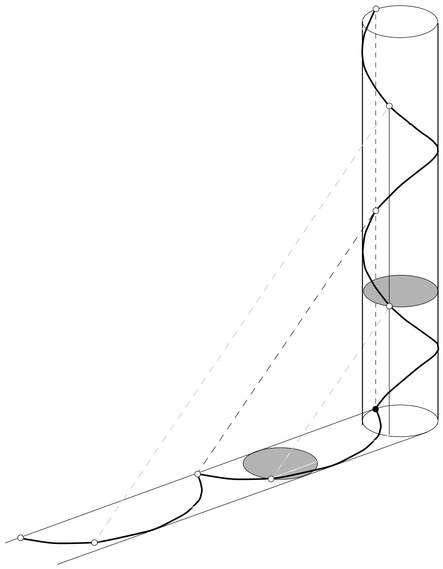
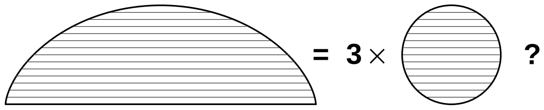
Wat te bewijzen is

Rubriek

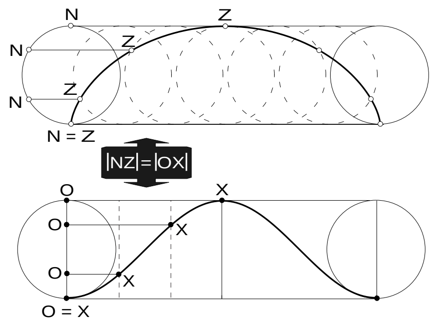
In zijn spectaculaire slotlezing op de afgelopen NWD stipte Claudi Alsina aan dat er een verband bestaat tussen de schroeflijn (helix) en de cycloïde. Bij parallelprojectie onder geschikte hoek (gelijk aan de 'spoedhoek' van de helix) is de laatste het beeld van de eerste.



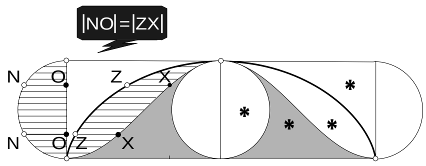
Kinematica is hier de sleutel tot inzicht. De schroefbeweging (op een rechte cilinder) is een combinatie van een horizontale eenparige cirkelbeweging en een eenparige rechtlijnige beweging in verticale richting. Voor het gemak stel ik de snelheid van beide bewegingen gelijk; de spoedhoek van de schroeflijn is dan 45°.
De scheve projectie op een horizontaal vlak van die beweging is dan een combinatie van een horizontale cirkelbeweging en een horizontale rechtlijnige beweging. Als de projecterende stralen nu een hoek van 45° met de cilinderas maken, zijn ook de snelheden van deze schaduwbewegingen gelijk aan elkaar en zo ontstaat een cycloïde. Deze relatie tussen helix en cycloïde is niet erg bekend[1].
Wél heel bekend is dat de loodrechte projectie van de schroeflijn op een vlak door de cilinder-as een sinusoïde is (het zijaanzicht van een wenteltrap!). Combinatie van die twee feiten geeft een verrassend bewijs van een meetkundige eigenschap van de cycloïde. De Fransman Roberval toonde in 1634 aan dat de oppervlakte onder één boog van de cycloïde precies *drie* keer de oppervlakte van de rollende cirkel is. Tegenwoordig is dat een leuke oefening in integraalrekening, maar die was toen nog niet uitgevonden en je moest als wiskundige behoorlijk creatief zijn om die eigenschap hard te maken. Beroemdheden als Mersenne en Galileï kwamen er niet uit en dat zegt veel.
Roberval paste het principe van Cavalieri toe om oppervlakten van gebieden, begrensd door gebogen krommen, te vergelijken. Dat lukt niet rechtstreeks voor cirkelschijf en cycloïdeschijf, maar wel via een slimme omweg.



De spitsvondige route van Roberval bestond hieruit dat hij bij de cycloïde een 'compagnon-curve' construeerde. Zijn zuiver planimetrische benadering vervang ik nu door ruimtelijk inzicht. Bekijk hieronder de figuur met cycloïde en rollende cirkel. Die kan worden opgevat als de projectiefiguur van een cilinder met daarop (één periode van) een schroeflijn. Draai de bladzij een kwartslag en je 'ziet' cilinder en schroeflijn in verticale stand! In het tweede deel van de figuur zie je de sinusoïde als zijaanzicht van de schroeflijn. Laat Z de schroeflijn doorlopen en zijn projectie X loopt mee over de sinusoïde.



Omdat Z en X steeds even 'hoog' liggen en O de projectie is van N, geldt: $|NZ| = |OX|$ en dus: $|NO| = |ZX|$.
Bekijk nu cycloïde en 'compagnon' tezamen:



Uit het voorgaande en het Cavalieri-principe volgt dat de gearceerde gebieden dezelfde oppervlakte hebben. Stel r is de straal van de cirkel. De basis van de rechthoek (hoogte van de cilinder) is dan gelijk aan $2\pi r$. De oppervlakte van de rechthoek is dus 4 keer de oppervlakte van de cirkel en bovendien 2 keer de oppervlakte onder de sinusoïde. De sterretjes spreken nu boekdelen.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl

[1] In Aad Goddijn's puzzelrubriek (*NW 12*(4), 1993, p. 60, opgave 105) werd naar deze relatie gevraagd.