

Nog een voorbeeld: tel steeds twee opvolgende driehoeksgetallen bij elkaar op:

$$1 + 3 = 4,\ 3 + 6 = 9,\ 6 + 10 = 16,\ 10 + 15 = 25,\ \ldots$$

Zou het waar zijn dat de uitkomst steeds een kwadraat is? Een plaatje maakt alles duidelijk:



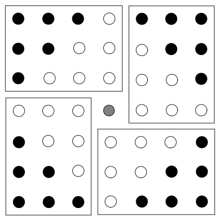
Op formeel niveau is het duidelijk lastiger, maar het is natuurlijk wel een nuttige exercitie:

$$\tfrac{1}{2}(n - 1)n + \tfrac{1}{2}n(n + 1) = n^2$$

Een vijfhoeksgetal kan worden opgevat als de som van een kwadraat en een driehoeksgetal of als de som van een rechthoeksgetal en een driehoeksgetal. Beide opvattingen moeten tot gelijkwaardige formules leiden en dat geeft weer werk aan de winkel.
En wist u dat '$8 \times$ *driehoeksgetal* + 1' ook altijd een kwadraat is? Je kunt het leerlingen laten vermoeden door eerst maar eens een tabel te laten maken. Algebra is dan het medium waarmee je dit vermoeden in een bewijsbare vorm kunt gieten, namelijk:

$$8 \times \tfrac{1}{2}n(n + 1) + 1 = (2n + 1)^2$$

zodat het ten slotte zekerheid kan worden. Mits ... de regels foutloos worden toegepast. Er is ook een aanschouwelijke demonstratie:

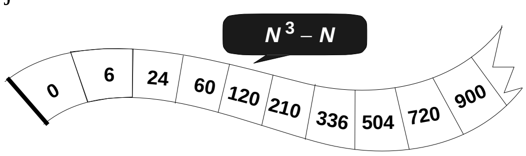


De mogelijkheden zijn vrijwel eindeloos – laat bijvoorbeeld leerlingen ook zelf identiteiten in deze geest construeren! – echter ... doseren is en blijft een kunst.

Deelbaarheid

Leerlingen van nu blijven verstoken van typisch arithmetische zaken zoals deelbaarheid, ggd en kgv, priemgetallen, ... Eigenlijk is dat jammer, want juist in dit gebied zijn er zoveel mogelijkheden om van algebra te profiteren. En dat 'getaltheorie' ver buiten de belangstellingsfeer van de leerling zou liggen, lijkt na het verkoopsucces van de *Telduivel* toch wel achterhaald. Een pré van dit onderwerp is bovendien dat er op elementair niveau redelijk streng kan worden geredeneerd: algebra als bewijs-instrument.

Bekijk de strook met etiket $N^3 - N$:



Het lijkt of de getallen van de strook deelbaar zijn door 6.
Ontbinding in factoren leert dat
$N^3 - N = N(N^2 - 1) = N(N - 1)(N + 1) = (N - 1)N(N + 1)$
Er ontstaat dus steeds een product van drie opvolgende getallen: $0 \times 1 \times 2$, $1 \times 2 \times 3$, $2 \times 3 \times 4$, ...
In zo'n tripel zit altijd een drievoud, dus de deelbaarheid door 3 is gegarandeerd. Bovendien bevat elk groepje óf één, óf twee even getallen, dus elk getal van de strook is even. Een even drievoud is deelbaar door 6, klaar.

Nu een wat pittiger staaltje. Eratosthenes heeft een fraaie methode bedacht om priemgetallen te zeven. Minder bekend is de zeef van Sundaram (1934), zie ook[4].

4	7	10	13	16	19	22	25
7	12	17	22	27	32	37	42
10	17	24	31	38	45	52	59
13	22	31	40	49	58	67	76
16	27	38	49	60	71	82	93
19	32	45	58	71	84	97	110
22	37	52	67	82	97	112	127
25	42	59	76	93	110	127	134

Een tableau van lineaire rijen en lineaire kolommen.
De getallen ervan worden gebruikt als bouwstenen voor oneven getallen. Verrassenderwijs geldt:
Is A een getal van het tableau, dan is 1 + 2A niet priem.
Is B een (positief geheel) getal niet in het tableau, dan is 1 + 2B wél priem!
Even een paar proefjes op de som:

A	4	7	10	12	13	16	17	19	22	24	25	27	28
$1+2A$	9	15	21	25	27	33	35	39	45	49	51	55	57

en

B	1	2	3	5	6	8	9	11	14	15	18	20	21
$1+2B$	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43

Nog geen tegenvoorbeeld gevonden, dat zegt uiteraard niets. Daarom: ‘hoe bewijs je bovenstaande bewering?’
Om te beginnen kunnen de rijen in het tableau kernachtig zo worden beschreven:

$1 + 3N,\ 2 + 5N,\ 3 + 7N,\ 4 + 9N,\ 5 + 11N, \ldots$

Deze rij van tweetermen kan op haar beurt (abstractietreetje hoger!) in één vorm worden uitgedrukt:

$$M + (1 + 2M)N$$

of mooier:

$$M + N + 2MN$$

met $M, N = 1, 2, 3, 4, \ldots$
Dit is dus de formule die het getallentableau beschrijft.
Merk nog op dat de symmetrie (M, N zijn uitwisselbaar) overeenkomt met die van het tableau.
Eerst moet het niet-priem zijn worden aangetoond van:

$$2(M + N + 2MN) + 1$$

ofwel van

$$1 + 2M + 2N + 4MN$$

Een kwestie van ontbinden in factoren:

$$(1 + 2M)(1 + 2N)$$

Laat nu B een getal buiten het tableau zijn.
Het getal $1 + 2B$ is in elk geval oneven. Stel dit getal is ontbindbaar. De factoren moeten dan oneven zijn!
Dus

$$1 + 2B = (1 + 2M)(1 + 2N)$$

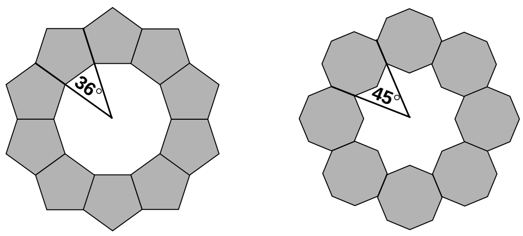
Maar nu kan de film worden teruggedraaid en volgt

$$B = M + N + 2MN$$

en dat betekent weer dat B in het tableau past.
Waarmee de zeef gelegitimeerd is!
Het tweede deel van de redenering (bewijs uit het ongerijmde!) is tamelijk subtiel, maar voor bijvoorbeeld 4VWO-leerlingen met een B-profiel zeker niet onbegrijpelijk. Het eerste deel, het opstellen van een formule bij het tableau, is een vaardigheid die geëist zou moeten kunnen worden. Dit voorbeeld geeft in elk geval aan hoe krachtig het instrument van de algebra kan zijn en die ervaring zou de leerling regelmatig moeten opdoen.

Terug naar de kransen

Sommige leerlingen vonden het na het systematisch maken van een aantal verschillende kransen welletjes: ‘ik geloof nu wel dat het altijd lukt’. Geloof op basis van empirische inductie. Wiskundige waarheid laat zich op deze wijze niet bevestigen. De uitdaging is om een onomstotelijke redenering te geven. Ook in dit geval zal algebra een doorslaggevende rol blijken te spelen.
Maar eerst de meetkundige optiek. Wanneer lukt het om een krans van regelmatige N-hoeken te maken?
Wel, als de hoek tussen twee veelhoekszijden die dienst doen als spiegelassen een geheel aantal keren in de volle hoek (= 360°) past.



Bij de eerder getekende kransen is dat het geval.
In de linker figuur moet je, beginnend bij een zijde, *twee* stapjes maken om bij de volgende spiegelas te komen.
Iedere ‘draaistap’ is 72°, 2 keer draaien geeft 144°, daarvan het supplement is 36°. Deze hoek past 10 keer in 360°, vandaar dat er een krans van 10 vijfhoeken ontstaat.
Analoog voor de tweede krans. Nu de algemene probleemstelling: *hoe zit het met een N-hoek?*
Het aantal draaistappen tussen twee opvolgende spiegelassen noem ik M. ($M > 1$ als alleen kransen met een gat zijn toegestaan!) Wanneer je langs de periferie van de veelhoek wandelt van de ene spiegelas naar de volgende, is de totale richtingsverandering in graden gelijk aan:

$$M \times \frac{360}{N}$$

De hoekgrootte (in °) tussen die spiegelassen is dan:

$$180 - M \times \frac{360}{N}$$

Stel dat deze hoek K keer in de volle hoek past.
Dan moet gelden:

$$K \times \left(180 - M \times \frac{360}{N}\right) = 360$$

ofwel (algebra!)

$$K(N - 2M) = 2N$$

De vraag is nu of er bij iedere $N \geq 5$ gehele getallen M en K te vinden zijn, zodat bovenstaande gelijkheid geldt.
Het is niet onverstandig om eerst maar eens een aantal concrete gevallen te onderzoeken en overzichtelijk op te schrijven, bij voorkeur in een tabel. Al doende kan langzaam maar zeker het inzicht ontstaan waarom het bij iedere regelmatige veelhoek (met tenminste vijf zijden) inderdaad lukt.

N	M	$2N$	$N - 2M$	K
5	2	10	1	10
6	2	12	2	6
7	3	14	1	14
8	2	16	4	4
8	3	16	2	8
9	3	18	3	6
9	4	18	1	18
10	3	20	4	5
10	4	20	2	10
11	5	22	1	22

De tabel laat een duidelijk verschil zien tussen 'N is even' en 'N is oneven'.
In het laatste geval lukt het altijd om een M te vinden zodat $N - 2M = 1$ en daarmee is het bestaan van een krans verzekerd. Duidelijk is meteen dat als N ook nog priem is, er precies één krans bestaat (van $2N$ veelhoeken).
Is N even, dan is er een M-waarde zo dat $N - 2M = 2$, en lukt het dus om een krans van N veelhoeken te maken.
Conclusie: *voor iedere* $N \geq 5$ *is er een krans van N-hoeken mogelijk.*
De stap van het bijzondere (de gevallen in de tabel) naar het algemene is hier eigenlijk helemaal niet zo groot.
Het moeilijkste deel van het bewijs is het opstellen van de sleutelformule: $K(N - 2M) = 2N$.
Het in de aanhef van dit artikel beschreven experiment kende in januari een tweede versie. Daarbij heb ik de sleutelformule 'weggegeven', zodat verder onderzoek niet werd geblokkeerd. Aan een bewijs van de formule kwam slechts een enkeling toe. Eén leerling gebruikte spontaan een spreadsheet (Excel) bij zijn onderzoek en ik stond verbaasd over de deskundigheid waarmee hij ook dit medium hanteerde.

Reflectie

In dit artikel heb ik, een beetje leunend op mijn ervaring bij de ontwikkeling van een algebra-lijn in MIC, geschetst hoe je elementaire algebraïsche operaties met behulp van getallenstroken (rijen) inzichtelijk kunt maken.
Het grote voordeel van het werken met natuurlijke getallen is de overzichtelijkheid en de regelmaat. De wereld van de natuurlijke getallen is in het basisonderwijs al uitvoerig verkend en behoort tot de realiteit van de leerling. Daarom kun je zeggen dat 'discreet' ook 'concreet' is.
Het zelf maken van formules bij stippenpatronen of getallenrijen, het *generaliseren* dus, is een fundamenteel aspect van goed algebraonderwijs. Net zoals 'substitueren van getallen in vormen' (*specialiseren*) en 'van vormen in vormen' (*transformeren*) dat zijn. In de huidige schoolboeken komt dat alles zeker ook aan bod, maar misschien gebeurt dat nog wat te zuinig en te weinig gevarieerd.
Belangrijk is het om leerlingen regelmatig te laten ervaren dat algebra niet zo maar een formeel (en voor velen vervelend) spelletje is, maar dat je er problemen mee kunt oplossen en ... bewijzen mee kunt geven. Mijn pleidooi voor de introductie van elementair getaltheoretische zaken heeft daar alles mee te maken. En hoort een kennismaking met het verschijnsel priemgetal, om maar eens wat te noemen, niet bij de culturele ontwikkeling van iedere HAVO/VWO-leerling? In de meetkunde van regelmatige figuren en vlakvullingen en ook in de combinatoriek liggen verbindingen met algebra. Het is al eeuwen bekend en de geschiedenis van de wiskunde geeft mooie aanknopingspunten. Het grote didactische probleem is het vinden van een evenwicht tussen waardevolle exploraties en rijke toepassingen enerzijds en (flexibele!) vaardigheid bij het uitvoeren van rekenhandelingen anderzijds.
Eén ding staat voor mij vast: het werkt niet om leerlingen eenzijdig 'kale' oefeningen te laten maken ('toonladders te laten spelen'). Daarmee wil ik niet zeggen dat er kan worden volstaan met louter vorming van begrip en inzicht. Oefenen moet ook, de vraag is echter niet alleen 'hoeveel', maar vooral 'hoe'. Wordt vervolgd.

Martin Kindt, Freudenthal Instituut

Literatuur

[1] *Mathematics in Context* (1997). Chicago: EB.
In MIC worden in de algebralijn drie stromen onderscheiden: 'Processes' (alles wat met functies en grafieken te maken heeft), 'Restrictions' (vergelijkingen, lineair programmeren) en 'Patterns' (zeg maar 'discrete algebra').

[2] Kool, M. (1993). *Python in de plantenbak*. Baarn: Uitgeverij De Fontein.

[3] Katz, V.J. (1993). *A History of Mathematics*. New York: Harper Collins.

[4] Honsberger, R. (1970). *Ingenuity in Mathematics*. New York: Random House.