

De Wiskunde A-lympiade is een interessante bron voor praktische opdrachten. In dit artikel beschrijft **Lodewijk van Schalkwijk** hoe de opdracht 'Krasloten' voor dit doel is bewerkt voor 4 VWO en 4 HAVO. Enkele scholen in de regio Nijmegen gingen er mee aan de slag.

Een tweede leven voor krasloten

Inleiding

In de regio Nijmegen werken didactici van de universitaire lerarenopleiding (ILS/KUN) en leraren van diverse scholen samen in het project *Actief en Zelfstandig Leren (AZL)*. Voor een aantal vakken zijn er werkgroepen gevormd die gezamenlijk proberen zich te bekwamen in de nieuwe didactiek van studiehuis en tweede fase. De wiskundegroep heeft zich in eerste instantie gericht op praktische opdrachten, een nieuwe werkvorm waarvan de problemen en mogelijkheden nog lang niet allemaal in beeld zijn gebracht. We hebben geëxperimenteerd met een praktische opdracht gebaseerd op de A-lympiade-opdracht *Krasloten* uit de voorronde van 1997, de eerste keer in 4 VWO, het jaar daarop in 4 HAVO. In dit artikel doen we verslag van onze bevindingen.

Vooraf

In het eerste jaar dat de werkgroep actief was, het schooljaar 1998-1999, hebben we ons gericht op 4 VWO (oude stijl). Al sinds enige jaren was het op het Elzendaalcollege te Boxmeer gebruikelijk rond februari de leerlingen een werkstuk te laten maken. Hierbij konden zij zelf kiezen uit verschillende opdrachten, sommige met een A-karakter, andere meer gericht op wiskunde B. Bij wiskunde A gaat het, in onze ogen, om het samenspel van wiskunde en leefwereld. Wiskunde: wat heb je eraan, wat kun je ermee?

In de normale lessen komt dit vaak niet echt goed uit de verf, hoewel veel opgaven ernaar verwijzen. Leerlingen worden bij de hand genomen, er wordt een kant en klaar model gepresenteerd en vaak resteert voor hen slechts het zoeken naar gegevens in de tekst en het afrondende rekenwerk. Bij een werkstuk of een praktische opdracht heb je de gelegenheid dit samenspel wat nadrukkelijker aan de orde te stellen. Je kiest daarmee dan voor een doel dat in de gewone lessen wel steeds op de achtergrond aanwezig is, maar zelden het volle licht krijgt. De mogelijkheid om hogere onderwijsdoelen zichtbaar te maken voor leerlingen kan een legitimering van projecten, werkstukken of praktische opdrachten zijn.

KRASLOTEN

De Doe Het Zelf zaak DHZ bestaat binnenkort 25 jaar. Om dit jubileum te vieren en daarbij wat extra klanten te trekken heeft de eigenaar de actie *Kras het zelf* bedacht.

Bij besteding van elke f 100,- ontvangt de klant een kraslot met 6 vakjes die opengekrast kunnen worden. Bij besteding van f 195,- ontvangt de klant dus één lot. Koopt de klant voor f 203,- dan ontvangt hij twee loten.

Ieder kraslot bevat drie vakjes met het logo *DHZ*. Deze zijn willekeurig over de zes vakjes verspreid. De andere drie vakjes bevatten een kruis.

Dit zijn de spelregels:

Bij het eerste vakje met het logo *DHZ* wint u f 7,50.

Bij het tweede vakje met het logo *DHZ* wint u het dubbele: f 15,-.

Bij het derde vakje met het logo *DHZ* verdubbelt de prijs weer: f 30,-.

Hebt u een vakje met een kruis opengekrast dan ontvangt u niets.

De ondernemer is bang dat deze actie – zo opgezet – hem (te) veel geld gaat kosten. Hij wil er uiteindelijk niet meer dan 5% van zijn omzet aan kwijt zijn.

fig. 1 *Het kraslotenprobleem*

Het idee voor het onderwerp *Krasloten* komt voort uit een wiskunde A-lympiade-opdracht van enige jaren geleden. Zoals Monica Wijers in 'Krasloten, de voorronde van de A-lympiade' aangeeft, zijn er veel docenten die in A-lympiade-opdrachten mogelijkheden zien voor praktische opdrachten, vanwege het grote aantal vaardigheden dat aan bod komt. De wiskunde erin moet dan wel tevoren behandeld zijn en een duidelijke rol hebben bij het oplossen van het probleem. Figuur 1 bevat de tekst waarmee wij bij de leerlingen het probleem hebben geïntrodu-

ceerd. Deze lijkt sterk op de oorspronkelijke tekst. Alleen is het aantal krasvakjes verminderd van tien tot zes, om de leerlingen rekenwerk te besparen. In een genereuze bui hebben we ook het totale prijzengeld van 2% naar 5% van de omzet gebracht.

Ervaringen in 4 vwo

In de versie van 4 vwo in 1998-1999 kwamen na de inleiding concrete opdrachten, bedoeld om het probleem toegankelijker te maken (zie figuur 2).

OPDRACHTEN

- a. Als er 400 loten moeten worden uitgedeeld, hoe groot schat je dan de omzet?
- b. Hij laat zijn medewerkers 400 loten openkrassen en krijgt het volgende resultaat:
 - op 104 loten valt een prijs van $f 7,50$
 - 28 personen winnen een prijs van $f 15,-$
 - er zijn 10 hoofdprijzen van $f 30,-$.
 Analyseer deze actie.
- c. De ondernemer gaat nu berekenen – weer bij 400 loten – hoeveel deze actie gaat kosten als:
 - iedereen maximaal één keer krast
 - iedereen die één DHZ-logo krast, nog één keer krast
 - iedereen tot het bittere eind doorgaat
 - steeds de helft besluit door te gaan.
 Bereken ook nu in elk van de gevallen hierboven hoeveel de actie gaat kosten en of dit meer dan 5% van de omzet is.
- d. Wat zou jij doen als jij mocht krassen: zo lang mogelijk doorgaan, of . . . ?
Geef een toelichting en/of berekening.
- e. Tot nu toe is er sprake geweest van 3 keer krassen bij 6 vakjes. Stel we krassen 4 keer bij 8 vakjes of 5 keer bij 10 vakjes, met ook hier weer steeds een verdubbeling van de prijs. Is dat voor de winkelier gunstiger of niet? Geef een toelichting en/of berekening.
- f. Bedenk nu een andere (betere, leukere, sensationelere) kraslotenactie voor de ondernemer. De actie moet wel aan de volgende voorwaarden voldoen:
 - hoofdprijs minstens $f 30,-$
 - totale prijzenbedrag niet meer dan 5% van de omzet.
 Laat zien dat jouw ontwerp voldoet aan de eisen van de ondernemer en geef ook aan waarom je denkt dat jouw systeem beter is.

fig. 2 Deelopdrachten 4 vwo

Zoals in het artikel van Wijers (1998) wordt opgemerkt, is door de bedenkers van het kraslotenprobleem aan de formulering bij de A-lympiade veel zorg besteed. Omdat leerlingen weinig kansrekening hebben gehad, moest de

opgave zonder veel formele kennis te maken zijn. Wellicht is de proefactie onder het personeel, die in de originele versie wordt opgevoerd, het concrete resultaat van die zorg. (Onderdeel b in onze uitwerking.) Met die proefactie slaat de ondernemer twee vliegen in één klap: zowel de achterliggende theoretische kansen als de moeilijk te voorspellen beslissing van de klanten om al dan niet door te gaan wanneer ze een logo hebben gekrast, worden in één simulatie samengevoegd. Uitermate slim! Wij hebben nog wat extra deelopdrachten toegevoegd, om enerzijds de wiskunde (statistiek bij het schatten van de omzet en formele kansrekening) en anderzijds het krasgedrag (doorgaan of niet?) afzonderlijk te belichten. Dit leidde tot de opdrachten a, c, d en e. Alleen het koopgedrag (als je toch al voor $f 95,-$ hebt gekocht, dan nog maar wat schroeven erbij om alsnog een lot te krijgen) is dan nog niet in een deelopdracht aangestuurd, de andere belangrijke factoren omzet, kansen en krasgedrag wel. Al met al een tamelijk gesloten opdracht. Pas bij f kregen de leerlingen de ruimte.

Wat maakten de leerlingen ervan? De omzet schatten bij a gaf voor sommige leerlingen al meteen het eerste probleem. De ondergrens van $f 40.000,-$ was snel bepaald, maar wat neem je als schatting voor de bovengrens? Is dat 400 keer $f 199,-$, 400 keer $f 199,95$, of is er helemaal geen bovengrens? Eén groepje (Gijs c.s.) heeft hier heel lang mee geworsteld. In het verslag schrijven ze uiteindelijk, met duidelijke tegenzin:

‘Als er vierhonderd loten zijn uitgedeeld, is de minimale omzet ($400 \times 100 =$) $f 40.000,-$. Dit is dus de minimale omzet, maar waarschijnlijk is de omzet groter, want niet iedereen koopt voor precies honderd (of 200, 300 ...) gulden aan spullen. Je zou bij wijze van spreken ook 1 miljoen keer iets van 1 gulden kunnen verkopen zonder dat er krasloten worden uitgedeeld. Wij verwachten dat de omzet ongeveer $f 70.000,-$ is, maar dit is een gok. Je kunt namelijk niet met zekerheid zeggen wat de omzet is geweest met de gegevens die wij hebben.’

De andere groepjes tilden hier niet zo zwaar aan. Zij gingen uit van de ondergrens: dan zat de winkelier in ieder geval safe.

Onderdeel b was voor de meeste groepjes ook een walk-over. Alleen het groepje van Gijs kwam weer in grote problemen. Eerst berekenen ze dat de winkelier $f 1500,-$ moet uitkeren, hetgeen bij een minimale omzet van $f 40.000,-$ slechts 3,75% is. Maar ze voegen eraan toe:

‘Het verbaasde ons echter wel dat de actie zo verlopen is, want de kans dat er zoveel uitgekeerd moet worden, terwijl er zoveel keren doorgedaan werd, is vrij klein. De mensen die ze opengekrast hebben, hebben dus blijkbaar geluk gehad.’

Die opmerking was midden in de roos. De resultaten die wij bij onderdeel b wat losjes hadden neergeschreven, zijn wel een beetje onwaarschijnlijk. (Overigens lijden de gegevens in de oorspronkelijke A-lympiade-opdracht ook enigszins aan dit euvel.)

Opdracht c levert nauwelijks problemen op. Alle groepjes merken wel op dat je in alle gevallen onder de 5% blijft van de omzet en dat doorkrassen alleen maar gunstig is voor de winkelier. Bij d zeggen alle groepjes dan ook te zullen stoppen als ze de eerste keer prijs hebben, omdat de kans om het prijzengeld te verdubbelen minder dan $\frac{1}{2}$ is.¹

De leerlingen ronden af met een eigen versie van een kraslotenactie, zoals gevraagd. Maar dat ze door de opdracht echt gegrepen werden, nou nee.

Al met al waren we zelf niet tevreden. De leerlingen maakten de deelopdrachten zonder dat ze zich het belang ervan realiseerden. Ze stonden niet stil bij de interne logica van de vragen. Het duidelijkst kwam dit naar voren bij opdracht b. Het geraffineerde ervan (twee vliegen in één klap) ging aan hen voorbij. Je zou kunnen zeggen dat deze vraag een oplossing is gebleven voor een probleem van de bedenkers van de opdracht. De leerlingen echter zaten niet met dat probleem en dus kwam ook de opdracht niet tot zijn recht. Voor de andere vragen geldt in wezen dezelfde kritiek.

Samenvattend kun je stellen dat we in de formulering voor 4 vwo hebben nagelaten om de deelvragen tot de vragen van de leerlingen te maken. Daardoor liepen ze aan de leiband van de leraar, in plaats van hun eigen gedachte spoor te volgen.

Intermezzo

Door dit eerste experiment is voor ons zelf de problematiek van het zelfstandig leren ook meer gaan leven. Over deze problematiek valt in de *Nieuwe Wiskrant* ook al het een en ander te lezen. In 'Wiskunde en Zelfstandig Leren' bijvoorbeeld betoogt Kees Hoogland dat de hele school eraan moet bijdragen om de leerlingen te leren hoe ze steeds beter, bewuster, doelgerichter, efficiënter, minder afhankelijk van anderen de leerstof onder de knie kunnen krijgen. Zelfregulatie is daarbij een belangrijke factor. Die is samen te vatten onder de kopjes oriënteren, plannen, bewaken, zelftoetsing en reflecteren. Regulatie van het leerproces is aanvankelijk de verantwoordelijkheid van de docent; aan het eind van de schooltijd moet de leerling dit zelf kunnen. Om dat te bereiken moet er systematisch en expliciet aandacht aan worden besteed. In 'Praktische opdrachten, tussen droom en daad' leggen Kees Hoogland en Douwe Kok de band met de dagelijkse praktijk. Een praktische opdracht betekent vaak een onderzoekje doen, en dat moet je eerst leren. Leerlingen hebben houvast nodig, zoals bijvoorbeeld een stappenplan. Er lijkt zich ook een ontwikkeling af te tekenen in de begeleiding; veel docenten besluiten tot een actievere rol bij zowel de introductie, de tussentijdse begeleiding, als bij het schrijven van het eindverslag. Bij de tweede ronde van ons kraslotenproject hebben ook wij meer aandacht gegeven aan expliciete regulatie en hebben we gekozen voor een actievere begeleiding door een tussenproduct te vragen.

Ervaringen in 4 HAVO

De praktische opdracht voor 4 HAVO, in het daaropvolgende jaar, vereiste enige aanpassingen in de opdracht. Om te beginnen hebben we de context van de opdracht doorzichtiger gemaakt voor de leerlingen, op een beproefde manier. De leerlingen moeten zich indenken dat ze werkzaam zijn bij een adviesbureau voor het midden- en kleinbedrijf. In die functie krijgen ze te maken met de vraag van de doe-het-zelf-zaak. Van hun baas krijgen ze de opdracht de kwestie te onderzoeken en een goed gedocumenteerd advies uit te brengen, liefst verrijkt met nog wat tips en leuke ideeën. Vervolgens hebben we een opdracht toegevoegd om de leerlingen ertoe te brengen zich op de opdracht te oriënteren (zie figuur 3).

KRASLOTEN

Jullie werken bij een onderzoeksbureau ten behoeve van het MKB (Midden en Klein Bedrijf). De ondernemer van de doe-het-zelf-zaak roept jullie hulp in om te onderzoeken of deze actie niet meer dan 5% van zijn omzet zal kosten. Suggesties voor verbetering van de actie worden eveneens zeer op prijs gesteld.

- Ga na welke aanvullende informatie je van de ondernemer nodig hebt om hem te kunnen helpen.

fig. 3 Oriënteringsopdracht 4 HAVO

We denken dat de deelopdrachten beter op hun plaats vallen wanneer de leerlingen zich zelf al van te voren een voorstelling hebben trachten te maken van het traject waarlangs het onderzoek voert. Hoewel deze oriëntatieopdracht zeker een stap in de goede richting is, zijn we achteraf nog lang niet tevreden over het bereikte resultaat. Het ging erom dat leerlingen zich zouden realiseren dat voor dit probleem, naast de wiskundige aspecten, twee zaken van belang zijn, namelijk als eerste de omzet (in klassen van 100 gulden) en mogelijke veranderingen in de omzet tengevolge van de kraslotenactie; en ten tweede het krasgedrag van de klanten. De leerlingen hebben behalve deze twee echter ook punten genoemd die wij niet zo van belang achten, zoals de productiekosten van de loten, de openingstijden van de winkel, de looptijd van de actie en de kansspelbelasting. Ook hebben ze dingen genoemd die ze zelf kunnen uitrekenen, zoals het aantal krasloten dat de winkelier bij een bepaalde omzet kwijt is en wat de kansen zijn om logo's te krassen. Nadat de antwoorden op vraag a waren ingeleverd, werd de rest van de opdracht uitgedeeld. Wellicht zou een klassikale bespreking van de ingeleverde producten deze oriëntatie pas echt goed hebben laten functioneren.

Na de oriënterende vraag a wordt de opdracht vervolgd met de deelopdrachten b en c (zie figuur 4). De leerlingen krijgen daarbij als aanvullende informatie op papier de

omzetgegevens van normale weken, verdeeld in klassen van 25 gulden. Deze zijn voor elk groepje verschillend. De slimme simulatie van de winkelier, die in de A-lympiadeversie nodig was om de noodzaak tot het bedrijven van formele wiskunde te ontlopen, is nu achterwege gelaten. Deze sluit niet aan bij het te verwachten gedachten-spoor van de leerlingen.

De opdrachten b en c zijn bedoeld om de leerlingen vertrouwd te maken met de verschillende factoren die een rol spelen en het bijbehorende rekenwerk. Het was zeker te overwegen geweest ook deze fase in de praktische opdracht af te sluiten met een deelverslag dat tussentijds wordt ingeleverd.

- b. (Hierbij horen de omzetgegevens.)
- Schat de omzet, uitgaande van de gegevens op de bijlage. Ga ook na hoeveel krasloten er bij deze omzet verstrekt zouden zijn.
 - De omzetgegevens zijn van vóór de kraslotenactie. Denken jullie dat de actie invloed zal hebben op de omzet? Geef een duidelijke toelichting.
- c. Je kent het *krasgedrag* van de klanten niet. Daarom is het moeilijk te berekenen hoeveel deze actie de ondernemer zal gaan kosten. Onderzoek de volgende mogelijkheden, om een idee te krijgen van de invloed van dit krasgedrag:
- iedere klant krasst maximaal één keer
 - iedere klant die één DHZ-logo krasst, krasst nog één keer
 - iedere klant gaat tot het einde door met kras-sen
 - steeds de helft gaat door met kras-sen.

fig. 4 Greep krijgen op de materie

Wanneer de leerlingen voldoende greep hebben op de problematiek en het bijbehorende rekenwerk, kan de computer worden ingeschakeld. We hebben een excel-programmaatje gemaakt, bestaande uit drie rekenbladen. Op het eerste blad staat eenzelfde tabel met omzetgegevens als de leerlingen op papier hebben ontvangen, aangevuld met een kolom om de totale omzet te schatten met de klassenmiddens en een kolom om het aantal verstrekte krasloten te berekenen. De leerlingen kunnen daarmee snel enige aanpassingen in de gegevens aanbrengen, bijvoorbeeld om te verwachten veranderingen in koopgedrag te verwerken. Het berekende aantal krasloten wordt doorgegeven aan rekenblad 2 (zie figuur 5) en de geschatte omzet aan rekenblad 3.

Rekenblad 2 stelt de leerlingen in staat de invloed van het krasgedrag, uitgedrukt in de doorstroomparameters, in een groot aantal concrete gevallen te onderzoeken. Ook kunnen ze experimenteren met de grootte van de eerste, tweede en derde prijs (zie figuur 6).

- d. Experimenteer met het excel-programma KRASLOTEN:
- Controleer de berekeningen die je bij c hebt gemaakt met het computerprogramma.
 - Onderzoek nog een aantal variaties van krasgedrag. Wat is het effect op de hoogte van het totale bedrag aan prijzen?
 - Onderzoek wat er gebeurt als je de grootte van de prijzen verandert. Heeft het krasgedrag dan nog steeds dezelfde invloed op het totale prijzengeld?

fig. 6 De invloed van de parameters

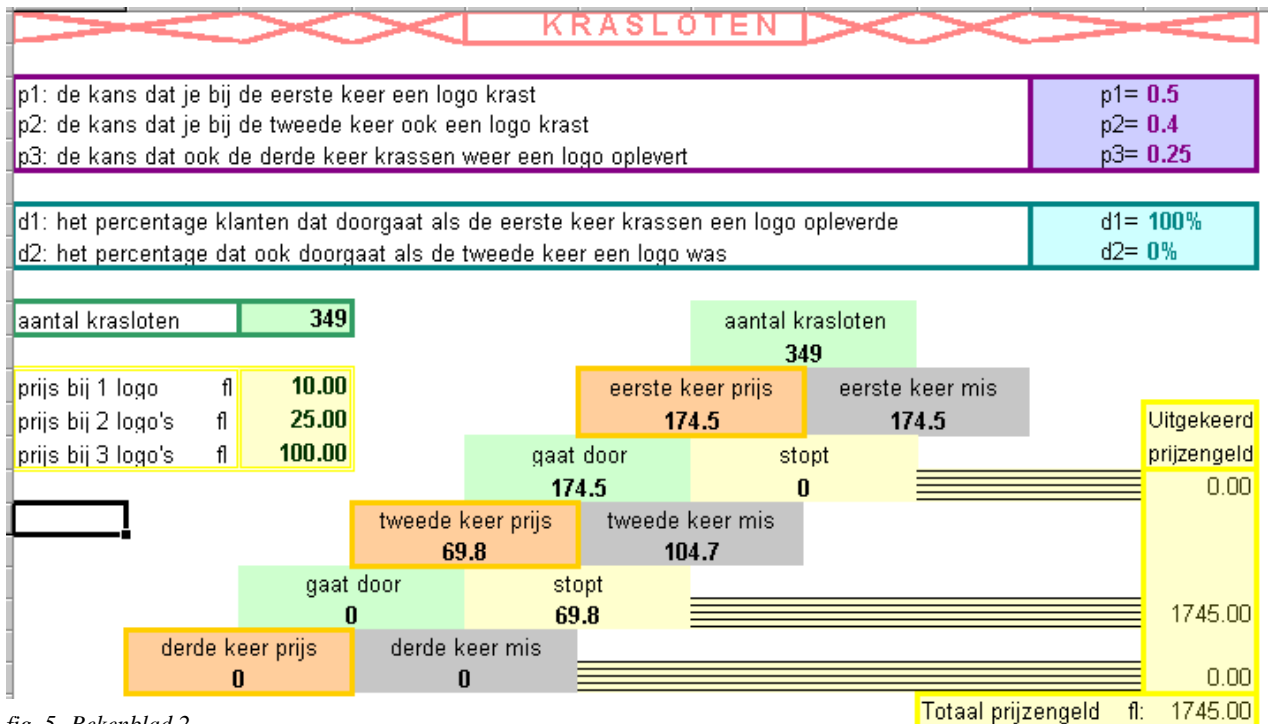


fig. 5 Rekenblad 2

De computer bepaalt steeds het totale bedrag dat de ondernemer naar verwachting kwijt is aan prijzengeld. Dit bedrag wordt doorgegeven naar rekenblad 3, waar wordt berekend hoeveel procent van de omzet aan prijzen wordt uitgekeerd.

Wat gebeurde er in de praktijk? De meeste groepjes zien wel dat bij deze prijzen het gunstig is als zoveel mogelijk mensen doorkrassen. Eén groepje heeft gevonden dat bij de juiste verhouding van de prijzen de invloed van het krasgedrag kan worden geneutraliseerd; zij waren daar apetrots op. In elk geval hebben alle leerlingen een zinvolle toepassing gezien van gebruik van een van de meest verspreide rekenprogramma's. Dat kan nooit kwaad.

De eindopdracht voor de leerlingen is weergegeven in figuur 7. Een duidelijk rapport leren schrijven is een vaardigheid waarvan menige HAVO-leerling veel profijt kan hebben. Op deze manier kunnen de leerlingen laten zien dat ze de voorafgaande opdrachten op een degelijke manier hebben doorgewerkt en bovendien krijgen ze de ruimte om zelf eigen ideeën uit te werken en toe te voegen voor de ondernemer.

- e. Schrijf het eindrapport voor de ondernemer. Geef antwoord op de vraag hoe groot de kosten van de actie volgens jullie schatting zullen zijn. Onderbouw deze schatting met de resultaten van de onderzoekjes bij de opdrachten b, c en d. Doe ook een voorstel om de actie attractiever te maken. Toon met argumenten en/of berekeningen aan dat je hierbij ook binnen de grens van 5% blijft.

fig. 7 Het eindrapport

Tot slot

De A-lympiade-opdracht *Krasloten* is naar onze mening goed bruikbaar als context voor een praktische opdracht. Het kost echter wel enige inspanning om de opdracht naar je hand te zetten, zeker als pas tijdens dit proces duidelijk wordt wat je eigenlijk met zo'n praktische opdracht wilt bereiken. Een goede, voor de leerlingen heldere structuur is noodzakelijk. Misschien zijn we ook wel een

beetje op het verkeerde been gezet door het wijdverspreide idee dat de leerlingen vooral zelfstandig moeten werken. We zijn er nu nog vaster van overtuigd dat juist klas-sikale activiteiten op de goede momenten zo'n opdracht veel efficiënter kunnen maken en aanzienlijk kunnen bijdragen tot het leereffect.

Volgend jaar gaan we met dit groepje docenten werken aan een opdracht voor 5 VWO: meetkunde op de aardbol. Als je zin hebt om mee te doen aan het ontwerpen, schaven en testen in de praktijk van praktische opdrachten, met het doel niet alleen goed lesmateriaal te ontwikkelen, maar ook om te doorzien hoe het functioneert en waarom het werkt, dan kun je met mij via e-mail contact opnemen. De tekst van de opdracht *Krasloten* en het bijbehorende excel-programmaatje zijn te downloaden vanaf de website van de *Nieuwe Wiskrant* (www.fi.uu.nl/wiskrant) en bovendien verkrijgbaar bij de auteur.

Lodewijk van Schalkwijk, ILS/KUN, Nijmegen

E-mail: L.vanSchalkwijk@ils.kun.nl

De wiskundewerkgroep van het AZL-project bestond in het schooljaar 1999-2000 uit Herman Alink, Dolf van den Hombergh en Frans Verstraelen van het Elzendaalcollege, Mark van den Aarssen van het Lindenholtcollege en Lodewijk van Schalkwijk van ILS/KUN.

Noot

[1] Overigens ben ik zelf de mening toegedaan dat kansrekening alleen werkt bij grote aantallen. Het is dus wel een instrument voor de winkelier, maar niet voor individuele klanten. Die kunnen beter op hun gevoel afgaan.

Literatuur

- Hoogland, K. (1995). Wiskunde en Zelfstandig Leren. *Nieuwe Wiskrant*, 15(2), 10-14.
- Wijers, M. (1998). Krasloten, de voorronde van de A-lympiade. *Nieuwe Wiskrant*, 17(3), 34-36.
- Kok, D. & K. Hoogland (1998). Praktische opdrachten, tussen droom en daad. *Nieuwe Wiskrant*, 17(4), 4-10.