Blikken in het verleden, lijnen naar de toekomst

J. van Maanen
Rijksuniversiteit Groningen

1 eens gestolen ...

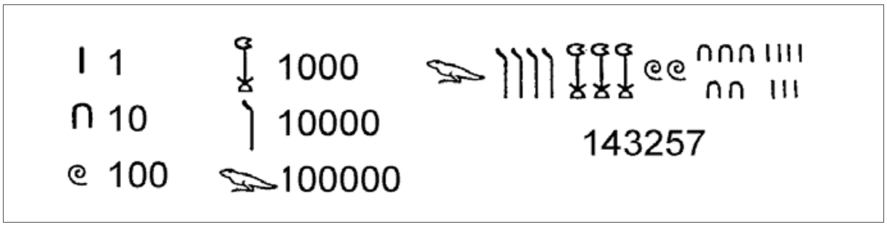
Mijn eigen rekenverleden is niet alleen vrolijk. De oudste herinneringen zijn dat trouwens wel. Tot mijn derde woonden mijn ouders in bij 'opa Hut' (*what's in a name?*) op een bovenhuis aan de Utrechtse Amsterdam-sestraatweg. De straat was toen al druk, onder meer met verschillende stadsbussen. Op schoot bij opa Hut leerde ik hun nummers lezen. Of dat echt een herinnering van binnen is of kennis uit een later verhaal van mijn ouders, weet ik niet. Maar het gevoel van trots van een kind dat een dergelijke uitdaging ('Welke bus is dat dan?') aangaat en er goed uitkomt, herken ik uitstekend.
Anders ging het in de derde van de lagere school bij mevrouw Geel (ze heette eerst anders maar trouwde met de meester van de vijfde). Ik was een snelle leerling bij rekenen, en zij kon daar niet mee overweg. Ze gaf me pas een nieuw schrift als de hele klas aan een nieuw onderwerp en schrift toe was. Ik moest maar zien hoe ik me in de tussentijd vermaakte, en loste dat op een gegeven moment maar op door in de pauze zelf een nieuw schrift te pakken. Ik wist precies waar ze lagen: in een laag kastje met een schuifdeur. Ik schrijf 'pakken', maar het voelde als stelen. Verder was ik wel zo naïef dat ik in de klas rustig in mijn net verworven schrift verder werkte. Het duurde niet lang of ik werd betrapt en mijn moeder moest op school komen. Gelukkig zei ze niet alleen tegen mij dat dit niet kon, maar ook tegen mevrouw Geel, want ik kwam wel ruimer in mijn rekenpapier te zitten.

2 breuk met het verleden

Net als het rekenverleden van een individu is het rekenverleden van de mensheid grillig. Begrippen en methoden (in rekenland tegenwoordig als strategieën aangeduid) die volgens ons heel erg voor de hand liggen, ontstonden soms pas na lang zoeken en zwoegen, en sommige slimmigheden van weleer zijn wij intussen weer vergeten. Een mooi voorbeeld is de breukrekening uit het Egypte van 3500 jaar geleden, een van de oudste culturen waarvan berekeningen bewaard zijn gebleven. Als je de Egyptische berekeningen bestudeert, blijkt het helemaal niet vanzelfsprekend te zijn om $\frac{2}{5} + \frac{4}{7} = \frac{34}{35}$ te zien als iets wat over breuken gaat. Voor veel basisschoolleerlingen is dit tegenwoordig waarschijnlijk ook geen vanzelfsprekende bewering en berekening, maar de meeste kinderen zullen in groep 6 of 7 wel begrijpen wat er met $\frac{2}{5}$ en $\frac{4}{7}$ wordt bedoeld. Natuurlijk schreven de Egyptenaren hun getallen anders, maar het verschil waar ik op doel is veel principiëler dan de constatering dat de getallen er toen anders uitzagen: de Egyptenaren hadden eenvoudigweg geen begrip dat overeenkwam met zoiets als $\frac{4}{7}$. En toch rekenden ze met breuken. Hoe zat dat? En wat kunnen wij er voor onze dagelijkse praktijk uit leren?

De Egyptenaren rekenden in een tientallig stelsel, maar zelfs het meest fundamentele onderdeel, namelijk het noteren van de getallen, deden ze anders dan wij. Wij gebruiken tegenwoordig een beperkt aantal symbolen (de tien ‘cijfers’) waarmee we aangeven hoeveel eenheden, hoeveel tientallen, honderdtallen, duizendtallen, enzovoort, er in een getal voorkomen. Zo betekent de voorste 9 in het getal 9292 dat dit getal negen duizendtallen bevat, en de laatste 9 zegt dat je er ook nog negen tientallen moet bijtellen. De positie van het cijfer in het getal zegt dus welke bijdrage het cijfer aan het getal geeft. Onze wijze van noteren heet daarom positioneel.

De Egyptenaren werkten wel tientallig, maar niet met een positionele notatie. Zij noteerden een eenheid als een verticaal streepje, en als er (zoals in 9292) twee eenheden in het getal voorkwamen zetten ze twee streepjes. Zo ging dat door tot en met negen streepjes. Voor tien voerden ze een nieuw teken in, een poortje. Ook dat werd net zo vaak herhaald als er tientallen in het getal voorkwamen. Het principe is wel duidelijk, hoewel je nog steeds niet weet hoe ze 9292 zouden noteren, want daarvoor heb je eerst nog de tekens nodig voor honderd en duizend (een krullend staartje en een lotusbloem). In figuur 1 zijn de tekens voor de verschillende machten van tien te zien, en ook een voorbeeld van een getal.



figuur 1: de Egyptische getalnotatie (Peet, 1923, pag.11)

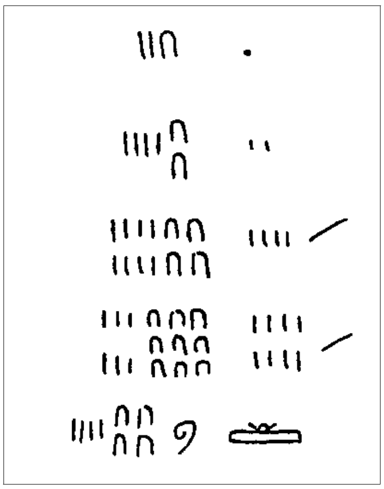
Optellen en aftrekken met deze getallen ging zoals we zouden verwachten. Wanneer een optelling resulteerde in meer dan tien ‘exemplaren’ van een bepaalde macht van 10, dan werden die in de uitkomst vervangen door één exemplaar van de eerstvolgende hogere macht van 10.
Bij vermenigvuldigen lag het anders. Hoe ging bijvoorbeeld de berekening van 23×404? Eerst schreef de rekenaar 1 op en daarnaast één keer het vermenigvuldigtal (404). Daaronder schreef hij 2, met daarnaast het dubbele van 404 (dus: 808). En zo ging hij door met verdubbelen in de linker en de rechter kolom tot hij links 16 had. Doorgaan tot 32 was namelijk overbodig, omdat hij maar 23 maal 404 hoefde te berekenen.
De uitkomst berekende hij nu door de getallen die in de rechterkolom stonden naast 16, 4, 2 en 1 bij elkaar op te tellen. Dat leverde 23×404 - 6464 + 1616 808 + 404 + 9292 (fig.2).

/	1	404
/	2	808
/	4	1616
	8	3232
/	16	6464
	23	9292

23 x 404 via verdubbelen en optellen

figuur 2

Uit het antwoord zal wel duidelijk zijn dat dit voorbeeld verzonnen is, maar figuur 3 laat zien dat het in de oudheid echt zo ging: verdubbelen en optellen.



figuur 3: vermenigvuldigen (Peet, 1923, plaat K, detail)

Er zijn afwijkende berekeningen teruggevonden waarin meteen met 10 werd vermenigvuldigd. Dat gaat natuurlijk ook mooi, want vermenigvuldigen met 10 betekent: schrijf het getal nog een keer op, maar vervang elk teken door het teken voor de opvolgende macht van 10. Zo heeft 23 twee tientallen en drie eenheden. Het tienvoud van 23 schrijf je dus met twee honderdtallen en drie tientallen. Dat lijkt ook praktisch, maar historisch gezien was de methode met verdubbelen en optellen favoriet. De ontcijferaars kunnen aan de slag met figuur 2, een vermenigvuldiging van 3500 jaar geleden. In deze figuur geeft de opgerolde papyrus met het knoopje erbovenop aan dat daar de uitkomst staat.

De verdubbel- en optelmethode is ook de manier waarop de computer met de vermenigvuldiger zou omgaan, namelijk door hem binair (dat wil zeggen als som van machten van twee) te schrijven. Binair splitsen is zo oud als de weg naar Rome, sterker dus nog, binair splitsen is nog veel ouder dan de weg naar Rome. Met breuken hield de begripsvorming op bij het verdelen van de eenheid in een aantal gelijke delen, en het nemen van een van die delen; zeg maar een van de partjes van een reep chocola. Deze eenheidsbreuk schreef de rekenaar in de oudheid door de deler (in onze terminologie: de noemer) op te schrijven met een mond erboven (toepasselijk met al die chocola). De notatieafspraak in gedrukte teksten is om de deler op te schrijven met een streepje erboven, 'een zevende' dus als $\overline{7}$. Geen bezwaar, lijkt het. Dan hadden ze toch ook geen moeite om $\frac{4}{7}$ te schrijven? Dat was dan toch $\overline{7}\,\overline{7}\,\overline{7}\,\overline{7}$? Ja, dat zou je denken. Maar bestudering van de bronnen wijst uit dat de geschiedenis anders ging dan je zou verwachten. Bovendien zijn de bezwaren van deze gedachtegang ook direct duidelijk. Probeer maar eens een breuk als $\frac{34}{35}$ leesbaar op te schrijven door vele malen $\overline{35}$ achter elkaar te schrijven. Maar doorslaggevend is niet onze eigen logica, doorslaggevend is dat de bronnen uitwijzen dat het anders ging.

Want de Egyptische rekenaar verdubbelde en telde op, ook met breuken. Verdubbelen ging gemakkelijk als de noemer even was. Het dubbele van $\overline{12}$ was $\overline{6}$, 4 maal $\overline{12}$ was dus $\overline{3}$, en 5 maal $\overline{12}$ werd daarom geschreven als $\overline{3}\ \overline{12}$.

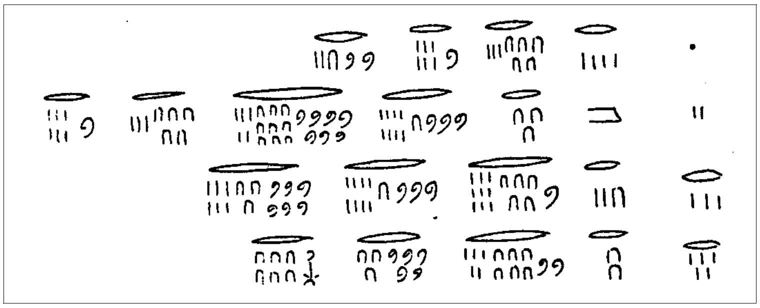
Maar hoe gingen ze te werk als de deler oneven was? Uit de Papyrus Ahmes (bekender als Papyrus Rhind, naar de Engelsman die hem in 1858 in Egypte kocht en naar Engeland bracht) weten we dat de Egyptische rekenaar het dubbele van een eenheidsbreuk met oneven deler omvormde in een optelling van twee of meer eenheidsbreuken. In de papyrus staat dat uitgewerkt in een tabel die begint met een aparte notatie voor 'twee derde' maar daarna 'twee vijfde' en 'twee zevende' omvormt in een som van twee eenheidsbreuken:

$2 \times \overline{3} \quad \overline{\overline{3}}$.
$2 \times \overline{5} \quad \overline{3} \quad \overline{15}$
$2 \times \overline{7} \quad \overline{4} \quad \overline{28}$

De tabel loopt tot en met

$2 \times \overline{99} \quad \overline{66} \quad \overline{198}$
$2 \times \overline{101} \quad \overline{101} \quad \overline{202} \quad \overline{303} \quad \overline{606}$

Nu is ook duidelijk hoe het met $\frac{4}{7}$ ging: die werd omgevormd tot $2 \times (\overline{3}\ \overline{28})$ en dus tot $\overline{2} \quad \overline{14}$ (fig.4).



figuur 4: manipulaties met eenheidsbreuken (Peet, 1923, plaat L. detail)

Even pas op de plaats. Allereerst moet de vraag over $\frac{34}{35}$ nog beantwoord worden. In de tabel staan ook nog de regels $2 \times \overline{15} \quad \overline{10} \quad \overline{30}$; $2 \times \overline{21} \quad \overline{14} \quad \overline{42}$; $2 \times \overline{35} \quad \overline{30} \quad \overline{42}$. Hoe zal $\frac{34}{35}$ er dan uitgezien hebben? En in de tweede plaats willen de ontcijferaars ongetwijfeld weer hun bevestiging vinden in de bronnen. Wat is er op grond van figuur 3 te concluderen over de breukrekening in de Papyrus Ahmes?

De goede verstaander heeft voor de moraal van dit stukje verhaal maar een half woord nodig. Er bestaat niet één eeuwige, absoluut juiste opvatting van wat een breuk is. Deze wetenschap stimuleert ons hopelijk eens te meer om goed te kijken en luisteren naar een leerling die eigen breukentaal en breukennotatie ontwikkelt. En als er alternatieve manieren zijn om breuken in te voeren en om ermee te werken, dan is er ook niet één goede manier om breuken te onderwijzen. Er lijkt wat voor te zeggen om leerlingen goed te laten experimenteren met eenheidsbreuken. In elk geval heeft het zin om hier vanuit didactisch perspectief dieper over door te denken en om wat experimenteel onderzoek te doen op dit punt. Een interessante vraag is ook of leerlingen zelf iets hebben aan verhalen (en opgaven?) over hoe vroegere culturen rekenden. De berekeningen met het verdubbelen van eenheidsbreuken bieden een schat aan verrijkingsmateriaal, zoals ook uitgewerkt in (Lehmann, 1994). Onderzoek met leerlingen aan het begin van het voortgezet onderwijs (Gulikers, 2002) laat positieve resultaten zien, evenals onderzoek in groep 8 (Kool, 2003); de ondertitel van dit laatste artikel, 'How the history of mathematics can enrich interactive mathematical discussions at primary school', verwoordt goed een van de functies die de geschiedenis in het hedendaagse reken-wiskundeonderwijs kan hebben. Iets minder uitgesproken, maar ook minder historisch gericht is het proefschrift van B. van Amerom over historische inspiratie en eigen producties van leerlingen bij hun eerste kennismaking met algebra in groep 8 en brugklas (Van Amerom, 2002).

3 een flash back van de conferentie

Tot het nabije rekenverleden behoort de 21ste (en mijn eerste) Panama-conferentie. Video-opnamen blijven me daaruit bij, van klassen, van kinderen die berekeningen uitvoerden. In de openingslezing zagen we een Braziliaans jongetje dat in een marktkraam eten en drinken verkocht, en uit het hoofd berekende wat hij daarvoor moest hebben. Hij kon vlot rekenen, maar toen hem gevraagd werd de berekening op papier uit te voeren kon hij zijn strategie niet expliciet maken. Sterker nog, hij kon de berekening alleen in zijn hoofd uitvoeren. Iets soortgelijks deed zich voor in de presentatie van Milo en Ruijssenaars. Ze hadden onderzoek gedaan naar dyscalculie. Ze vertelden over observaties van het effect van oefenen, waarbij de proefpersonen bij herhaling werkten met éénzelfde van drie verschillende typen vermenigvuldigopgaven: klassieke tafelsommen, stipsommen (van het type als 'wat staat er op de stip van 7 × . = 42') en meerkeuzevragen. De vraag was: 'Heeft herhalen een positief effect?' Dat bleek het sterkst het geval te zijn bij de sommen die aansloten bij de 'gewone' tafels van vermenigvuldiging. Verder blijkt bij optelsommen het toepassen van de rijgstrategie het meeste effect te hebben, hoewel er wel verschil is tussen kinderen met Leer- en OpvoedingsMoeilijkheden (LOM) en Moeilijk Lerende Kinderen (MLK). Aan het eind van hun presentatie toonden Milo en Ruijssenaars een videofragment uit hun observatiemateriaal. Daarin waren kinderen te zien die eerst een probleem op hun eigen manier oplosten. Toen vervolgens hun begeleidster aan een van hen vroeg om zijn (of haar, dat is me ontschoten) oplossing voor de medeleerlingen op het bord te schrijven, kon hij dat niet meer. 'Uit het hoofd is het gemakkelijker', luidde het commentaar aan het adres van de lerares. Wellicht was het een toevallige samenloop van omstandigheden, maar ik kon me niet aan de indruk onttrekken dat er meer rekenkracht in deze kinderen schuilging dan wij er met onze vragen uithaalden.

4 lijnen naar de toekomst

Een van mijn lijnen naar de toekomst sluit aan bij de forumdiscussie tijdens de conferentie over de wijze waarop de reken-wiskundemethoden omgaan met verschillen tussen leerlingen. Die was voor een tamelijke buitenstaander, zoals ik, moeilijk te volgen. Niet dat er onduidelijk gesproken werd, of dat er ingewikkelde begrippen gebruikt werden. Maar, dacht ik, hoe kan het bestaan dat er zes van zulke methoden in de lucht gehouden worden als alle auteurs het zo met elkaar eens zijn? Wat een opbrengst zou er zijn als hier (de) krachten gebundeld zouden worden. Dankzij zo'n bundeling kan er tijd zijn voor auteurs om dieper na te denken over welke verschillen er tussen kinderen en tussen groepen gebruikers zijn, en hoe de methode daar op in wil gaan. Natuurlijk zullen de auteurs moeten waken voor het kostenbesparingsspook, dat altijd rondwaart als ergens krachten gebundeld worden, maar de uitgevers moeten hier een kans zien liggen om voor dezelfde kosten een beter op de markt toegesneden product te brengen.
Ten slotte accentueer ik nog een lijn die tijdens de conferentie alomtegenwoordig was: het multiculturele karakter van de klassen. Deze conferentie maakte me duidelijk dat op dit gebied allerlei onderzoek en ontwikkelwerk gebeurt; en ook dat dit werk hard nodig is. Wat ik er nog aan wil toevoegen is de suggestie om ook hierbij de mogelijkheden van de geschiedenis in het oog te houden. Van vijftien jaar geleden herinner ik me nog goed het enthousiaste verslag van een docent die in een MAVO-klas had verteld over het belang van de Arabische wiskundigen voor de ontwikkeling van de algebra. Hij had dat geïllustreerd met een fragment in het Arabisch uit het boek dat Al-Khwārizmi rond 830 na Chr. schreef over het oplossen van vergelijkingen. Voor het prestige van de Islamitische leerlingen in deze klas was dit van zeer groot belang geweest, vertelde hij. Hun deelname aan de wiskundelessen was er veel intensiever door geworden. Geschiedenis biedt perspectief!

literatuur

Amerom, B. van (2002). *Reinvention of early algebra - developmental research on the transition from arithmetic to algebra*. Utrecht: CD-β Press. ISBN 90-73346-48-7.
Gulikers, I. (2002). De 17e-eeuwse landmeter in de klas. *Euclides, 77*(8), 338-343.
Kool, M. (2003). An extra student in your classroom. How the history of mathematics can enrich interactive mathematical discussions at primary school. *Mathematics in School, 32*(1), 19-22.
Lehmann, J. (1994). *So rechneten Ägypter und Babylonier*. Leipzig: Urania-Verlag.
Peet, T.E. (1923). *The Rhind mathematical papyrus. British Museum 10057 and 10058*. London: Liverpool University Press.