Een formule opstellen voor het aantal stippen in een regelmatige rij van figuren. Als hulpmiddel hiervoor is het applet Stippel Algebra ontwikkeld. **Sonia Palha** en **Martin van Reeuwijk** experimenteerden met het applet in de klas. Zij vroegen zich af of Stippel Algebra een meerwaarde bood bij het onderzoeken van verbanden.

Zie je het verband?

Herken het patroon

Hiernaast zie je twee rijen van figuren waarvan de eerste figuur (n=1) ontbreekt. Open het applet *Stippel Algebra*, en teken de figuren die hiernaast staan.

a. Teken ook de vierde (n=4) en de eerste (n=1) figuur voor deze twee rijen.

b. Geef een expressie met n voor de twee rijen van figuren hiernaast.

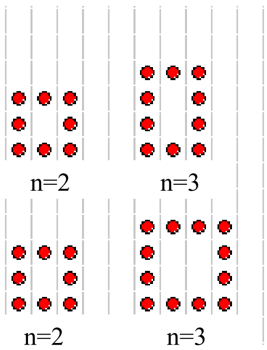


fig. 1 Voorbeeld 1: Herken het patroon

Majori was een van de leerlingen die met het WisWeb-applet *Stippel algebra* aan deze opdracht had gewerkt. Hieronder staan haar antwoorden op de vragen a en b.

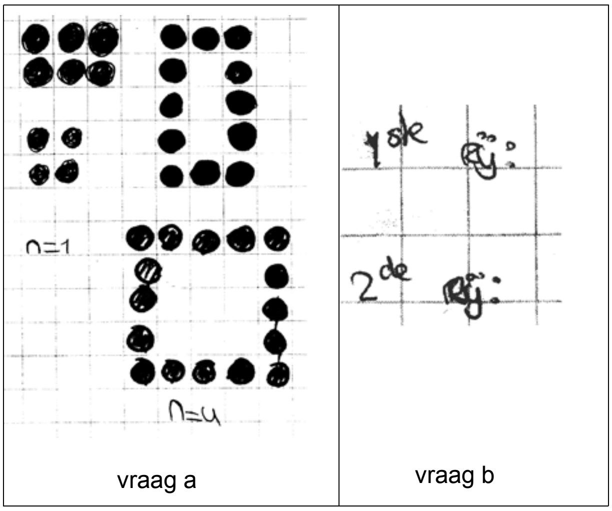


fig. 2 Majori's antwoord op de vragen a en b

Een patroon beschrijven met woorden, ontbrekende figuren tekenen of zelf een regelmatig patroon maken wordt in het algemeen door de meeste leerlingen goed en enthousiast gedaan. Majori's antwoord op vraag a is daar heel typerend voor. Leerlingen tekenen de volgende of vorige figuur moeiteloos en de meerderheid van de leerlingen kan vragen beantwoorden als: 'hoeveel stippen heeft de tiende figuur?' en 'is er een figuur met 123 stippen?'

Wanneer er naar een expressie wordt gevraagd zoals in vraag b, dan hebben de leerlingen daar meer moeite mee. Majori geeft niet eens antwoord op die vraag. Een 'leeg' antwoord kan van alles betekenen: begrijpt de leerling de vraag niet? Is zij naar het verband tussen de figuren aan het kijken? Of zit zij naar het verband tussen het figuurnummer en de figuur te kijken? Weet zij het antwoord, maar kan zij het niet in formele taal opschrijven?

Wat precies de moeilijkheid is voor Majori en andere leerlingen is moeilijk in te schatten. Maar als je met de leerling wilt communiceren is het van belang dat je een idee hebt van de manier waarop hij of zij redeneert.

Verbanden in stippenfiguren

Dit artikel verhaalt over een wiskundeles waarin de leerlingen bezig zijn met het beschrijven van *verbanden* in de context van rijen van stippenfiguren. We doen verslag van de ervaringen in een eerste klas en daarbij richten we ons op de volgende vragen:

- Hoe kijken leerlingen naar rijen van stippenfiguren?
- Wat is de meerwaarde van het applet *Stippel algebra* bij het leren van wiskunde en hoe kan het gebruikt worden om leerlingen te stimuleren tot wiskundige activiteiten?

Het idee om getallen voor te stellen door stippenpatronen is al heel oud en komt uit de school van Pythagoras. Tweeduizend jaar later is dit wiskundige onderwerp weer tot leven gebracht door bijvoorbeeld Martin Kindt en anderen in modules voor de Amerikaanse methode *Mathematics in Context* [1].

Een aantal WisWeb-applets (www.wisweb.nl) is op deze modules geïnspireerd en in het WisWeb-project (Van Reeuwijk, 2001, 2002) is lesmateriaal ontwikkeld rond de applets. Het applet *Stippel algebra* is een van die applets die uitgebreid in de klas (zowel in de eerste en tweede als in 4 VWO) gebruikt zijn.

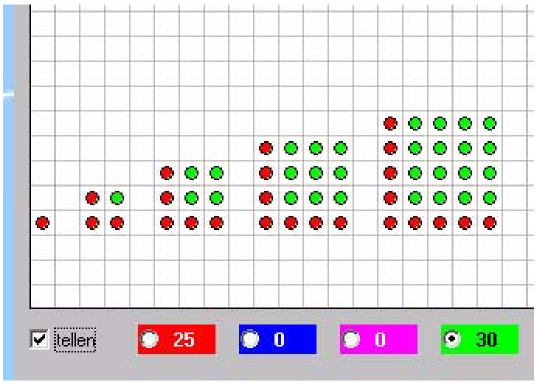


fig. 3 Het applet 'Stippel algebra'

Met het applet kunnen stippelpatronen worden getekend met stippen van verschillende kleuren. Het aantal stippen (per kleur) kan door het applet worden geteld (in het voorbeeld hierboven 25 zwarte en 30 grijze).

Applets in de les

In klas 1E van het Herman Jordan Lyceum, een Montessori school te Zeist, is in het schooljaar 2001-2002 met de applets *Bollen schieten*, *Profielen draaien*, *Aanzichten raden*, *Grafieken*, *Algebra pijlen* en *Stroken* in de les gewerkt. De ervaringen met deze applets waren positief: ze sloten goed aan bij de leerstof die in de les was behandeld en de leerlingen waren goed bezig (sommigen meer dan anderen, maar iedereen deed wiskunde op zijn eigen niveau).
Bovenstaande applets werden als aanvulling bij bestaande hoofdstukken uit het boek gebruikt. In het voorjaar van 2002 werd een stap verdergegaan. Toen is lesmateriaal ontwikkeld rond applets waarmee een heel hoofdstuk is vervangen: hoofdstuk 12 uit *Moderne Wiskunde 1hv, deel 1b, 7e editie*, dat gaat over verbanden. Het lesmateriaal is georganiseerd rond drie hoofdthema's: grafieken en (dubbel)tabellen, getalpatronen en (lineaire) verbanden vergelijken. Die drie thema's zijn gekoppeld aan de applets: *Grafieken*, *Stippel algebra* en *Algebra pijlen*. Deze drie thema's en de applets bieden verschillende situaties en contexten waarin verbanden kunnen worden bestudeerd.
Gedurende twee weken hebben tien van de 24 leerlingen uit klas 1E gewerkt met werkbladen, waarbij ze gebruik konden maken van de computer. Niet voor alle opgaven was de computer nodig.
Omdat de leerlingen het heel prettig vinden om zelfstandig te werken, is afgesproken dat ze zelf aan de slag konden gaan. Verder werden klassikale momenten afgesproken waar het verrichte werk samen werd besproken.
Uitgebreide beschrijvingen van de ervaringen in de lessen en ook het lesmateriaal zijn te vinden op de wisweb site.

Twee soorten verbanden

We gaan terug naar de opgave over de patronen aan het begin van dit artikel. Sonia besprak dit met Majori. De leerling wist dat een expressie zoiets als een formule is, maar zij kon echt geen formule bedenken die bij de rij figuren past. Sonia en Majori zaten samen aan de computer en Sonia vroeg nog een keer de vier figuren van de twee rijen met het applet te tekenen.

Sonia: Hoe kom je aan de volgende figuur?
Majori: Er komt steeds twee bij.
Sonia: Dus …
Majori: … dat moet *iets plus 2* zijn, want er komt steeds 2 bij.

Vervolgens kwam Majori met de formule *iets* + 2. Heel herkenbaar … maar hoe ga je als docent nu verder? Hieronder beschrijven we drie mogelijkheden.
Een eerste manier is kijken naar het aantal stippen dat *erbij* komt: 'van figuur 1 naar figuur 4 komen er drie keer twee stippen bij, van figuur 1 naar figuur 5 komen er vier keer twee stippen bij, enzovoort …' Dit gebeurde bij Majori.
Een tweede manier is het tellen van het totaal aantal stippen in elke figuur. Hierbij biedt het gebruik van het applet een voordeel omdat het de stippen voor je telt.
Een derde manier is het visueel benaderen door te kijken naar het verband tussen 'het patroon' en 'het figuurnummer'. Figuur 4 heeft $6 + 3 \times 2$ stippen, want er zitten drie stippen boven plus drie stippen onder, dus zes; plus drie stippen in beide zijden, dus 3×2 stippen; zo zal figuur 10 $6 + 9 \times 2$ stippen hebben, enzovoort …

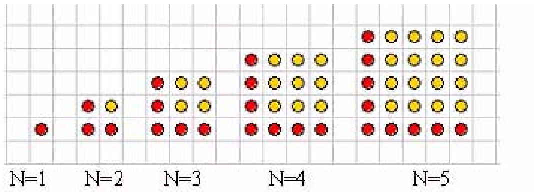
Het grote verschil tussen de eerste manier en de andere twee is dat er twee verschillende verbanden worden beschreven. In de eerste uitleg kijk je naar *het verband tussen de figuren*; de coëfficiënten (hier 4 en 2 voor de eerste rij) zijn respectievelijk startgetal en spronggetal, de variabele n staat hier voor het aantal sprongen vanaf het startgetal. In de andere twee manieren wordt gevraagd om *het verband tussen het aantal stippen van de figuur en het figuurnummer* te beschrijven. De variabele n staat hier dan voor het figuurnummer.
In de formele wereld van de algebra is er geen verschil, je krijgt dezelfde expressie. Maar dat weten de leerlingen nog niet! Ze redeneren in de context van de vraag en niet in de abstracte wereld van de wiskunde. Misschien is het nooit duidelijk geworden voor de leerlingen welke van de twee verbanden is bedoeld bij het vragen naar een expressie. Net als in de uitleg van Sonia aan Majori gaan we er snel vanuit dat leerlingen concepten als startgetal en spronggetal kunnen gebruiken om een patroon te beschrijven met een formule. Maar is dat zo? Hoe kijkt de

leerling naar het figuurpatroon en naar de regelmaat die daarin zit? Het volgende voorbeeld geeft een paar mogelijke antwoorden op die vraag.

Wat zien de leerlingen?

Aan de hand van een tweede voorbeeld laten we zien wat leerlingen doen en kunnen.

Geef een expressie
Hieronder zie je een rij figuren die gemaakt zijn met zwarte en grijze stippen.



Geef een expressie (etiket of formule) die het verband tussen het figuurnummer (*n*) en het aantal zwarte stippen beschrijft; doe hetzelfde voor het aantal grijze stippen.

fig. 4 Voorbeeld 2: Geef een expressie

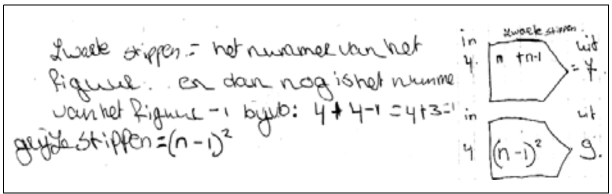


fig. 5 Het werk van Anouk

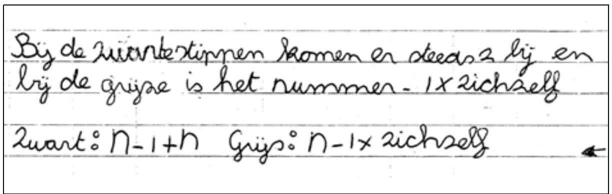


fig. 6 Het werk van Manon

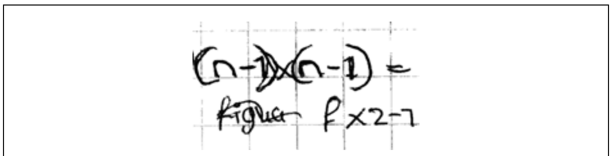
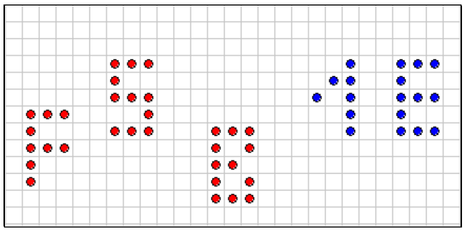


fig. 7 Het werk van Majori

Door alleen naar antwoorden van leerlingen te kijken kun je niet achterhalen hoe ze tot het antwoord gekomen zijn. Maar op basis van gesprekken met leerlingen tijdens de les kun je hun gedachtengang nagaan. We hebben de antwoorden van Anouk, Majori en Manon gekozen omdat zij representatief zijn voor het aantal verschillende gegeven antwoorden.

Wat betreft de rij van zwarte stippen heeft Anouk geredeneerd vanuit het verband tussen het nummer van de figuur en het aantal stippen in de figuur. Er is geen sprake van recursief denken. Zij heeft het aantal horizontale stippen (n) plus het aantal verticale stippen dat resteert (n–1) geteld. Manon geeft een uitleg die recursief is, maar vervolgens schrijft zij $n - 1 + n$. Dus het lijkt dat zij bij de opdracht met de twee mogelijkheden bezig is geweest. Uiteindelijk heeft zij de verticale stippen zonder de horizontale (n–1) geteld en vervolgens de horizontale (n). Majori gebruikt de letter *f* van 'figuur', zij telt twee rijen van stippen (een verticaal en de andere horizontaal) die gelijk zijn en trekt de hoekstip die in beide rijen zit er vanaf.
Bij het rekenen aan de rij van grijze stippen blijkt dat leerlingen zien dat er een vierkant is waarvan de zijde een stip minder heeft dan het nummer van de figuur.

We vonden het opmerkelijk dat leerlingen veel meer moeite hebben met het geven van een expressie bij voorbeeld 1 dan bij voorbeeld 2. Hoe komt dat? De expressies die bij *voorbeeld 2* horen zijn lineair en kwadratisch. Zou je juist niet verwachten dat leerlingen daarmee meer moeite hebben dan wanneer beide expressies lineair zijn? Het lijkt erop dat leerlingen bij *voorbeeld 2* veel meer redeneren vanuit de figuur zelf: de manier waarop de stippen gerangschikt zijn. Dit zou dan kunnen verklaren waarom de leerling bij het bouwen van een expressie niet wordt geholpen met de vraag: 'Wat komt erbij?'
Als laatste opdracht over stippelalgebra is aan de leerlingen gevraagd om zelf een patroon te bedenken en de formule die erbij hoort te geven.



Maak zelf een patroon
Bedenk zelf (of in een groepje) een rij van figuren. Je kunt een figuur van hiernaast gebruiken of zelf een figuur verzinnen.
Teken tenminste de eerste 4 figuren (n=1, n=2, n=3, n=4) en bedenk welke formule bij die rij hoort.
Schrijf jouw antwoord op een apart papier en lever het bij je docent in. We zullen het dan met de hele klas bespreken.

fig. 8 Voorbeeld 3: Maak zelf een patroon

Op de volgende pagina staan enkele rijen van figuren die door een leerling zijn gemaakt.
Leerlingen hebben deze vraag op verschillende niveaus beantwoord. Het lijkt dat leerlingen die sprong- en startgetallen gebruikten bij het opstellen van hun formules

meer en vooral creatievere patronen bedacht hebben. Heleen bijvoorbeeld gaf vijf verschillende figuurpatronen en de bijbehorende expressies. Alle expressies zijn correct behalve de laatste, waar zij $n \times 2 + 5 \times 2$ schreef in plaats van $(n \times 2 + 5) \times 2$. Andere leerlingen hebben maar één letterpatroon gegeven, soms zonder expressie erbij (zoals Manon).

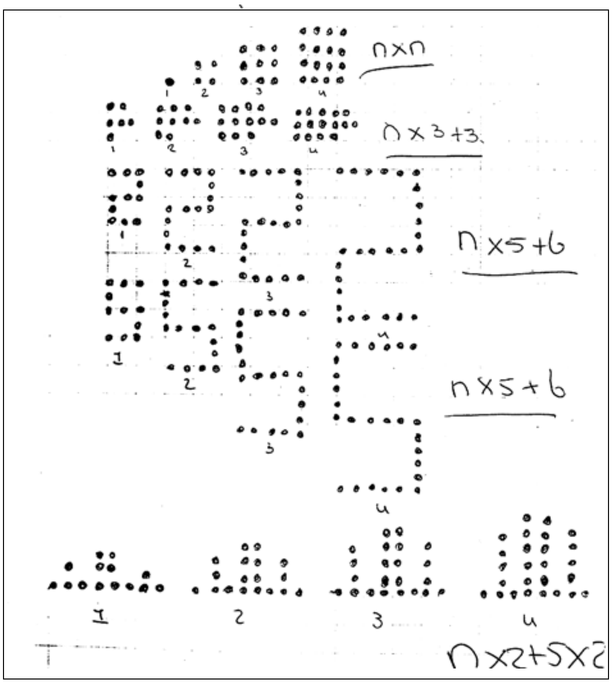


fig. 9 Het werk van Heleen bij voorbeeld 3

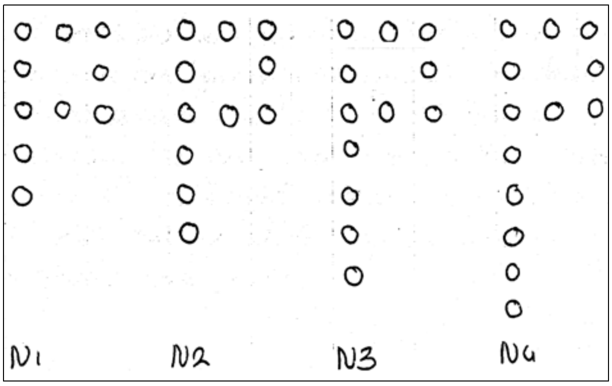


fig. 10 Het werk van Manon bij voorbeeld 3

Terugkijken

In het WisWeb-project is het applet *Stippel algebra* vooral gebruikt in de eerste en vierde klas. De ervaringen in beide groepen zijn positief: leerlingen pakken het makkelijk op; de opdrachten zijn uitdagend en motiverend; leerlingen zijn actief en geconcentreerd bezig en kunnen op eigen niveau werken.
We hebben gezien dat bij het gebruik van figuurpatronen de leerlingen moeite hebben met het geven van een expressie die het patroon beschrijft (dit bleek ook een probleem toen we het applet in een vierde klas uitprobeerden). Uit het experiment bij Sonia in de klas bleek dat de volgende factoren bijdragen aan de verwarring:

- Er zijn twee soorten verbanden die een rol spelen: *het verband tussen de figuren* en *het verband tussen figuren en figuurnummer*.
  Het is voor de leerlingen niet altijd duidelijk naar welk van de twee verbanden gevraagd wordt.
- Sommige leerlingen hebben veel meer moeite met het visualiseren van een patroon dan anderen.
- De uitleg in het materiaal of door de docent sluit niet altijd aan bij de denkwijze van de leerling.
  Het verband dat de docent ziet is niet hetzelfde als het verband dat de leerling ziet.

Wat betreft de organisatie van het werk en de uitvoering in de les: dat zouden we nu op een andere manier doen. Het splitsen van de klas in een deel dat met het applet werkte en een deel dat met het boek werkte was geen goed idee. Sonia kreeg weinig tijd voor de leerlingen die met het lesmateriaal bezig waren en vooral niet genoeg rust om met de leerlingen hun werk te bespreken. Beter is het om leerlingen in groepjes van twee te laten werken en daarna de bespreking in een combinatie van twee of drie groepjes te houden. In plaats van alle vragen te corrigeren is het beter om een aantal kernvragen te selecteren die klassikaal besproken worden. Het zelfstandig werken van de leerlingen – zoals dat in Montessori-onderwijs heel gebruikelijk is – heeft ook nadelen: het is moeilijk om de leerlingen bij elkaar te brengen om de opdrachten te bespreken. Voor de docent is het moeilijk te observeren waar de leerlingen mee bezig zijn.

We vroegen ons af of het applet *Stippel algebra* een meerwaarde heeft bij het onderzoeken van verbanden. Daar hebben we in het experiment bij Sonia op school geen duidelijk antwoord op gekregen. We hebben wel bevestigd gekregen dat stippenfiguren een geschikte en aansprekende context is om met verbanden bezig te zijn. Bovendien werden door het gebruik van de applets en de bijbehorende opdrachten problemen met het leren zichtbaar, die in de sommen van het boek niet (of minder) expliciet naar voren komen.

Sonia Palha en Martin van Reeuwijk, Freudenthal Instituut

Literatuur

[1] Wisconsin Center for Educational Research en Freudenthal Institute (Eds) (1998). *Mathematics in Context*. Chicago: Encyclopedia Britannica.

[2] Reeuwijk, M. van (2001). Bollen schieten. *Nieuwe Wiskrant, 20*(3), 4-7.

[3] Reeuwijk, M. van (2002). Studiedag WisWeb. *Nieuwe Wiskrant, 21*(3), 27-28.

[4] Wisweb team. Lesverslagen en lesmateriaal gepubliceerd op de site www.wisweb.nl