Gegevens op een cd

T. Goris
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

De oorsprong van deze praktijktip ligt in het Middelbaar Technisch Onderwijs (MTO). Een tak van onderwijs die eigenlijk jarenlang zijn eigen koers kon varen en inhoudelijk gestuurd werd vanuit De Bilt. Daar zetelde de vereniging van MTS'en die de inhoud van de diverse curricula bepaalde. Daarbij werd de nadruk gelegd op de technische vakken: volop ontwikkeling en dus ieder jaar nieuwe eindtermen. De te doceren wiskunde bestond al eeuwen, was een noodzakelijk kwaad, maar niemand die zich er om bekommerde.
De landelijke eindexamens behielden hun fossiele karakter. Tot een groep verontruste docenten in 1994 aan de juiste Utrechtse bel trok en de afstand tussen De Bilt en Utrecht teruggebracht werd tot hun onderlinge geografische proporties. Enige jaren later ging het TWIN-project (www.fi.uu.nl/twin) van start met als doel realistische wiskunde ook in dit type onderwijs gemeengoed te laten worden. Soms zijn zeven tropenjaren in drie woorden samen te vatten: het is gelukt. Het bracht een cultuurschok teweeg die zelfs in De Bilt geregistreerd werd.

Deze praktijktip was eigenlijk niet meer dan zomaar een opgave uit het experimentele materiaal dat op een vijftal kernscholen is itgeprobeerd. Uit een hoofdstuk om leerlingen te leren omgaan met hele grote en hele kleine getallen en de bijbehorende 'SCI' en 'ENG' notaties, zoals die naar voren komen in het grafische rekenmachine jargon.
Al snel kwamen er berichten uit de kernscholen dat er nogal verschillende strategieën waren om deze opdracht aan te pakken. En daarmee ging de opdracht een eigen leven leiden op voorlichtingsbijeenkomsten met docenten die later aan het project gingen meedoen. Met als doel de docenten zelf te laten ervaren dat die verschillen in strategieën zich voordoen en belangrijker nog: hoe moeilijk het is om, eenmaal voldaan over het feit dat het probleem opgelost is, open te staan voor die andere strategieën. Veel docenten uit het MTO gingen met de start van het project voor het eerst in groepjes werken en juist dan is het van belang dat een leerling die een afwijkende strategie kiest niet in een vroegtijdig stadium in de strategie van de docent geloo(d)sd wordt.

Deze opdracht is ook gebruikt tijdens een werkgroep op de Panama najaarsconferentie van november 2000. De deelnemers werden uitgenodigd open te staan voor de verschillende gepresenteerde oplossingsstrategieën, waarbij men tot de conclusie kwam dat het soms zelfs helemaal niet aangenaam is om te horen dat er elegantere en efficiëntere strategieën bestaan dan de zelf gevondene. Het gaat om het bepalen van de breedte van een gegevensspoor op een cd. Gegeven is dat het spoor zo'n 1,02 miljoen puntjes per meter bevat en 5,44 miljard in totaal. De leessnelheid van een cd is 1,2 meter per seconde.
Tot op heden zijn de volgende oplossingsmethoden verzameld.

Oplossing 1

Door te meten kun je de gemiddelde omtrek van één omwenteling berekenen:
- Meet de buitendiameter van de spiraal: 11,6 cm.
- Meet de binnendiameter van de spiraal: 4,5 cm.
- Buitenomtrek: $\pi \times 11{,}6 = 36{,}44$ cm.
- Binnenomtrek: $\pi \times 4{,}5 = 14{,}14$ cm.
- Gemiddelde omtrek: (14,14 + 36,44) / 2 = 25,29 cm.

De lengte van de spiraal vind je door het totale aantal putjes te delen door het aantal putjes per meter:
- Lengte spiraal: 5 440 000 000 / 1 020 000 = 5333 m.

Hoe vaak moet zo'n cd dan ronddraaien als één omwenteling gemiddeld 25,29 cm bedraagt?
- Totaal aantal omwentelingen: 533300 / 25,29 = 21087.

De breedte van alle sporen samen kun je meten, maar ook berekenen:
- Breedte van alle sporen samen: (11,6 – 4,5) / 2 = 3,55 cm.

En als er 21087 sporen naast elkaar op die 3,55 cm liggen, dan levert dat een spoorbreedte op van:
- Spoorbreedte: 3,55 / 21087 = 0,000168 cm, ofwel ongeveer twee duizendste millimeter.

Oplossing 2

Omdat de leessnelheid vastligt, namelijk 120 cm per seconde, kun je ook naar de toerentallen aan het begin en aan het eind van de cd kijken (een cd wordt overigens van binnen naar buiten gelezen):
- Meet de buitendiameter van de spiraal: 11,6 cm.
- Meet de binnendiameter van de spiraal: 4,5 cm.

Je kijkt hoe vaak de omtrek in die 120 cm past en je weet dan hoeveel keer de cd ronddraait:
- Buitentoerental: $120 / (\pi \times 11{,}6) = 3{,}29$ omwenteling per seconde.

– Binnentoerental: 120 / ($\pi \times 4{,}5$) = 8,49 omwenteling per seconde.

En hiermee lijkt het mogelijk een gemiddeld toerental te kunnen berekenen:

– Gemiddeld toerental[1]: (8,49 + 3,29) / 2 = 5,89 omwenteling per seconde.

De lengte van de spiraal gaat net als bij oplossing 1:

– Lengte spiraal: 5 440 000 000 / 1 020 000 = 5333 m.

En met de vaste leessnelheid levert dat de tijdsduur van de cd op:

– Tijdsduur cd: 5333 / 1,2 = 4444 s.

Omdat iedere seconde de cd gemiddeld 5,89 keer ronddraait kun je het totaal aantal omwentelingen uitrekenen:

– Totaal aantal omwentelingen: 4444 $\times$ 5,89 = 26200 omwentelingen.

Bij iedere omwenteling wordt er één spoor gelezen en dus:

– Spoorbreedte: 3,55 / 26200 = 0,000136 cm hetgeen afgerond ongeveer één duizendste millimeter zou zijn.

Oplossing 3

Waarom zo moeilijk doen? De spiraal heeft een bekende lengte en een nog onbekende breedte. Maar de oppervlakte van de spiraal kun je zo zien en ook berekenen:

– Meet de buitendiameter van de spiraal: 11,6 cm.

– Meet de binnendiameter van de spiraal: 4,5 cm.

– Oppervlakte spiraal: $\pi \times (11{,}6 / 2)^2 - \pi \times (4{,}5 / 2)^2 =$ 89,8 cm^2.

De lengte van de spiraal hebben we al gezien:

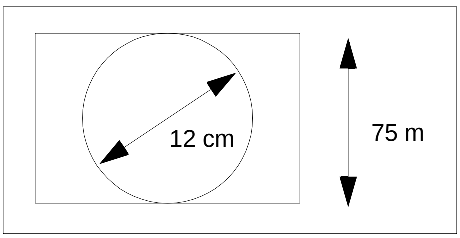
– Lengte spiraal: 5333 m.

Oppervlakte bekend, lengte bekend, dan is de breedte te berekenen:

– Spoorbreedte: 89,8 / 533300 = 0,000168 cm ofwel ook weer ongeveer twee duizendste millimeter.

Oplossing 4

Die vergelijking met dat voetbalveld staat er ook niet voor niets. Je moet dan alleen wél even weten hoe breed een voetbalveld is (fig.1).



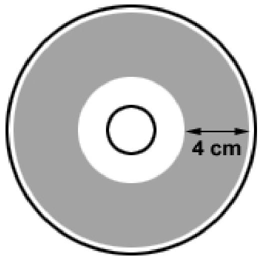
figuur 1

De cd wordt 7500 / 12 = 625 keer zo groot. De spiraal is dan 1 mm breed. Dus de werkelijke spoorbreedte is 1 / 625 mm = 0,00016 cm, ook weer bijna twee duizendste millimeter.

Tot zover de correcte strategieën. Leerzaam zijn natuurlijk ook de strategieën waar ergens iets mis gaat. Deze trof ik aan op een transparant die ik na afloop van een werkgroep mee naar huis genomen had. De oplossing was, bij nader inzien, niet gepresenteerd... De lezer worde zelf uitgenodigd de fout in de redenering op te sporen!

Schijnoplossing 1

Op het doosje staat te lezen dat een cd 74 minuten audio kan bevatten, ofwel 74 $\times$ 60 = 4440 seconden. Met de leessnelheid is dan ook de lengte van de spiraal te vinden: Spoorlengte: 72 $\times$ 60 $\times$ 1,2 = 5184 m (fig.2).



figuur 2

Al die spoortjes samen vormen het zichtbaar beschreven deel van de cd:

– Meet breedte bespeelde gedeelte: 4 cm.

– Op één cm breedte lopen 5184 / 4 = 1296 sporen.

En dan is het logisch om dat dan maar op elkaar te delen:

– Spoorbreedte: 1 / 1296 = 0,00077 cm.

Noten

1 Vrijwel al deze oplossingen zijn door leerlingen uit het MTO bedacht. Een interessante vraag is waarom deze strategie tot een afwijkend antwoord leidt. Waar zit de fout? Bij het berekenen van het gemiddelde toerental is het rekenkundig gemiddelde gebruikt. En dat kan in dit geval niet.
Vergelijk dat met het volgende: je rijdt 120 km heen met een snelheid van 60 km/h en terug met een snelheid van 80 km/h. Je gemiddelde snelheid is dan niet 70 km/h. Ga maar na!
Het gemiddelde toerental had eigenlijk berekend moeten worden met het harmonisch gemiddelde:
$\text{Toerental}_{gem} = 1 / ((1 / 8{,}49 + 1 / 3{,}29) / 2)$.
Maar ja, dat zou de feestvreugde voor de leerling die oplossing 2 bedacht heeft wel héél erg bederven.