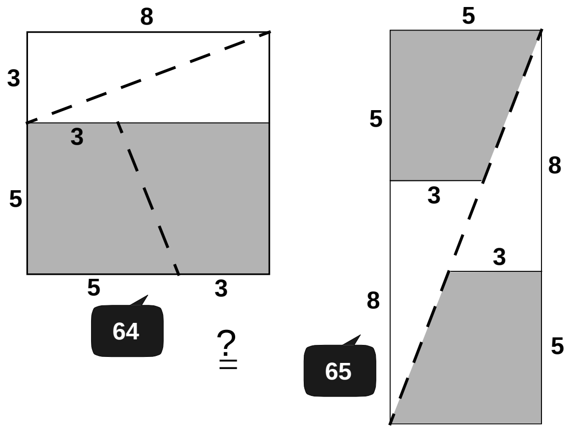
Wat te bewijzen is

Rubriek

Wat niet te bewijzen is

Een bekend grapje, ingegeven door een eigenschap van de rij van Fibonacci, is het drogbewijs dat 64 = 65.



Het bedrog zit hem hierin dat de ‘diagonaal’ in de tweede rechthoek geen lijnstuk is, maar een hyperslank parallellogram. Vleien we die tweede rechthoek met zijn linker- en onderzijde tegen *y*- en *x*-as, dan krijgen de vier punten op de ‘diagonaal’ de coördinaten (0, 0), (2, 5), (3, 8) en (5, 13). De verbindingslijnen van (0, 0) met de overige drie hebben dan respectievelijk de hellingscoëfficiënt: $2\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$, $2\frac{3}{5}$, waarmee de ballon is doorgeprikt.

Oppervlakteformule

Hoe zie je aan de coördinaten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) van de punten P_1 en P_2 of ze wél of niet met O op één lijn liggen? Er zijn twee mogelijkheden voor wél:

$$\text{(i) } x_1 = x_2 = 0 \text{ en (ii) } \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

Beide gevallen laten zich onder hetzelfde hoedje vangen:

$$x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

Het linkerlid van deze vergelijking noem ik nu verder

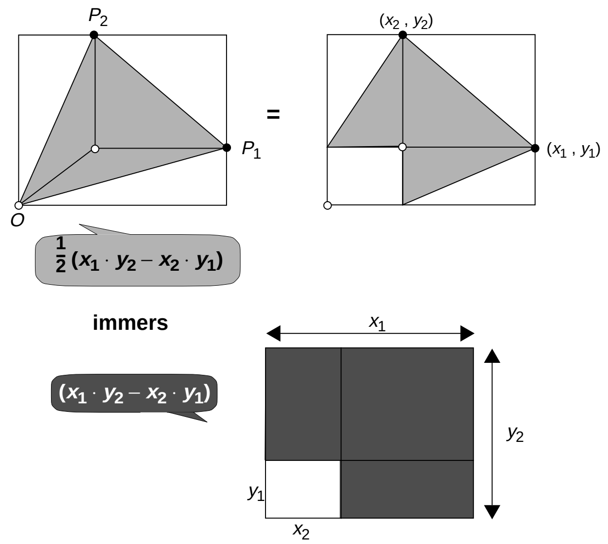
$$f(P_1, P_2)$$

Als $f(P_1, P_2) \neq 0$ zijn P_1, P_2 en O niet collineair, dat is helder. Vertelt de waarde van $f(P_1, P_2)$ nog meer dan het wél of niet op één lijn liggen van de drie punten?
Op grond van continuïteitsoverwegingen is te verwachten dat hoe verder die waarde van nul af ligt, hoe ‘minder collineair’ die drie zijn. Voor drie ‘bijna-collineaire’ punten P_1, P_2 en O zal de oppervlakte van driehoek OP_1P_2 relatief klein zijn en daarom lijkt het niet al te boud om te veronderstellen dat $f(P_1, P_2)$ iets met de oppervlakte van driehoek OP_1P_2 van doen heeft.
Terugkeer naar het drogbewijs versterkt dit vermoeden.

Immers, voor $P_1 = (2, 5)$, $P_2 = (3, 8)$ geldt $f(P_1, P_2) = 1$, juist de oppervlakte van het weggemoffelde parallellogram en tweemaal de oppervlakte van OP_1P_2.
Hypothese: voor ieder tweetal punten P_1, P_2 geldt:

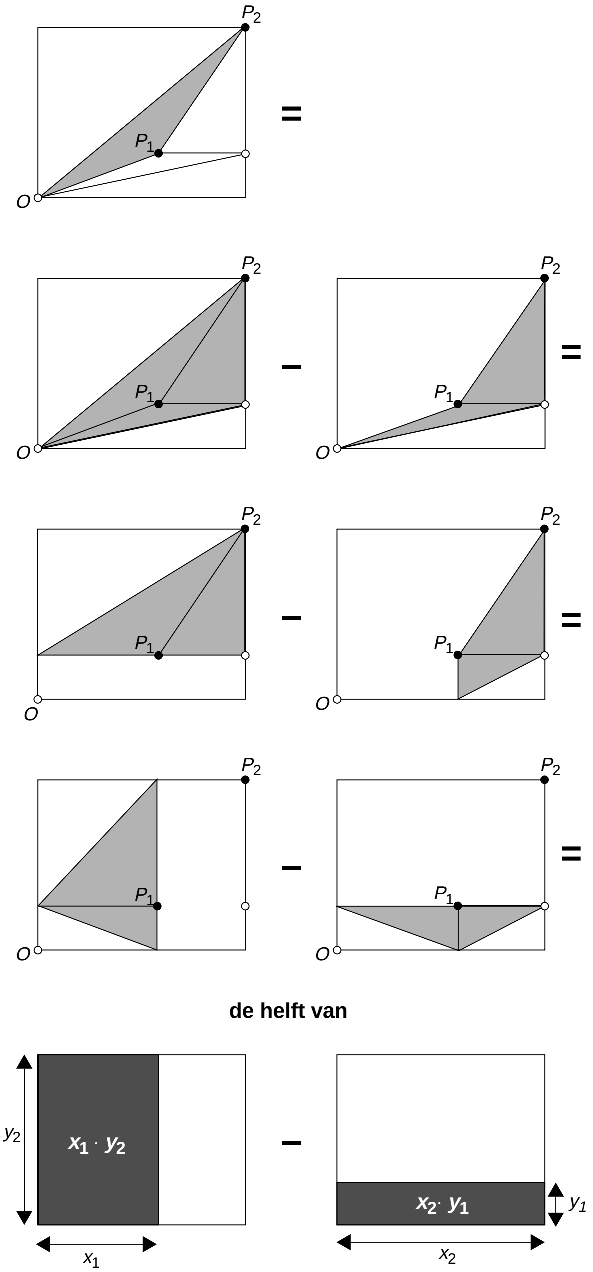
$$f(P_1, P_2) = 2 \times \text{opp. } OP_1P_2$$

Omdat direct duidelijk is dat verwisseling van P_1 en P_2 de waarde van *f* in zijn tegengestelde verandert, wil ik het begrip oppervlakte hier wat verfijnen. Niet ongebruikelijk is het om de oppervlakte van *ABC* positief (negatief) te rekenen als de omlooprichting $A \to B \to C$ tegen de klok in (met de klok mee) is. Met deze afspraak is zo het begrip *georiënteerde oppervlakte* vastgelegd*;* daarover gaat het in de rest van dit verhaal.
Terug naar de hypothese. In het geval dat een van de zijden van driehoek OP_1P_2 verticaal of horizontaal is, kan gemakkelijk worden nagegaan dat de hypothese klopt.
Nu een meer algemene situatie:



Dit is wél een correct plaatjesbewijs: iedere stap kan volledig worden gemotiveerd!
In de eerste stap is het ‘afschuifprincipe’ gebruikt (de oppervlakte van een driehoek verandert niet als een hoekpunt evenwijdig aan de overstaande zijde wordt verplaatst). Bij de conclusie telt het inzicht dat de oppervlakte van het lichtgrijze gebied rechts precies de helft is van de donkergrijze ‘L-kamer’.
Natuurlijk kun je ook in het uitgangsplaatje de drie witte driehoeken aftrekken van de rechthoekige omheining en via wat algebra uitkomen op de gewenste formule (mooie algebra-oefening voor zeg klas 3 HAVO/VWO!). Maar de aanschouwelijke demonstratie geeft meer kick.
Bovenstaand bewijs heeft alleen geldigheid voor het geval P_1 en P_2 in het eerste kwadrant liggen en de helling

van P_1P_2 negatief is. Er valt nog meer te onderzoeken, zelfs als ik in het eerste kwadrant blijf. Voor een positieve helling van P_1P_2 verloopt het plaatjesbewijs moeizamer, maar het vorige zet mij op het goede spoor:



'Dan maar liever algebra', zal menig lezer denken. Ook goed, maar de uitdaging was juist om dit te vermijden.

Dit was slechts het eerste kwadrant. De rest valt overigens mee. Als de punten P_1, P_2 in hetzelfde kwadrant liggen, kan via spiegeling de zaak terug worden gebracht tot een van beide situaties die hier zijn bekeken.
Als de punten P_1 en P_2 niet in hetzelfde kwadrant liggen, kan via een afschuiving van het type:

$$(x_1,y_1) \to (x_1 + t \cdot x_2\,,\, y_1 + t \cdot y_2)$$

worden bereikt dat ze in hetzelfde kwadrant komen.

Dat noch de georiënteerde oppervlakte van OP_1P_2 , noch de waarde van $f(P_1, P_2)$ bij zo'n transformatie verandert, wordt snel duidelijk. De hypothese is oké!

Formule cadeau
De oppervlakteformule pas ik toe in het geval P_1 en P_2 op de eenheidscirkel liggen, en respectievelijk de coördinaten $(\cos\beta\,,\,\sin\beta)$ en $(\cos\alpha\,,\,\sin\alpha)$ bezitten.
De georiënteerde oppervlakte van driehoek OP_1P_2 is nu enerzijds:

$$\tfrac{1}{2}(\cos\beta \cdot \sin\alpha - \cos\alpha \cdot \sin\beta)$$

en anderzijds:

$$\tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

waarmee we een bekende gonioformule op de koop toe krijgen.

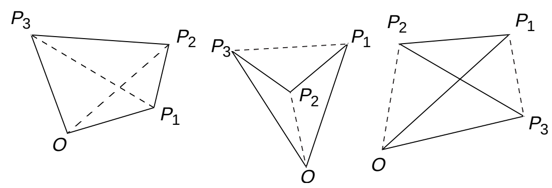
Determinant
Hoe wordt de georiënteerde oppervlakte van een driehoek $P_1P_2P_3$ (notatie $[P_1P_2P_3]$) uitgedrukt in de coördinaten van de hoekpunten? Pas een translatie toe waarbij P_3 naar O gaat:

$$\begin{aligned} &2 \times [P_1P_2P_3] = \\ &(x_1 - x_3)\cdot(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)\cdot(y_1 - y_3) \;= \\ &(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_2y_3 - x_3y_2) \end{aligned}$$

De laatste vorm betekent ook:

$$2 \times ([OP_1P_2] + [\,OP_2P_3] + [OP_3\,P_1])$$

en dat moet ook meetkundig te zien zijn.



In het geval de vier punten O, P_1, P_2, P_3 een echte vierhoek vormen (dus er zijn geen drie collineaire punten bij), kunnen we drie gevallen onderscheiden: twee diagonalen liggen binnen de vierhoek $OP_1P_2P_3$ ('convexe vierhoek'), één diagonaal ligt binnen en de andere buiten ('pijlvierhoek') en twee diagonalen liggen buiten ('zandlopervierhoek'). Rekening houdend met de oriëntatie blijkt inderdaad dat steeds:

$$[P_1P_2P_3] = [OP_1P_2] + [OP_2P_3] + [OP_3\,P_1]$$

Bij collineariteit van drie of alle vier de punten, klopt dit ook. Ten slotte de opmerking dat de gevonden formule doorgaans in een elegante vorm wordt gegoten:

$$2 \times [P_1P_2P_3] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl