Leerlingen van twee VWO-3 klassen gebruikten gedurende vijf weken een computeralgebra-machine bij het oplossen van stelsels vergelijkingen waarin parameters voorkomen. **Paul Drijvers** en **Onno van Herwaarden** doen hiervan verslag en geven aan hoe het idee van instrumentatie een kader biedt bij het interpreteren van de successen en de mislukkingen.

Instrumentatie van ICT-gereedschap: algebra met computeralgebra

Inleiding

ICT-gereedschap wordt in toenemende mate in de wiskundeles gebruikt. Op HAVO en VWO is de grafische rekenmachine ingevoerd, leerlingen ontvangen software bij de schoolboeken en de scholen beschikken over steeds betere computervoorzieningen.
Toch heeft de inzet van ICT niet altijd het gewenste effect. Leerlingen houden soms langer dan verwacht moeite met de bediening, zijn niet in staat de software adequaat te gebruiken voor het oplossen van wiskundige problemen of slaan andere wegen in dan door de docent was voorzien of bedoeld.
Iets dergelijks gebeurde tijdens een experiment met een computeralgebra-machine in 3 VWO. Leerlingen weken op allerlei manieren af van het efficiënte traject dat wij voor ogen hadden. In dit artikel beschrijven we dat en geven we aan hoe het concept van instrumentatie ons hielp bij het interpreteren van het gedrag van de leerlingen.
Eerst leggen we uit wat we onder instrumentatie verstaan. Dan schetsen we het kader van het experiment. Vervolgens bespreken we een opgave, het bijbehorende gebruiksschema en de moeilijkheden en varianten die daarbij naar voren kwamen. We besluiten met een discussie en een conclusie.

Wat verstaan we onder instrumentatie?

Het idee van instrumentatie is afkomstig uit de cognitieve ergonomie (Rabardel, 1995) en heeft betrekking op het leren gebruiken van (technologische) hulpmiddelen. Franse wiskundedidactici (Artigue, 1997) hebben het concept vervolgens toegepast op het leren van wiskunde met behulp van ICT en dat is natuurlijk ook wat wij gaan doen. Maar eerst een globale uitleg.
Het uitgangspunt bij instrumentatie is dat een stuk gereedschap in eerste instantie een betekenisloos ding is. Wie bijvoorbeeld nog nooit getimmerd heeft, beschouwt een hamer waarschijnlijk als een object zonder bruikbaarheidswaarde. Pas als het idee opkomt dat je met een hamer goed kunt slaan, als er spijkers aanwezig zijn en misschien zelfs iemand die kan helpen bij het leren timmeren, pas dan krijgt de hamer bruikbaarheidswaarde. De gebruiker gaat de hamer ervaren als een nuttig instrument en zal vaardigheden ontwikkelen om er handig mee om te gaan. Ook leert hij situaties te herkennen waarin timmeren van pas komt. Dit proces, waarin een ‘kaal’ stuk gereedschap zich ontwikkelt tot een bruikbaar instrument, noemen de Fransen de instrumentele genese, zeg maar de ‘instrument-wording’. Iedereen die zich wel eens op de vingers heeft geslagen, weet dat dat proces lang en pijnlijk kan zijn...
Rabardel spreekt dus van een instrument wanneer er sprake is van een relatie tussen het stuk gereedschap, de gebruiker en de taak: de gebruiker moet vaardigheden hebben ontwikkeld om het gereedschap te gebruiken en ook weten voor wat voor soort taken het bruikbaar is en hoe dat dan moet worden aangepakt. Men spreekt dan van een gebruiksschema of instrumentatieschema. Het verwerven en ontwikkelen van dergelijke gebruiksschema’s noemen we instrumentatie. Denk bijvoorbeeld aan het schrijven van een tekst met een tekstverwerker: op een gegeven moment ziet u dat het handig is om een alinea te kopiëren, en vervolgens past u het ‘copy-and-paste’-gebruiksschema routinematig toe, terwijl dat in de aanleerfase van het tekstverwerken een ingewikkelde klus was.
Een gebruiksschema is meer dan een technisch algoritme. Een leerling kan bijvoorbeeld een vergelijking met de grafische rekenmachine oplossen door twee grafieken te laten tekenen en vervolgens een intersect-procedure te gebruiken. Dat zijn technische handelingen, maar daarvoor moet hij allereerst het verband leggen tussen de oplossing van een vergelijking en het snijpunt van de twee grafieken van de functies die ontstaan door elk van de leden van de vergelijking apart te nemen en dat is een conceptuele actie. Mentale, wiskundige concepties maken dus deel uit van het gebruiksschema, en kunnen zelfs mede tijdens het ontwikkelen van het schema groeien. In zo’n instrumentatieschema zijn technische vaardigheden en conceptuele inzichten onlosmakelijk met elkaar verbonden.
Samengevat is instrumentatie dus het verwerven van gebruiksschema’s waardoor een stuk gereedschap een bruikbaar instrument wordt. In zo’n instrumentatiesche-

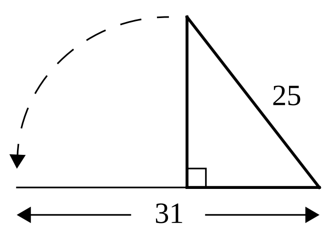
ma komen technische vaardigheden en wiskundige concepties samen.
Het idee dat je een stuk gereedschap moet leren gebruiken, en dat dat leren zowel technische als conceptuele kanten heeft, ligt natuurlijk voor de hand; in die zin is het bovenstaande misschien weinig verrassend. Toch maken de begrippen 'instrumentatie' en 'instrumentatieschema's' deze kwestie explicieter en bieden ze een terminologie om over het leren werken met ICT-gereedschap te praten. Een docent die ICT gebruikt in de wiskundeles zal zich misschien realiseren dat aan het ontwikkelen van gebruiksschema's aandacht moet worden besteed, omdat die ontwikkeling niet altijd vanzelf plaatsvindt. Ook kan het idee van instrumentatie van pas komen bij het interpreteren van moeilijkheden van leerlingen, zoals het vervolg van dit artikel laat zien.

Achtergronden van het experiment

Het experiment vond plaats in het kader van het project 'Het leren van algebra met behulp van computeralgebra systemen'. Het voornaamste doel hiervan was om na te gaan of het gebruik van computeralgebra de leerlingen kan helpen bij het ontwikkelen van inzicht in variabelen en parameters. De aanleiding voor deze vraag wordt enerzijds gevormd door de technologische ontwikkeling van computeralgebra en symbolische rekenmachine, en anderzijds door de vaak gesignaleerde kloof tussen algebra in de basisvorming en in de tweede fase van HAVO/VWO (zie Wijers, 2000).
Variabelen en parameters zijn geschikte onderwerpen om te pogen deze kloof te overbruggen. Leerlingen hebben moeite met het gebruik van letters en hun verschillende rollen in de algebra, zoals onbekende, onbepaalde, veranderlijke, et cetera (zie bijvoorbeeld Usiskin, 1988). Toch spelen die verschillende rollen bij de formelere algebra in de tweede fase wel een belangrijke rol. Verder is het mooie van het gebruik van parameters dat ze een hele klasse van problemen, formules, functies reduceren tot één algemenere situatie. Alle lineaire functies worden bijvoorbeeld samengebald in de formule $y = a \cdot x + b$. Het gebruik van parameters kan zo eenheid scheppen in een ogenschijnlijke verscheidenheid, en het overzicht dat op deze manier ontstaat, kan de leerlingen de kracht van de algebra doen ervaren.
Computeralgebra kan prettig gereedschap zijn bij het leren van algebra. Een computeralgebra-omgeving is veelzijdig, wiskundig krachtig en consistent en laat exploratie van situaties toe. Wel vraagt het gebruik van computeralgebra om het expliciteren van de rollen van de letters, die voor het programma immers op zichzelf geen betekenis hebben.
Het experiment speelde zich in het voorjaar van 2000 af in twee VWO 3-klassen van de Werkplaats Kindergemeenschap in Bilthoven. Alle leerlingen (circa vijftig) kregen gedurende een periode van vijf lesweken de beschikking over een symbolische rekenmachine van het type TI-89, die ze zowel op school als thuis konden gebruiken. De klassen hadden vier wiskundelessen van 45 minuten per week, waarin gewerkt werd aan twee lespakketten. Het eerste, *Introductie TI-89*, beoogde de leerlingen de elementaire machinevaardigheden bij te brengen, terwijl het tweede, *Veranderlijke Algebra*, draaide om het gebruik van variabelen en parameters. A priori was overigens al duidelijk dat een periode van vijf weken te kort is om het proces van instrumentatie van een zo complex instrument als een computeralgebra-machine geheel te doorlopen, zeker omdat de leerlingen ook nog geen ervaring met de grafische rekenmachine hadden.
Ook de algebraïsche ervaring van de leerlingen was beperkt, zeker waar het parameters betreft. De *abc*-formule was bijvoorbeeld nog niet behandeld. Daarom was de hulp van de symbolische rekenmachine onmisbaar. Het experiment had natuurlijk ook kunnen worden uitgevoerd met leerlingen die meer algebraïsche voorkennis hebben, maar de vraag was of het geven van opdrachten aan de machine zou bijdragen aan het ontwikkelen van inzicht in het substitueren van uitdrukkingen, in het oplossen van vergelijkingen en in het onderscheiden van de rollen van letters zonder dat het uitvoeren van de bewerkingen met de hand daarbij een stoorzender zou zijn. Met de machine immers heeft de leerling 'meer afstand' tot het rekenwerk en dat komt misschien een globaler beeld van de procedures ten goede.

Een voorbeeldopgave

Een belangrijke functie van de parameter is dat een formulering van een oplossing in termen van een parameter een generalisatie is van de oplossingen van de specifieke gevallen. De parameter is dus als het ware een 'super-variabele' die een klasse van problemen verenigt. De volgende opgave maakt de bedoelingen duidelijk.



Twee rechthoekszijden van een rechthoekige driehoek zijn samen 31 lang. De schuine zijde heeft een lengte van 25.

a. Hoe lang zijn de rechthoekszijden?
b. Los het probleem ook op als de twee rechthoekszijden samen 35 zijn in plaats van 31.
c. Los het probleem in het algemeen op, dat wil zeggen zonder dat de getallen 31 en 25 gegeven zijn.

Met het oplossen van een stelsel vergelijkingen hadden de leerlingen geen ervaring, al bleek uit de voortoets dat sommige leerlingen wel een idee hadden van een aanpak. Ons ideaal was dat de leerling, na de methode van onderdeel a te hebben aangepast bij b, tot de algemene gedaante van de oplossing in termen van parameters zou komen bij vraag c.

Het ISO-gebruiksschema

Voorafgaand aan deze opgave hadden we de leerlingen een gebruiksschema voorgesteld dat we Isoleren-Substitueren-Oplossen noemen, of afgekort, het ISO-schema.
In de situatie van onderdeel a zijn de vergelijkingen $x + y = 31$ en $x^2 + y^2 = 25^2$, waarbij x en y de rechthoekszijden voorstellen. In figuur 1 ziet u waar het ISO-schema in dit geval met de TI-89 op neer komt.

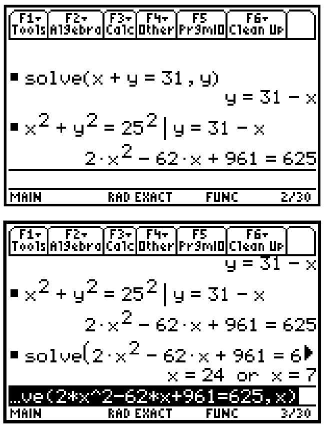


fig. 1 Het ISO-schema op de TI-89

De eerste stap bestaat uit het isoleren van een variabele naar keuze, in dit geval de y, in een van de vergelijkingen. Dat gebeurt met de opdracht '*solve*'. Het resultaat daarvan, $y = 31 - x$, wordt met de streep '|' gesubstitueerd in de andere vergelijking. Dat geeft een vergelijking met nog maar één variabele, namelijk x. Die kan nu met een tweede *solve*-opdracht worden opgelost. Dat geeft hier $x = 24$ of $x = 7$. Het bepalen van de bijbehorende y-waarden is dan eenvoudig.

Moeilijkheden

In de praktijk deden zich allerlei moeilijkheden voor met de uitvoering van dit ISO-schema, die we niet voorzien hadden. Zelfs in de concrete gevallen, nog voor er van parameters sprake was, verliep de instrumentatie niet probleemloos.
Om te beginnen hadden de leerlingen bij het isoleren moeite met het gebruik van de opdracht 'solve'. Dat betekent immers oplossen, terwijl $31 - x$ in hun ogen geen oplossing was. Oplossen leidt naar hun idee tot getallen en dan bij voorkeur tot decimale. Hun conceptie van oplossen diende te worden uitgebreid tot het uitdrukken van een van de letters in termen van één (of meer) andere.

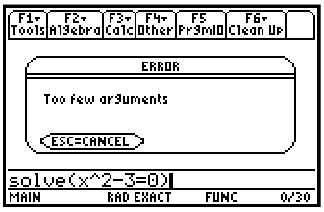


fig. 2 Syntaxprobleem bij 'solve'

Verder hadden leerlingen geen behoefte aan het toevoegen van de letter aan het einde van het commando (zie figuur 2). Voor hen zou *solve*$(x^2 - 3 = 0)$ bijvoorbeeld voldoende zijn, en daar hebben ze ook gelijk in. Ze realiseerden zich niet dat dit in het geval van twee variabelen, zoals in $x^2 + y^2 = 25^2$, anders ligt.

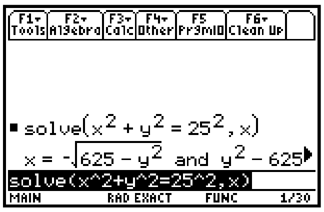


fig. 3 Lastig te interpreteren antwoord bij isoleren

Overigens gaf de isolatie van x in $x^2 + y^2 = 25^2$ een antwoord dat voor de leerlingen moeilijk te interpreteren was (zie figuur 3). Met 'and' geeft de machine aan dat $y^2 - 625$ niet positief kan zijn. De tweede oplossing voor x valt buiten beeld. Deze barrières bleken echter niet onoverkomelijk; na enige gewenning konden de meeste leerlingen de isoleerstap redelijk uitvoeren.

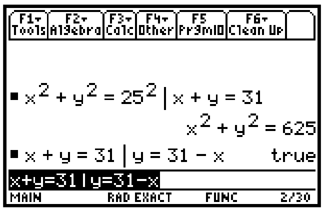


fig. 4 Moeilijkheden bij het substitueren

De substitutie was het grootste obstakel. In de eerste regel van figuur 4 ziet u hoe sommige leerlingen een niet-geïsoleerde vorm probeerden te substitueren. Overigens zou de notatie $\{x^2 + y^2 = 25^2 \mid x + y = 31\}$ in de verzamelingenleer wel correct zijn. Een andere veel voorkomende fout was de substitutie van de geïsoleerde vorm in de vergelijking waaruit deze is afgeleid (zie tweede opdracht van figuur 4). De melding 'true' van de TI-89 zaaide verwarring en leerlingen wisten deze niet te interpreteren.
In een van de twee klassen heeft de docent gedemonstreerd hoe de substitutie en het oplossen in één regel gelijktijdig kunnen worden uitgevoerd met de opdracht

solve$(x^2 + y^2 = 25^2 \mid y = 31 - x, x)$.

De moeilijkheid met deze geneste vorm is echter de keuze van de letter op het einde: naar welke variabele moet worden opgelost?

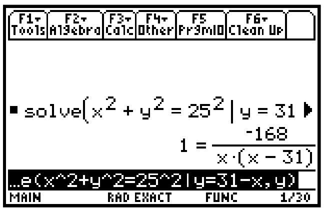


fig. 5 Oplossen naar de verkeerde letter

Figuur 5 laat zien wat er gebeurt bij een verkeerde letterkeuze: de substitutie wordt uitgevoerd, en dan wordt er opgelost naar een letter die inmiddels niet meer voorkomt in de vergelijking. Het enige gevolg is dat de vergelijking op 1 wordt herleid. Enkele leerlingen beschouwden dit als een manier om te substitueren en hebben dit consequent volgehouden. Ze vervolgden dan met een *solve* naar de goede letter, wat alsnog tot de oplossing leidt. Deze aanpak maakt het gebruiksschema onnodig complex en getuigt niet van inzicht in de betekenis van *solve*.

Variaties op het schema

Leerlingen maakten niet alleen fouten in de uitvoering van het schema; ze bedachten ook een aantal varianten, die we niet hadden voorzien.

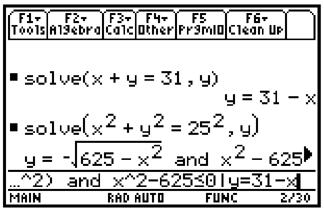


fig. 6 Twee keer isoleren

Sommige leerlingen hadden bijvoorbeeld de gewoonte om beide vergelijkingen eerst te isoleren naar dezelfde variabele, bijvoorbeeld y (zie figuur 6). Waarschijnlijk is dit afgeleid van het werken zonder machine: op papier brengen ze vergelijkingen vaak in de vorm y = ... In dit geval gaf deze aanpak problemen, omdat de geïsoleerde vorm van de kwadratische vergelijking niet zo simpel is.

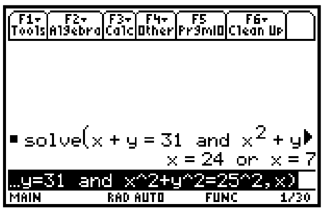


fig. 7 Oplossing van het stelsel ineens

De tweede variant betrof een echte binnenbocht: in een van de klassen hadden leerlingen ontdekt dat de TI-89 twee vergelijkingen simultaan oplost als ze met *and* worden ingevoerd (figuur 7). Hoewel dat in eenvoudige gevallen bijzonder praktisch is, is de kracht van *and* beperkt, zodat deze leerlingen met de handen in het haar zaten bij iets ingewikkelder stelsels. Dat overkwam sommigen van hen dan ook bij de eindtoets...
Een derde variant bestond uit de herhaling van het hele ISO-schema om de andere variabele te vinden: eerst

$$solve(x^2+y^2 = 25^2 \mid y = 31 - x, x)$$

en daarna dan nog

$$solve(x^2+y^2 = 25^2 \mid x = 31 - y, y).$$

Niet erg efficiënt, maar het werkt, al blijkt uit deze werkwijze niet welke oplossing voor x bij welke oplossing van y hoort.

In de twee klassen verschilden de geschetste varianten in populariteit. Bij een opgave van de eindtoets die analoog was aan het hier besproken probleem, kende klas A een voorkeur voor de geneste vorm, terwijl klas B een grotere variatie vertoonde (zie tabel 1).

Toegepaste methode	*Klas A*	*Klas B*
stap-voor-stap (zie figuur 1)	0	6
geneste vorm (zie figuur 5)	19	8
combivorm (zie figuur 7)	0	4
andere methode	7	7

tabel 1: Verschillende methodes

En de parameters?

Onderdeel c van de opgave richtte zich op de generalisatie door middel van parameters. Gelet op de moeilijkheden die veel leerlingen hadden met het gebruiksschema in concrete gevallen, viel te verwachten dat ook het algemene geval niet vlekkeloos zou worden opgelost. Voor sommige leerlingen zat de angel niet in de parameters, maar in het instrumentatieschema op zich, terwijl voor anderen de parameters een extra complicatie vormden. Twee voorbeelden.
John en Rob hadden geen moeilijkheden met het introduceren van parameters om de vergelijkingen te veralgemeniseren. In hun schriften stond:

$a^2 + o^2 = p^2$
$o + a = s$
$o = s - a$
$a = s - o$

Vervolgens voerden ze op hun machine in:

$$solve(o^2 + a^2 = p^2 \mid o = s - a, o).$$

De verkeerde letter dus op het einde. Het resultaat was:

$$0 = -s^2 + 2 \cdot a \cdot s - 2 \cdot a^2 + p^2.$$

Daarop gingen de jongens dit oplossen naar a:

$$solve(0 = -s^2 + 2 \cdot a \cdot s - 2 \cdot a^2 + p^2, a).$$

Deze keer verklaarde John de keuze voor de a door te zeggen: ‘Je wilt a weten.’

Zo vonden ze de oplossing voor *a* in termen van de parameters *s* en *p*. Bij hun aanpak zijn ze kennelijk niet door de aanwezigheid van parameters in de war gebracht.
Anders was dat bij Sandra. De opgave was ditmaal het bepalen van de afmetingen van een rechthoek met gegeven oppervlakte en omtrek. Via het projectiescherm probeerde ze klassikaal voor te doen hoe het bijbehorende stelsel kan worden opgelost:

$b + h = s$

$b * h = p$

Eerst voerde Sandra in:

solve($b{+}h = s \mid b = s - h, b$).

Dat gaf als resultaat 'true'. Rob riep: 'Ze heeft de *p* niet gebruikt, ze heeft de tweede vergelijking niet gebruikt.'
Sandra veranderde de opdracht in:

solve($b{+}h = 20 \mid b = s - h, h$).

Vóór de generalisatie had *s* namelijk de waarde 20 en kennelijk had ze behoefte om terug te vallen op dit concrete getal. De reactie van de machine luidde $s = 20$. Logisch, maar dat ontging Sandra. Wel merkte ze op dat Rob gelijk had, maar ze voerde $b + h = p$ in in plaats van $b * h = p$:

solve($b{+}h = p \mid b = s - h, h$).

Hierop antwoordde de machine: $s = p$, op zichzelf ook heel redelijk. Uiteindelijk typte Sandra in:

solve($b{+}h = s \mid b = p/h, h$)

en dat gaf het juiste antwoord.

Het gedrag van Sandra wekte de indruk dat de aanwezigheid van de parameters een extra complicatie vormde, want eerder had ze het ISO-schema in concrete gevallen wel goed toegepast.

Discussie

Laten we de ervaringen met het ISO-schema recapituleren in het licht van de theorie over instrumentatie. Omdat in zo'n schema machineprocedures en wiskundige concepties verweven zijn, zetten we die twee naast elkaar.
Eerst het isoleren (zie tabel 2). Duidelijk blijkt dat het toepassen van deze stap een ruimere conceptie vraagt van de begrippen 'oplossen van een vergelijking' en 'oplossing'.
Overigens kozen sommige leerlingen ervoor om de isolatie uit het hoofd te doen, wat in eenvoudige gevallen natuurlijk verstandig is.

Wiskundige concepties	*Machineprocedures*
Isoleren = oplossen	'solve' voor isoleren
Een uitdrukking is een oplossing	
Oplossen kan naar verschillende letters	Een letter is verplicht in de syntax van 'solve'

tabel 2: Concepties en procedures bij Isoleren

De tweede stap, de substitutie, is de lastigste.

Wiskundige concepties	*Machineprocedures*
Formule is een object in plaats van een proces, een entiteit in plaats van een actie	'|' voor substitueren
	Alleen geïsoleerde vormen substitueren
	Niet in dezelfde vergelijking invullen

tabel 3: Concepties en procedures bij Substitueren

In tabel 3 is de verwevenheid tussen conceptie en procedure zo sterk, dat men zich af kan vragen of de tweede en derde cel van de rechter kolom niet beter in de linker passen. Met de opmerking over object en proces doelen we op het feit dat het uitvoeren van een substitutie een mentaal beeld vraagt in de geest van het 'oppakken van een expressie en die in de plaats van de letter zetten', zoals gevisualiseerd in figuur 8.

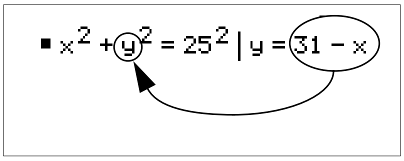


fig. 8 Beeld van een substitutie

Om te begrijpen wat er gebeurt in de regel

$x^2 + y^2 = 25^2 \mid y = 31 - x$

moet een leerling $31 - x$ niet als een taak beschouwen, als de opdracht om 31 met *x* te verminderen, maar als een geheel dat op de plaats van de *y* gezet kan worden, dus als een statisch object in plaats van een actie (zie Sfard, 1991 en Sfard & Linchevski, 1994).
Sommige leerlingen konden wel verwoorden dat alleen een geïsoleerde vorm gesubstitueerd kon worden. Rob schreef bijvoorbeeld in zijn schrift:

solve($o\text{^}2 + a\text{^}2 = 625 \mid o + a = 31, a$).

Docent: *Hoe zit dat met die dikke streep?*
John: *Dan moet je er eentje apart zetten, dan moet je alleen de o of de a apart zetten.*
Rob: *Je mag er maar één letter in verwerken?*
John: *Volgens mij als je een streep hebt dan mag je maar één letter uitleggen. Dus o =*

Een goede conceptie van substitutie kwamen we later in de lessenserie tegen. De leerlingen gebruikten accolades om de machine bundels grafieken te laten tekenen voor verschillende waarden van de parameter. Veel leerlingen hadden moeite met het invoeren van de regels die we voorstelden, zoals $y1 = \{1, 2, 3, 4\} - x$. Een van de leerlingen substitueerde echter de verzameling voor de parameter, en dat is ook precies wat er wiskundig aan de hand is (zie figuur 9).

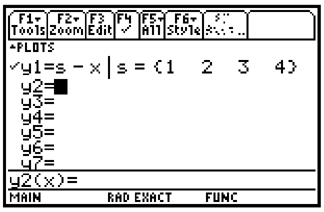


fig. 9 Een andere vorm van substitutie

Ten slotte de laatste stap van het ISO-schema, die van het oplossen (zie tabel 4).

Wiskundige concepties	*Machineprocedures*
In geval van geneste vorm of als er parameters zijn: welke letter speelt welke rol?	'solve' voor oplossen
	Keuze van de juiste letter achter de komma

tabel 4: Concepties en procedures bij Oplossen

De grote moeilijkheid bij het oplossen bestaat uit het onderscheiden van de verschillende rollen van de letters. Dat speelt natuurlijk alleen een rol als er meerdere letters zijn, zoals het geval is wanneer de geneste vorm wordt gebruikt of wanneer er parameters aanwezig zijn.
Bij het gebruik van de geneste vorm zal een leerling die de substitutie echt begrijpt de letterkeuze waarschijnlijk logisch vinden. Een van de leerlingen loste deze moeilijkheid mooi op door een extra paar haakjes te zetten, waarna ze zich nooit meer vergiste in de letter achter de komma: $solve((x^2+y^2 = 25^2 \mid y = 31 - x), x)$.
Ook als er parameters voorkomen, is het van belang dat de leerlingen zich bewust zijn van de verschillende rollen die de letters spelen. Overigens is het generaliseren van een oplossingsmethode een vorm van verticaal mathematiseren, en dat is moeilijk voor veel leerlingen.

Conclusie

Instrumentatie van ICT-gereedschap draait om de verwevenheid van wiskundige concepties en technische machinevaardigheden. In dit artikel hebben we beschreven hoe we dit idee hebben betrokken bij de interpretatie van het gedrag van leerlingen.
Het verwerven van het ISO-schema was voor de meeste leerlingen niet eenvoudig. De wiskundige concepties die een rol spelen, zijn het inzicht in wat een substitutie is en het onderscheid tussen de verschillende rollen van de verschillende letters. Dit laatste speelt met name bij het generaliseren van oplossingen met behulp van parameters. Wij hebben de indruk dat de fouten die leerlingen maken, samenhangen met beperkingen van deze wiskundige concepties.
Vooraf zagen we enkele voordelen aan het uitvoeren van het ISO-schema met de machine en niet met de hand. Ten eerste is de machine-methode natuurlijk ook toepasbaar bij complexere stelsels die met de hand voor leerlingen niet meer te doen zijn. Daarnaast hoopten we dat de leerlingen door het geven van opdrachten aan de machine die ze niet met de hand hoefden uit te voeren, gevoel zouden krijgen voor de wiskundige concepties achter deze bewerkingen. Dat laatste is maar gedeeltelijk uitgekomen; misschien zou een aanpak waarin de leerlingen meer ervaring opdoen met het met de hand uitvoeren van isoleren en substitueren tot een beter resultaat leiden. Anderzijds verklaarden de docenten dat ze bij de behandeling van de *abc*-formule na afloop van het experiment wel konden terugvallen op het substitueren en isoleren zoals de leerlingen dat met de machine hadden gedaan.
In het algemeen gesproken, dienen de ontwikkeling van wiskundige concepties en machine-technische vaardigheden gelijk op te gaan; als de machine-acties die een leerling uitvoert niet vergezeld gaan van een adequaat inzicht, dan liggen problemen op de loer.
Het instrumentatieproces zal in het algemeen begeleiding van de docent vragen. Door expliciet aandacht te besteden aan de machinevaardigheden en tegelijkertijd aan de achterliggende wiskundige begrippen, kan de instrumentatie worden gestimuleerd. Als dit klassikaal gebeurt, bijvoorbeeld door demonstraties door leerlingen en docenten en door het bespreken van verschillende methoden, krijgt het instrumentatieproces een meer sociaal en collectief karakter dan wanneer het zich bij de individuele leerling geacht wordt te voltrekken.

Paul Drijvers, Freudenthal Instituut, Utrecht
Onno van Herwaarden, Wageningen Universiteit, sabbatical op het Freudenthal Instituut

Literatuur

Artigue, M. (1997). Rapports entre dimensions technique et conceptuelle dans l'activité mathématique avec des systèmes de mathématiques symboliques. *Actes de l'université d'été 1996*, 19-40. Rennes: IREM de Rennes.
Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies – Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics 22*, 1-36.
Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification – the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics 26*, 191-228.
Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In: Coxford, A.F. (Ed): *The ideas of algebra, K-12 (1988 Yearbook of the NCTM)*, 8-19. Reston, VA: NCTM.
Wijers, M. (2000). Algebra, een praktijkprobleem? *Nieuwe Wiskrant 19*(3), 36 - 41. ❑