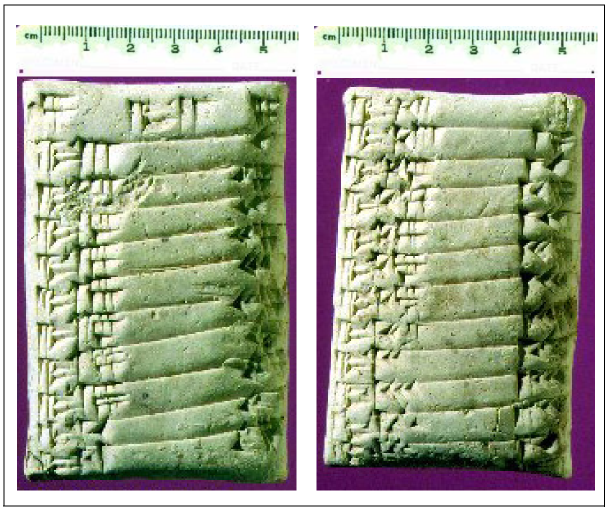
Panama Praktijktip nummer 98

Babylonische rekenkunst

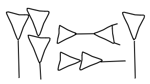
M. Kindt
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Het vak rekenen-wiskunde bestaat al heel lang, wel zo’n vierduizend jaar! Dat weten we van de kleitabletten met spijkerschrift die ooit zijn gevonden in een gebied dat nu tot Irak behoort, maar vroeger Mesopotamië heette.



figuur 1

Bovenstaand kleitablet - hier nagenoeg op ware grootte afgebeeld - is afkomstig van de collectie van Yale University (Verenigde Staten) (fig.1). De voorkant (links) bevat elf, de achterkant (rechts) twaalf regels. Na zorgvuldige bestudering van de tekst, die in dit geval ook door een leek verricht zou kunnen worden, is men erachter gekomen dat het de Babylonische tafel van 5 betreft. Om de ontcijfering te vergemakkelijken is het tablet in figuur 4 nagetekend: links weer de voorkant, rechts de achterkant.
Wat opvalt is dat er op iedere regel hetzelfde woord in spijkerschrift voorkomt (fig.2).

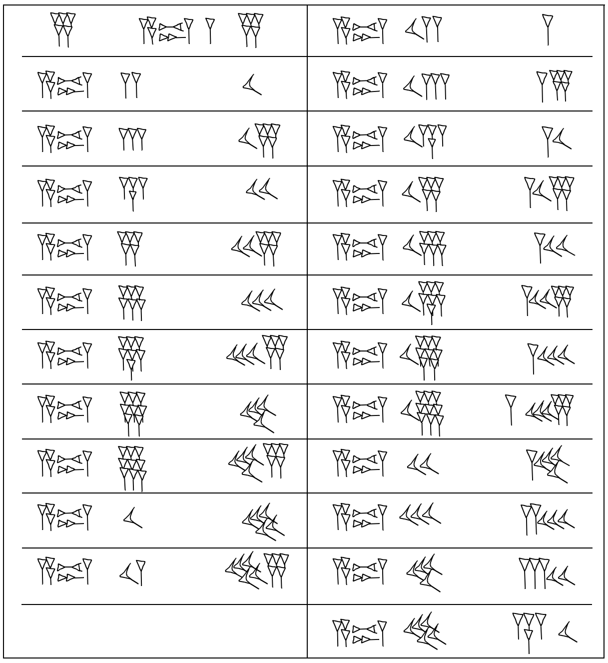


figuur 2

Dat blijkt de Soemerische en Babylonische uitdrukking voor een rekenkundige bewerking te zijn, namelijk *a-rá*; wij zeggen ‘maal’ of ‘keer’. Alle andere symbolen op het tablet stellen getallen voor. Daarbij zijn slechts twee cijfers in zwang: de ‘spijker’ en de ‘wig’. De regel links boven laat zich nu raden: *5 keer 1 (is) 5.* In de volgende regels is de vermenigvuldiger weggelaten: *keer 2 (is) 10, keer 3 (is) 15,* enzovoort (fig.3).

figuur 3

De notatie van de getallen is in eerste instantie additief (zoals bij Romeinse cijfers) en zo lezen we in de laatste regel van de linker kolom 5 keer 11 = 55. De verrassing komt nu in de rechterkolom, want daar staat als uitkomst 1 spijker en geen 6 wiggen, zoals de argeloze onderzoeker zou verwachten (fig.4).



figuur 4

De ene spijker is de andere niet, want hier is ongetwijfeld 60 bedoeld. Zo kan dan via de tafel van 5 worden ontdekt

dat de Babyloniërs veel geraffineerder waren dan bijvoorbeeld later de Romeinen, en een zestigtallig (sexagesimaal) positiestelsel hanteerden. Een verder doorlopen van de tabel bevestigt dat: bij de uitkomst 65 vertegenwoordigt de voorste spijker één zestigtal en stellen de andere spijkers eenheden voor. En zo verder:
70 = 1 × 60 + 10, 75 = 1 × 60 + 15, ...
Het sexagesimale stelsel kennen wij natuurlijk heel goed van het rekenen met uren, minuten en seconden: een erfenis van de Babyloniërs! Daarom ligt een transcriptie van de spijkerschriftgetallen, geïnspireerd op de digitale klok, voor de hand. In figuur 5 is te zien hoe de Babylonische tafel van 9 er in die transcriptie uitziet.

A-rá **9**

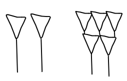
1	**9**	**12**	**1:48**
2	**18**	**13**	**1:57**
3	**27**	**14**	**2:06**
4	**36**	**15**	**2:15**
5	**45**	**16**	**2:24**
6	**54**	**17**	**2:33**
7	**1:03**	**18**	**2:42**
8	**1:12**	**19**	**2:51**
9	**1:21**	**20**	**3:00**
10	**1:30**	**30**	**4:30**
11	**1:39**	**40**	**6:00**
		50	**7:30**

figuur 5

Wat opvalt is dat er, net als in de tafel van 5, na het vermenigvuldigtal 20 met sprongen van 10 werd gewerkt. Een complete zestigtallige vermenigvuldigingstafel zou anders uit zestig regels bestaan en dat vonden de Soemeriërs en Babyloniërs wel wat veel van het goede.
Als nu bijvoorbeeld 34 × 9 moest worden uitgerekend werden 30 × 9 = 4:30 en 4 × 9 = 36 opgeteld, met als resultaat 5:06. De lezer kan, als hij of zij zich echt wil inleven in de Babylonische rekenkunde, dit zelf in spijkerschrift noteren. Zo levert 59 × 9 op 7:30 + 1:21 = 8:51 en tellen we daar nu nog één keer 9 bij op dan komt er 9:00. Zie de analogie met ons 9 × 10 = 90.
De Babyloniërs vonden die laatste uitkomst blijkbaar te vanzelfsprekend om in de tafel op te nemen.

De onzichtbare nul

Nu heb ik in bovenstaande transcriptie een paar keer de aanduiding 00 voor 'nul' gebruikt om misverstand te voorkomen. De Babyloniërs deden zoiets niet en dat maakt dat hun schrijfwijze van getallen in feite 'veelzinnig' is. Neem bijvoorbeeld het getal (fig.6).



figuur 6

De bestanddelen zijn duidelijk '2' en '5', zodat de eerste interpretatie wellicht 2:05 ofwel 125 is. Maar wie zegt dat er geen 2:00:05 (= 7205) of bijvoorbeeld 2:05:00 (= 7500) staat?
Wij weten dat in een goed positiestelsel een teken voor nul onontbeerlijk is, maar de Babyloniërs zijn niet op het idee gekomen een nulsymbool te gebruiken. Uit de context moest blijken hoe een leegte voor, tussen of achter de cijfers zou moeten worden opgevat.

In de tafels (in feite regelmatige getalpatronen) was dat natuurlijk geen probleem, maar in de vele vraagstukken, denk aan (algebraïsche) vergelijkingen die zijn overgeleverd, is dat voor ons soms heel lastig. Van der Waerden (1950) schrijft in zijn boek 'Ontwakende Wetenschap' (helaas alleen nog in antiquariaat verkrijgbaar) hierover:

> (...) De Babylonische schrijfwijze had ook nadelen. Dat men tussen 1 en 60 in de notatie niet kan onderscheiden is weliswaar in de praktijk niet zo erg omdat de orde van grootte meestal van tevoren bekend is (ook wij weten, als er in een etalage 30 op een blouse staat, heel *goed dat niet 30 cent bedoeld is), maar in theoretische opgaven kan het toch onaangenaam zijn.*

Kwadraten

Naast de vele vermenigvuldigingstafels (ook van sommige breuken!) kenden de Babyloniërs de tafel voor de kwadraten van 1 tot en met 59. In transcriptie zoiets als in figuur 7.

n	n^2	n	n^2		n	n^2
1	1	11	2:01		51	43:21
2	4	12	2:24		52	45:04
3	9	13	2:49		53	46:49
4	16	14	3:16		54	48:36
5	25	15	3:45		55	50:25
6	36	16	4:16		56	52:16
7	49	17	4:49		57	54:09
8	1:04	18	5:24		58	56:04
9	1:21	19	6:01		59	58:01
10	1:40	20	6:40			

figuur 7

Het is buitengewoon verrassend dat deze tafel van 1 keer 1, 2 keer 2, 3 keer 3 tot en met 59 keer 59 in feite alle vermenigvuldigtafels overbodig maakt. Als je bijvoorbeeld 18 × 23 wilt uitrekenen dan kun je in de tabel de kwadraten van 18, 23 en hun som 41 opzoeken.
Trek nu de kleinste twee kwadraten af van de grootste, neem de helft van de uitkomst en geloof het of niet, maar je vindt het produkt van 18 en 23.

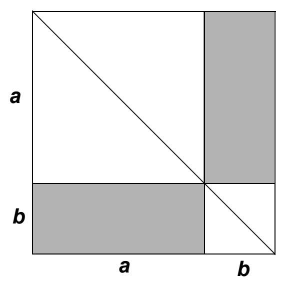
In Babylonische stijl - even narekenen: 6:54 = 360 + 54 = 414 en ja, dat is gelijk aan 18 × 23 (fig.8). Voor de verklaring van de gevolgde rekenwijze moet men bedenken dat de Babyloniërs een meetkundige terminologie hanteerden: een kwadraat was een vierkant, een (willekeurig) product een rechthoek. En juist de meetkunde kan bijzondere regels (denk aan de zogenaamde merkwaardige produkten uit de algebra) aanschouwelijk maken.

Gevraagd: **18 × 23**

Oplossing: **18 + 23 = 41**
41 × 41 = 28:01
18 × 18 = 5:24
23 × 23 = 8:49
5: 24 + 8:49 = 14:13
28: 01 - 14:13 = 13:48
de helft van **13:48 = 6:54**
dit is de uitkomst van **18 × 23**

figuur 8

In het geval van voorgaande berekening volstaat onderstaande figuur 9, waarin te zien is dat het produkt $a \times b$ (een grijze rechthoek) gelijk is aan de helft van het grote vierkant $(a + b^2)$ minus de beide kleine exemplaren (a^2 en b^2).
Kortom: met zo'n formule, geplaatst in de historische context, zou aan het algebraonderwijs in het voortgezet onderwijs meer kleur kunnen worden gegeven, maar dit terzijde.



$$a \times b = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$$

figuur 9

Zestigdelige breuken

Een derde type staat in figuur 10. De vraag is nu wat moet er boven de zwart gedrukte kolommen staan? De ervaring is dat het voor de meeste wiskundig geschoolden toch even tijd kost om dit uit te vinden.
Kijk naar de eerste vijf getallenparen 'grijs-zwart' en er valt op dat het product steeds 60 is. Of denkend aan tijdseenheden: een verdeling van 60 minuten in 2, 3, ..., 6 gelijke perioden geeft 30, 20, ...,10 minuten. Bij een verdeling in 7 gelijke perioden ontstaan er problemen en de Babyloniërs hebben dit geval wijselijk overgeslagen. Maar bij 8 perioden lukt het best aardig: 7 minuten en 30 seconden en dat klopt met die 7:30. Dit laatste getal zou dan opgevat moeten worden als $7\frac{1}{2}$ net zo als 6:40 gezien kan worden als $6\frac{2}{3}$. En jawel: $9 \times 6\frac{2}{3} = 60$.

n		n		n	
2	**30**	16	**3:45**	45	**1:20**
3	**20**	18	**3:20**	48	**1:15**
4	**15**	20	**3**	50	**1:12**
5	**12**	24	**2:30**	54	**1:06:40**
6	**10**	25	**2:24**	1:00	**1:00**
8	**7:30**	27	**2:13:20**	1:04	**56:15**
9	**6:40**	30	**2**	1:12	**50**
10	**6**	32	**1:52:30**	1:15	**48**
12	**5**	36	**1:40**	1:20	**45**
15	**4**	40	**1:30**	1:21	**44:26:40**

figuur 10

Er is ook een andere uitleg. 60 minuten = 1 uur en de tabel kan nu dus ook gelezen worden als: 1 uur gedeeld door 2 = 30 minuten, gedeeld door 3 = 30 minuten, ..., gedeeld door 8 = 7 minuten en 30 seconden, ... De uitkomsten 30, 20, ... , 7 : 30, ... zouden wij dan naar analogie van de tiendelige breuken, schrijven als 0,30 ; 0,20 ;, ... ; 0, 7:30 en dat noem ik dan sexagesimale (of zestigdelige) breuken. Dit is inderdaad de meest gangbare interpretatie, namelijk dat het een tabel van omgekeerden (of breuken met teller 1) betreft. Zo vind ik dat het omgekeerde van 27 gelijk moet zijn aan 0,02:13:20, hetgeen zich laat verifiëren via het optellen van de drie breuken in het rechterlid. $\frac{1}{27} = \frac{2}{60} + \frac{13}{60 \times 60} + \frac{20}{60 \times 60 \times 60}$

Hoe vind je nu zo'n sexagesimale breuk als je niet over een tabel beschikt? Decimale breuken kun je via staartdeling vinden en dat zou dus ook op zijn Babylonisch moeten kunnen (fig.11).

27 / ~~1~~ \ 0,02:13:20
60
54
~~6~~
360
351
~~9~~
540
540
0

figuur 11

Dit type delingen gaat alleen op als het om te keren getal (de deler) deelbaar is op een macht van 60, en dus geen andere factoren dan 2, 3 of 5 heeft. Een voordeel van het zestigtallig stelsel ten opzichte van ons systeem is dat er meer breuken als (eindige) kommagetallen te schrijven zijn. 7 is de kleinste noemer waarbij het misgaat. Ziedaar een oneindig repeterende sexagesimale breuk.

$$\frac{1}{7} = 0{,}08:34:17:08:34:17:08:34:17:...$$

Op de afgelopen Panama-conferentie liet ik de deelnemers van mijn werkgroep de zestigtallige staartdeling uitvinden en er moest toen nog wel even nagedacht worden hoe dat 'nul aanhalen' hier moest.
Voor Pabo-studenten zou dit waarschijnlijk een moeilijke opgave zijn, maar tegelijkertijd heel leerzaam voor het besef van de betekenis van het algoritme en de moeilijkheden voor de jonge leerling. Uiteraard kan ook een didactisch modernere vorm van het deelalgoritme (kolomsgewijs delen) zestigtallig worden vertaald. En daaraan voorafgaand zou eerst het kolomsgewijs vermenigvuldigen verkend moeten worden.
Kortom: een uitstapje naar de Babylonisch rekenkunst, gevolgd door een didactische reflectie, lijkt me een uiterst waardevolle activiteit.

De lezer die meer wil proeven van rekenen en wiskunde op z'n Babylonisch, verwijs is ik naar het boekje 'Babylonische Wiskunde', dat ik samen met A. van der Roest (2005) schreef.

Literatuur

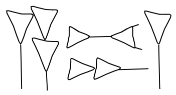
Roest, A. van der & M. Kindt (2005). Babylonische Wiskunde. Een verkenning aan de hand van kleitabletten. *Zebrareeks*, nr. 20, Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Waerden, B.L. van der (1950). *Ontwakende wetenschap, Egyptische, Babylonische en Griekse Wiskunde.* Groningen: Noordhoff.

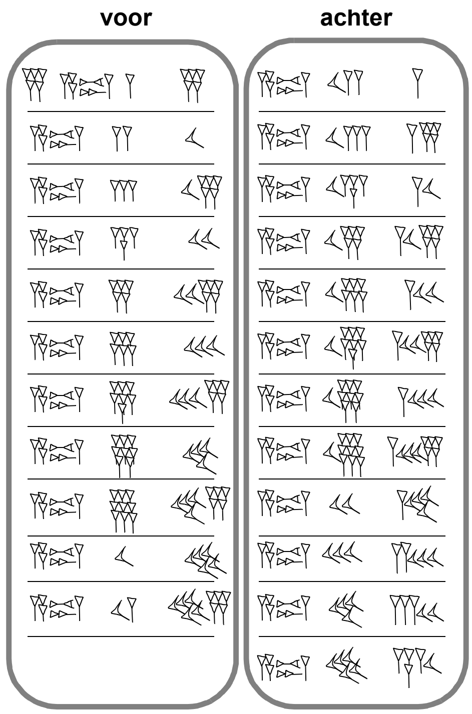
Panama Praktijktip nummer 98

Babylonische rekenkunst

1 Zo rond het jaar 2000 voor Chr. werd er in Mesopotamië (het huidige Irak) al veel aan rekenen en wiskunde gedaan.
De Soemeriërs en later de Babyloniërs gebruikten kleitabletten als rekenboekje of schrift.
Hiernaast zijn voor- en achterkant van zo'n tablet nagetekend (links is 'voor', rechts is 'achter').
Het betreft een tafel van vermenigvuldiging.
In totaal zie je 11 + 12 = 23 regels.Op elke regel komt hetzelfde woord in *spijkerschrift* voor, namelijk:



Dit woord (spreek uit *a-rá*) betekent 'maal' of 'keer'.
Let nu eerst op de voorkant van het tablet.
Welke tafel herken je daar?



2 Je hebt nu waarschijnlijk ontdekt dat de Babyloniërs slechts twee cijfertekens ('spijker' en 'wig') gebruikten:

De achterkant van het tablet begint met (5) keer 12 en het antwoord is vreemd genoeg 1. Of is dat niet zo vreemd? Wat voor systeem werd er gebruikt, denk je?

3 Het Babylonisch talstelsel leeft op de dag van vandaag nog voort in de tijdrekening. Als je de tabel zo leest: 5 minuten keer 1 = 5 minuten, keer 2 = 10 minuten, ... , keer 12 = 1 uur, ... dan ben je op vertrouwd terrein.
Controleer zo de uitkomsten van de achterkant van de tablet.

4 In 'De wereld van het Getal' van Georges Ifrah staat de volgende passage uit een tekst op de Zwarte Steen van Asarhaddon die koning van Assyrië was van 680 tot 669 voor Chr.

> 'Nadat hij op de tafel der Lotsbestemming het getal zeventig had geschreven voor het aantal jaren dat Babylon leeg moest blijven, kwam de god Mardoek in zijn barmhartigheid terug op die beslissing. Hij draaide de cijfers om en besloot daarmee dat de stad al na elf jaar weer bewoond mocht worden'.

Verklaar deze tekst.