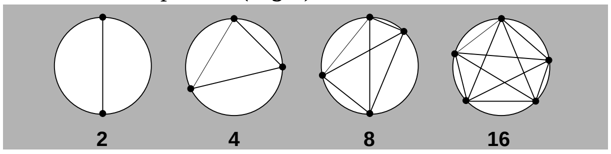
Wat te bewijzen is

Rubriek

Onvolledige inductie

Het maken van formules bij meetkundige patronen is een activiteit die in het vaandel van het algebraprogramma 12-16 staat geschreven. Een van de methoden om een formule te vinden, is: begin onderop, maak een tabel, speur naar een wetmatigheid en - als je die vindt - generaliseer.
Zo'n inductief proces heeft zijn gevaren. Een bekend waarschuwingsvoorbeeld is het volgende:
Neem een aantal punten op een cirkel en teken alle verbindingskoorden; het aantal gebieden waarin de cirkelschijf door de koorden wordt verdeeld hangt uiteraard af van het aantal punten (zeg n); onderzoek dit verband.



Het plaatje toont de situatie voor $n = 2, 3, 4, 5$. Het is heel verleidelijk om te denken dat het (maximale) aantal gebieden steeds een macht van 2 zal zijn. In formule:

$$G_n = 2^{n-1}$$

Voor $n = 1$ klopt deze formule ook nog, want bij één punt op de omtrek zijn er nul koorden en dus één gebied.
Echter bij $n = 6$ kun je niet meer dan 31 gebieden krijgen. Eerst geloof je dat niet, maar handmatige hertelling levert geen nieuw resultaat. Als je de moed hebt nog een stapje verder te gaan, vind je voor $n = 7$ het aantal van 57 gebieden. Het gevaar van *onvolledige* inductie is blootgelegd.
Didactisch gezien is dit een krachtig voorbeeld en het is aldus te vinden in het klassieke *Guidelines for Teaching Mathematics* van Johnson en Rising. De vraag is natuurlijk of er wél een redelijk mooie formule voor G_n bestaat.
Bij het bestuderen van patronen in rijen wordt - niet zelden met succes - gelet op de rij van differenties, eventueel daar weer de differenties van, enzovoort. Hier komt er:

1 2 4 8 16 31 57
1 2 4 8 15 26
1 2 4 7 11
1 2 3 4

De differenties van de derde orde vormen een veelbelovend begin; als de schijn nu niet bedriegt, zou de formule voor G_n een vierdegraadspolynoom moeten zijn.
Dit vierdegraadspolynoom kan met behulp van de getelde beginwaarden van de rij $\{G_n\}$ worden berekend:

$$\tfrac{1}{24}n^4 - \tfrac{1}{4}n^3 + \tfrac{23}{24}n^2 - \tfrac{3}{4}n + 1$$

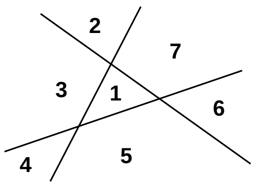
Stop de formule in de GR en lees de bijbehorende tabel; de eerste zeven waarden kloppen. Bij $n = 8$ geeft de formule 99 gebieden. Het natellen daarvan, kan ik u niet aanraden, maar het is correct. Soms geeft een formule een idee in welke richting je een inzichtelijke afleiding (met bewijs) moet zoeken, maar in dit geval lijken er weinig aanknopingspunten. Of het zou die 24 (= 4!) moeten zijn. Misschien bereiken we iets met combinatoriek? Trouwens, wie zegt dat we nu wel op een goed spoor zitten?

Volledige inductie

De lezer is misschien al lang en breed voor zichzelf begonnen en heeft wellicht gedacht: typisch iets voor *volledige* inductie. De stap van n naar $n+1$ laat zich hier echter niet zo licht vertalen in algebra als bij sommige andere verdelingsproblemen.
De eenvoudigste verdeelsituatie die ik me kan voorstellen is de partitie van een lijn of lijnstuk:

n deelpunten leveren $n + 1$ *delen*

De stelling klopt voor $n = 0$, en omdat toevoeging van één deelpunt ook toevoeging van één deel betekent, is de inductie compleet.
Nu één dimensie erbij: de verdeling van het vlak in zones door middel van rechte lijnen.
Bij 0 lijnen is er 1 zone (het gehele vlak), bij 1 lijn zijn er 2 zones (halfvlakken), bij 2 (snijdende) lijnen horen 4 zones, ... Even doemt het beeld 1, 2, 4, 8, ... op, maar de droom wordt onmiddellijk verstoord door dit plaatje:



Stel Z_n is het aantal zones bij n lijnen. Het plaatje zegt dat $Z_3 = 7$. Hoe zit het nu met Z_4?
Toevoeging van één lijn levert maximaal 7 + 4 = 11 zones. Immers: als de nieuwe lijn - zeg l_4 - de eerste drie snijdt (in nieuwe snijpunten!), zijn er vier lijndelen op l_4 en die verdelen elk een zone in twee stukken.
Zo geldt algemeen (voor $n = 0, 1, 2, ...$):

$$Z_{n+1} = Z_n + n + 1$$

ofwel:

$$\Delta Z_n = n + 1$$

Met als gevolg:

$$Z_n - Z_0 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

en dus:

$$Z_n = 1 + \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

Desgewenst kan de inductieliefhebber hier zijn hart volledig ophalen: de formule is juist voor $n = 0$ en het bewijs van de stap $n \rightarrow n+1$ gaat dan zo:

$$1 + \tfrac{1}{2}n(n+1) + (n+1) \; = \; 1 + (\tfrac{1}{2}n + 1)(n+1)$$
$$= \; 1 + \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

Er is nog een heel andere weg naar bovengenoemde uitkomst. Daarbij gebruik ik de formule van Euler:

$$H - R + Z \; = \; 1$$

waarbij Z, R en H achtereenvolgens het aantal zones, het aantal ‘rand’-stukken en het aantal ‘hoek’-punten bij een zoneverdeling van het vlak voorstellen.
Bij n lijnen in het vlak met het maximale aantal onderlinge snijpunten, geldt:

$$H \; = \; \binom{n}{2} \quad \text{en} \quad R \; = \; n + \binom{n}{2} \cdot 2$$

De tweede betrekking eist een verklaring. Stel dat er op één lijn k hoekpunten van de zoneverdeling liggen, dan kunnen we die laten corresponderen met k verschillende randstukken langs die lijn; er rest dan op die lijn één randstuk. Op de n lijnen komen er in totaal n rest-randstukken. Omdat elk van de hoekpunten op precies twee lijnen ligt, is er sprake van een ‘1-2-duidige’ correspondentie tussen de hoekpunten en alle overige randstukken.
Invullen in de formule van Euler geeft:

$$\binom{n}{2} - n - 2\binom{n}{2} + Z_n \; = \; 1$$

ofwel: $$Z_n \; = \; 1 + n + \binom{n}{2}$$

en dat is equivalent de formule die we eerder zagen. De laatste vorm kan ik ook zó schrijven:

$$Z_n \; = \; \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$$

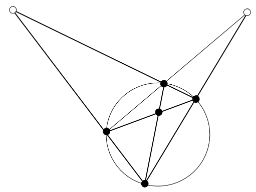
Dit klopt ook voor $n = 0$ of 1, want $\binom{n}{k} = 0$ voor $k > n$.

Terug naar het eerste probleem

Het maximale aantal gebieden (zones) G_n waarin de cirkelschijf door alle verbindingskoorden van n punten op de omtrek wordt verdeeld, luistert naar eenzelfde type formule, zoals ik in het boek ‘Aventuras Matemáticas’ (van Miguel de Guzmán) vond:

$$G_n \; = \; \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

Inderdaad is dit een vierdegraadspolynoom. Uitwerking (hier wordt een symbolische rekenmachine hulpvaardig) levert inderdaad het polynoom van de vorige bladzijde op. Maar nu het bewijs. Daarvoor haal ik opnieuw de formule van Euler van stal.
Eerst maar eens kijken hoe het zit met de waarde van H. Om te beginnen zijn er n hoekpunten op de cirkelomtrek. Hierbij moeten de snijpunten (van koorden) die binnen de cirkel liggen worden opgeteld. Wel: elk van die snijpunten wordt bepaald door één viertal punten op de cirkel. Vier punten hebben zes verbindingslijnen. Er zijn drie snijpunten van ‘overstaande’ verbindingen; twee daarvan liggen buiten, eentje ligt binnen de cirkel.



Uit n punten kunnen $\binom{n}{4}$ viertallen worden gevormd en zoveel hoekpunten zijn er dus binnen de cirkel. Gevolg:

$$H \; = \; n + \binom{n}{4}$$

Voor het bepalen van R kunnen we bijna net zo redeneren als bij de zone-verdeling in het vlak. Dat levert op:

$$R \; = \; \binom{n}{2} + \binom{n}{4} \cdot 2 + n$$

Er is immers sprake van $\binom{n}{2}$ lijnen en een totaal van $\binom{n}{4}$ deelpunten op die lijnen.

Dat geeft $\binom{n}{2} + \binom{n}{4} \cdot 2$ randstukken.

Daarbij moet echter nog de n cirkelbogen (voortgebracht door de n punten) worden opgeteld!
Zo komt er ten slotte:

$$n + \binom{n}{4} - \binom{n}{2} - 2\binom{n}{4} - n + G_n \; = \; 1$$

ofwel:

$$G_n \; = \; 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

waarmee het gestelde bewezen is.
De gevonden uitdrukking in n laat zich ook schrijven als som van opvolgende binomiaalcoëfficiënten:

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4}$$

Dit verklaart nu waarom de rij machten van 2 aanvankelijk zo’n goede optie leek! De rijen in de driehoek van Pascal hebben als som steeds een macht van 2 en tot en met $n = 5$ staat hierboven de som van zo’n complete rij.

1	←	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
2	←	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
4	←	**1**	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
8	←	**1**	**3**	**3**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
16	←	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**	**0**	**0**	**0**
31	←	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**	**0**	**0**
57	←	**1**	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**	**0**
99	←	**1**	**7**	**21**	**35**	**35**	**21**	**7**	**1**

Tot slot een onderzoekje voor de lezer: door 0, 1, 2 en 3 vlakken wordt de ruimte respectievelijk in (maximaal) 1, 2, 4 en 8 ruimtezones verdeeld. Hoe gaat dit verder?

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl