Op de lerarenopleiding te Utrecht staat een cursus Probleemaanpak op het programma. **Jan Kes** werd gegrepen door een combinatorisch probleem over verplaatsingen. In deze bijdrage beschrijft hij zijn oplossing.

Combinatorisch vraagstuk

Een klas bestaat uit n rijen van twee tafels per rij en elke plek is bezet. De leraar verzoekt elk van de leerlingen om op een andere plaats te gaan zitten door zich één rij naar voren of naar achteren te verplaatsen, of door op de plaats náást de huidige plaats te gaan zitten. Op hoeveel verschillende manieren kan dit?

Deze vraag kreeg ik als student van de lerarenopleiding wiskunde eerstegraad in verband met de cursus 'Probleemaanpak' voorgeschoteld.
Dit vraagstuk is onder andere terug te vinden in het boek *In Pólya's Footsteps, Miscellaneous Problems and Essays* van Ross Honsberger (1997). Ik zal hieronder in het kort de aanpak die in dit boek aan de orde komt, bespreken (voor meer details verwijs ik naar het boek zelf) en daarna mijn gevonden alternatief aandragen.

Oplossing gevonden in literatuur

Honsberger kiest voor een aanpak die hij ontleent aan een publicatie van Robert E. Kennedy en Curtis Cooper van de Cental Missouri State University, getiteld: *Variations on a 5 × 5 Seating Rearrangement Problem, Mathematics in College* (1993).
Eerst even een beschouwing vooraf: we kunnen de klas met leerlingen met [breedte × lengte] = [2 × n] voorstellen als twee rijen met ieder n roostercellen met dezelfde afmetingen. Op elke cel ligt dan een 'fiche', waarbij elk fiche onderscheidbaar is van de anderen en de vraag is dan natuurlijk: op hoeveel verschillende manieren kun je alle fiches één plaats in een rij óf in een kolom verplaatsen, hoeveel verschillende eindtoestanden zijn er mogelijk? (Zie figuur 1.)

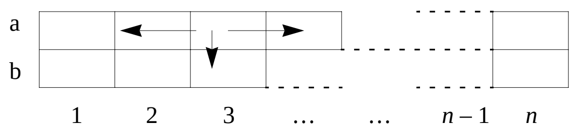


fig. 1 Alle mogelijke verplaatsingen van fiche a3

Honsberger gaat uit van een rooster met lengte n en verdeelt de verzameling van alle mogelijke verplaatsingscombinaties, T_n, in vier deelverzamelingen: A_n, B_n, C_n en D_n. Deze indeling vindt plaats op grond van de uiteinden van het rooster en de index n duidt erop dat het om deelverzamelingen gaat behorend bij een verplaatsingsproces in een rooster met lengte n (zie figuur 2).

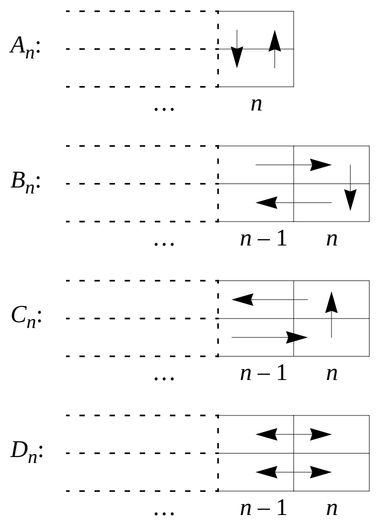


fig. 2 Vier mogelijke uiteinden van het rooster

Noem a_n het aantal verplaatsingscombinaties in A_n; b_n in B_n; enzovoort en het totaal aantal verplaatsingscombinaties t_n. Er geldt nu:

$$t_n = a_n + b_n + c_n + d_n.$$

Hij leidt uit de definities van de deelverzamelingen een recursie af voor t_{n+1}.
Vervolgens is

$$t_1 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$$

makkelijk na te gaan en hieruit berekent hij de eerste 6 waarden voor t_n:

$$t_1 = 1, t_2 = 4, t_3 = 9, t_4 = 25, t_5 = 64, t_6 = 169.$$

Hierin herkent hij de rij

$$1^2, 2^2, 3^2, 5^2, 8^2, 13^2, \ldots,$$

met andere woorden, de rij $\{f_n^2\}$ waarbij f_n het n^e getal uit de rij van Fibonacci is (beginnend bij $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, enzovoort). Dit doet vermoeden dat zal gelden: $t_n = f_n^2$.
Dat dit vermoeden juist is, bewijst hij door middel van volledige inductie.

Alternatieve oplossing

Denkend aan een rooster met fiches, kwam ik al snel op het idee om het geheel te vergelijken met een 'dambord' met (onderscheidbare) damstenen. Men ziet al snel in dat na een willekeurige verplaatsing van alle stenen, de stenen die eerst op een zwart vakje stonden nu op een wit vakje staan en andersom (zie figuur 3).

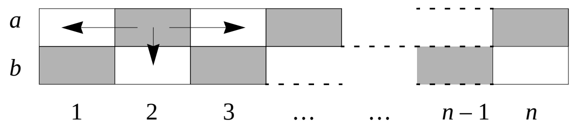


fig. 3 Iedere willekeurige verplaatsing heeft tot gevolg Z → W (en W → Z)

Vanaf nu gaan we alleen letten op de verplaatsingen van 'zwart' → 'wit'. Als we kunnen ontdekken op hoeveel verschillende manieren alle (onderscheidbare) stenen van een zwart veld naar een wit veld (het aantal verplaatsingscombinaties 'zwart' → 'wit') kunnen verschuiven als functie van de lengte van de rij (n) (stel dat dat op s_n manieren kan) dan weten we ook dat dat het aantal verschillende verplaatsingen 'wit' → 'zwart' is. Het totaal aantal manieren, t_n, wordt dan s_n^2. De verplaatsingen 'zwart' → 'wit' en 'wit' → 'zwart' vinden namelijk onafhankelijk van elkaar plaats.

Het is duidelijk dat de verplaatsingen 'zwart' → 'wit' *niet* onafhankelijk van elkaar plaatsvinden. De verplaatsing van bijvoorbeeld $a2 \to a1$ (zie figuur 3) impliceert automatisch de verplaatsing $b1 \to b2$ en andersom. (We bekijken immers alleen zwart → wit.) Na deze verplaatsingen zijn de mogelijkheden voor de steen op $b3$ beperkt tot $b3 \to a3$ óf $b3 \to b4$, de mogelijkheid $b3 \to b2$ is al afgevallen, want $b2$ is al bezet door de steen afkomstig van $b1$. Misschien lijkt dit aanvankelijk wat complex, maar na enig onderzoek blijkt één inzicht van groot belang voor de verdere oplossing van het probleem.

Bekijk de volgende situatie (figuur 4).

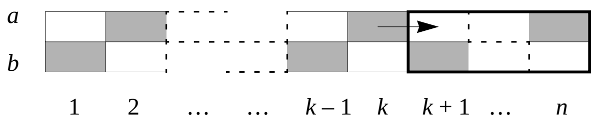


fig. 4 In het kader bevinden zich (n – k) witte en (n – k) zwarte velden

Als we besluiten dat de verplaatsing $a(k) \to a(k+1)$ (een willekeurige verplaatsing in een *rij*) plaats moet vinden, wat betekent dat dan voor de verplaatsing vanuit $b(k+1)$? Het witte veld $a(k+1)$ is nu bezet, zodat er in het aangegeven kader in figuur 4 nog $(n - k) - 1$ beschikbare witte velden overgebleven zijn. Maar er bevinden zich in het aangegeven kader nog $(n - k)$ stenen op de zwarte velden die nog verplaatst moeten worden! Eén van die stenen zal dus nu een witte plaats buiten het kader moeten zoeken en de enige steen waarvoor dat mogelijk is, is de steen op $b(k+1)$. De verplaatsing $a(k) \to a(k+1)$ impliceert dus $b(k+1) \to b(k)$ (en andersom). Men kan nu zelf nagaan dat een verplaatsing in een *kolom* (bijvoorbeeld $a4 \to b4$) wel de mogelijkheden van verplaatsing voor de 'buren' $b3$ en $b5$ beperkt, maar nog niet volledig vastlegt. Als we een verplaatsingscombinatie 'zwart' → 'wit' op het rooster willen symboliseren door middel van pijltjes, dan zal het rooster uiteindelijk opgebouwd zijn uit een eindig aantal verschillende 'bouwelementen' (zie figuur 5).

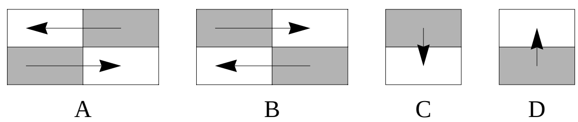
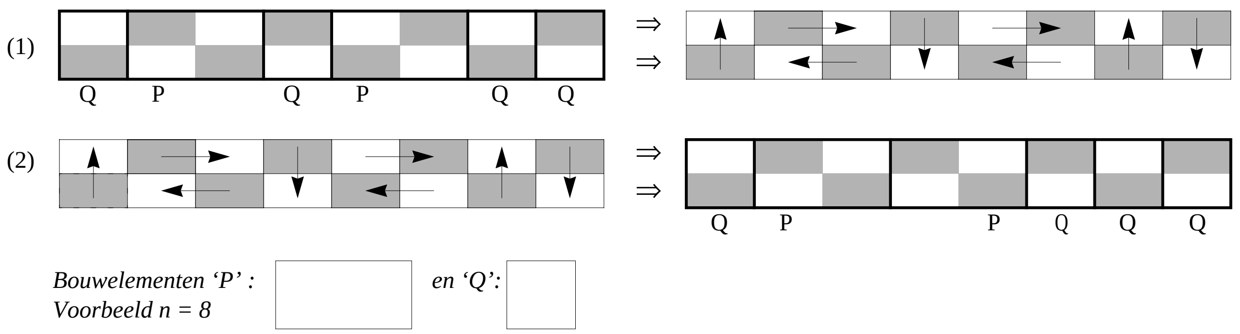


fig. 5 De vier verschillende 'bouwelementen'

Nu kunnen we het een en ander nog wel wat vereenvoudigen, want of er sprake is van bouwelement *A* of *B* hangt af van de *plaats* ervan op het rooster en dat geldt ook voor *C* en *D*. Eigenlijk zijn er maar twee bouwstenen die alle mogelijke verplaatsingscombinaties 'zwart' → 'wit' eenduidig kunnen representeren (zie figuur 6).



- *Elke opbouw van het rooster uit elementen 'P' en 'Q' representeert eenduidig een mogelijke verplaatsingscombinatie.*
- *Ook geldt het omgekeerde: elke verplaatsingscombinatie laat zich op eenduidige manier representeren door een opbouw van het rooster uit de elementen 'P' en 'Q'.*

fig. 6 Opbouw van een rooster uit bouwelementen

Vanwege de 'bijectie' tussen 'verplaatsingscombinatie' ⇔ 'opbouw van het rooster uit bouwelementen P en Q' kunnen we de vraag naar het aantal mogelijke verplaatsingscombinaties als volgt herformuleren: op hoeveel manieren kan ik een rooster van lengte n opbouwen uit de bouwelementenelementen P en Q? Dit is equivalent met de vraag: op hoeveel verschillende manieren kan ik een rij van lengte n opbouwen uit bouwelementen P en Q die een lengte hebben van respectievelijk 2 en 1?

Vanaf hier is het probleem eenvoudig op te lossen. Noem het aantal manieren waarop een rij met lengte $n - 1$ opgebouwd kan worden uit elementen met lengte 1 en 2: s_{n-1}. Dan geldt dat een rij van lengte n óf eindigt met een element met lengte 1 óf eindigt met een element met lengte 2. De eerste krijg je door aan de rij van lengte $n - 1$ een element met lengte 1 toe te voegen en de tweede door aan een rij met lengte $n - 2$ een element met lengte 2 toe te voegen. Zo geldt: $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$. We kunnen makkelijk nagaan dat ook geldt: $s_1 = 1$ en $s_2 = 2$ en dat de rij $\{s_n\}$ dus de rij van Fibonacci is, oftewel $s_n = f_n$. Rekening houdend met het feit dat we dit antwoord moeten kwadrateren om ook de verplaatsingen 'wit'→'zwart' mee te rekenen, vinden we opnieuw: $t_n = f_n^2$.

Jan Kes is student aan de eerstegraads lerarenopleiding wiskunde (FEO/HVU).

Literatuur

Honsberger, Ross (1997). *In Pólya's Footsteps, Miscellaneous Problems and Essays*. Washington DC.: The Mathematical Association of America (Inc.), 67- 72.

Kennedy, Robert E. & Curtis Cooper (1993). *Variations on a 5 × 5 Seating Rearrangement Problem, Mathematics in College.* New York: City University of New York, 59-67.