De 'Kolommen' van Freudenthal

- ordening als opgave -

Rob de Jong & Edu Wijdeveld

Zoals de 'Zuilen van Hercules' de ingang van de Middellandse Zee vormen, zo markeerden de 'Kolommen' van Freudenthal in de jaren zeventig de ontwikkeling van het rekendidactisch denken van de Wiskobasgroep. Het was niet zo dat Freudenthal de piketpaaltjes uitzette voor het inhoudelijk werk. Integendeel, hij haakte met zijn kolommen vaak in op actuele (interne) discussies en voegde er een wiskundige verdieping aan toe.

1 Inleiding

Van meet af aan schreef Freudenthal met toewijding zijn columns voor het 'Vast Blok' van het 'Wiskobasbulletin'. Dit bulletin verscheen voor het eerst in november 1971 (jaargang 1, nummer 1) en voor het laatst in oktober 1980 (jaargang 9, nummer 6). In de tussentijd kende de formule weinig veranderingen. Het tijdschrift was opgebouwd uit drie blokken: het 'Vast Blok', het 'Variabel Blok' en het 'Respons Blok'. Het Vast Blok kende een aantal vaste rubrieken, het Variabel Blok bevatte een weerslag van leerplanontwikkelingswerk en in het Respons Blok stonden de reacties van de lezers (vaak tips, aanvullingen en uitwerkingen). Destijds werd gekozen voor de titel 'Kolommen' omdat de pagina's in twee kolommen waren opgemaakt. In deze eerste rubriek kreeg Freudenthal als columnist een grote vrijheid in de keuze en behandeling van zijn onderwerpen.
We noemen een viertal gezichtsbepalende rubrieken van het Vast Blok die het jarenlang hebben volgehouden, met hun auteur:

Kolommen	H. Freudenthal
Wiskunst	F. van der Blij
Problematika	H. Janssen
Basje, een jonge onderzoeker	D. Oort

Freudenthal en Van der Blij waren direct bereid om een column te schrijven. In zeker opzicht was het riskant. Immers, beide auteurs waren wiskundigen met een wereldnaam, terwijl het tijdschrift toegankelijk beoogde te zijn voor leraren (in opleiding). De wiskundige achtergrond van deze lezers was in het algemeen bescheiden. De garantie dat de tekst niet te ingewikkeld zou worden lag bij Freudenthal in zijn schrijftalent, in zijn originaliteit en in zijn vermogen om dichtbij het alledaagse te beginnen en al schrijvend een verdieping of verbreding te geven naar prachtige thema's uit de wiskunde. De Kolommen handelden over uiteenlopende onderwerpen, met als doel - zoals Freudenthal in een van de columns schrijft: de lezer 'door een kier te laten kijken in een chapiter van de wiskunde' …. 'in de hoop dat het naar meer smaakt'. Bij Van der Blij lag het anders. Hij kon de (beeldende) kunst met fraaie afbeeldingen als aanknopingspunt gebruiken.
Op de vraag van de redactie om weer een nieuwe Kolommen te schrijven, reageerde Freudenthal binnen een week met een kant en klare tekst, geschreven in een schoolschriftje en uitgetypt door een van de weinigen die zijn handschrift kon lezen: Do Breughel. Soms vroeg hij waar hij het over moest hebben, maar meestal niet. Hij heeft het ook tot de opheffing van het 'Wiskobasbulletin' volgehouden. In totaal: 33 Kolommen.[1] Nadien ging hij met een vergelijkbare rubriek door in het tijdschrift 'Willem Bartjens'.[2]

2 Plaatsbepaling

Natuurlijk ging de eerste Kolommen over de 'Band van Möbius' (zie hierna). Dan, in zijn tweede Kolommen, een inhoudelijk uiterst belangrijk stuk, getiteld: 'Plaatjes en Praatjes'. Dat is ook het geval met zijn derde bijdrage, getiteld: 'Ontsporingen'. Genadeloos wordt hierin de verzamelingentaal uit de zogenaamde Moderne Wiskunde, zoals die zich manifesteert in een aankomende generatie reken-wiskundemethoden voor de basisschool aan de kaak gesteld. De verzamelingentaal met Venndiagrammen wordt daarbij afgedaan als dikdoenerij, die niks met wiskunde te maken heeft. Deze teksten hebben ongetwijfeld bijgedragen aan het feit dat de invoering van de 'New Math' in het Nederlandse basisonderwijs stagneerde.

Een voorbeeld uit jaargang 3 nummer 3. Op pagina 242 staat een pagina uit een basisschoolmethode met afbeel-

'Is dat moderne wiskunde?'

Het zijn mooie plaatjes. In het ouderwetse rekenonderwijs werd de juffrouw geacht de vraag te stellen 'hoeveel mieren zijn dit?', 'hoeveel vlinders zijn dit?' enzovoort, of algemener: 'hoeveel beestjes zijn dit?'

In het 'moderne' wiskunde-onderwijs op de basisschool luidt de vraag: 'Hoeveel elementen heeft de verzameling?' Wat is nu goed?

Doe dit boekje dicht en denk er zelf over na. Kijk, ontdek, maar denk ook na.

U weet zeker wat dikdoenerij is?

'Hoe gaat het met Pietje?' 'Hij bezoekt een instelling voor voorbereidend lager onderwijs.'

Ik heb niets tegen instellingen voor voorbereidend lager onderwijs, alleen noem ik ze, wanneer een van mijn kleinkinderen erop zit, kleuterscholen, anders zou het dikdoenerij zijn.

Als ik de hik heb, noem ik het niet 'singultus' hoewel het medisch zo heet, en als ik het licht uitdoe, zeg ik niet dat ik de stroomkring onderbreek. Mocht ik 'per benenwagen' reizen, dan weet u dat het dit keer grappig bedoelde dikdoenerij is.

Hoe is het nu met 'hoeveel beestjes zijn dit?' of 'hoeveel elementen heeft die verzameling?'

Hoe moet het? Mag de groenteboer nog vragen 'Hoeveel sinaasappelen had u gehad willen hebben?' of moet het zijn: 'Hoeveel elementen zijn er in de verzameling sinaasappelen die u gehad had willen hebben?'
Of misschien zelfs: 'Hoe groot is het kardinaalgetal van de verzameling der door u gewenste sinaasappelen?'

'Hoeveel elementen zijn er in de verzameling'

Wees gerust - ook bij Wiskobas blijft het: 'Hoeveel beestjes zijn het?' Al het andere is dikdoenerij en een groot deel van de zogenaamde moderne wiskunde die handige auteurs aan u trachten te slijten, is dikdoenerij, en met wiskunde - modern of niet modern - heeft het niets te maken. Laat u zich niet de stuipen op 't lijf jagen door auteurs die u willen vertellen, hoe het echt wiskundig moet en die het zelf niet weten.

Het is niet alleen dikdoenerij - het is gewoon fout.

U kunt van het aantal elementen van een verzameling spreken als er van een verzameling sprake is. Dit is in 't afgedrukte voorbeeld niet het geval. Als u het plaatje rechtsboven bekijkt dan ziet u daar 5 onzelieveheersbeestjes. U mag het wel als een verzameling van onzelieveheersbeestjes opvatten, die dan 5 elementen heeft, maar u mag er ook een verzameling ronde zwarte stippen in zien, die 10 elementen heeft, of een verzameling pootjes, met 30 elementen.

Een stapeltje van dit of dat is niet een verzameling, maar het wordt er een wanneer ik het als zodanig opvat en daarvoor moet ik duidelijk aangeven, wat de elementen ervan zijn. Is een suikerbus een verzameling? Neen, maar ik kan hem opvatten als een verzameling - van suikerklontjes, suikerkorreltjes, suikermolekulen.

Ik kan zoiets als verzameling opvatten - dit betekent niet dat ik het moet doen. Wanneer ik het zonder noodzaak doe, dan hoort dit weer in het chapiter 'dikdoenerij' thuis. Met verzamelingen kun je heel wat doen, bijvoorbeeld kunnen verzamelingtheoretische bewerkingen en afbeeldingen veel verhelderen. Ontbreekt die kontekst er, dan is het dikdoenerij, die spoedig zelfs tot fouten leidt.

figuur 1: Wiskobasbulletin, jrg 3 nr 3

dingen van miertjes, bijtjes, vlindertjes, lieveheersbeestjes, met de opdracht: Teken een kring om het getal, dat aangeeft hoeveel elementen elke verzameling telt (fig.1).

3 Inhoudelijke thema's

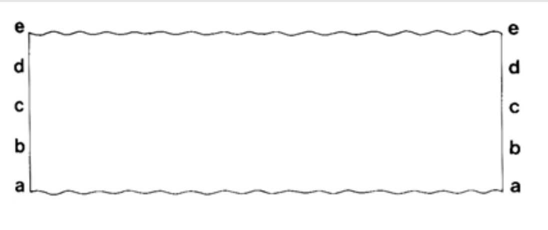
Zowel het rekenen als de meetkunde kwamen herhaaldelijk aan bod. Maar ook heel andere zaken als kansberekening, spelletjes, topologie, logica, over bewijzen, over correct gebruik van getallen en taal. In zijn wiskundig gerichte kolommen laat Freudenthal het meestal geheel aan de lezer over om daarvan in het onderwijs gebruik te maken. Anders is dat in die Kolommen, waarin hij zich rechtstreeks met onderwijszaken bemoeit. Een enkele maal om slechte onderwijsresearch of een slechte rekenmethode aan de kaak te stellen, andere keren om tekortkomingen in de rekendidactiek te signaleren, in de hoop dat daarin verbetering zal worden aangebracht.
Uit de verscheidenheid aan Kolommen, hebben we een drietal gekozen, die een indruk geven van de aard en intentie waarmee Freudenthal zijn bijdragen schreef.

4 De Möbius band

Deze Kolom - nog zonder titel - uit het eerste nummer van het Wiskobasbulletin van november 1971 (fig.2), handelt over de bekende band van Möbius, die het net opgerichte Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO) zich tot logo had gekozen (fig.3).
Die eerste bijdrage is meteen al karakteristiek voor de wijze waarop Freudenthal zijn (in meerderheid) wiskundig gerichte Kolommen aanpakt.

Het teken dat IOWO tot symbool heeft gekozen, is geen ornament, maar een meetkundige figuur. Wie moeilijkheden heeft om die figuur in 't juiste perspektief te zien, kan met een model ervan worden geholpen. Bij wiskundig 'model' stelt men zich gauw iets voor van papier, ijzerdraad of gips, maar als de wiskundige die term gebruikt, denkt hij veeleer aan abstraktere maaksels. Neem bijvoorbeeld de rechthoek hieronder (Fig. 1).

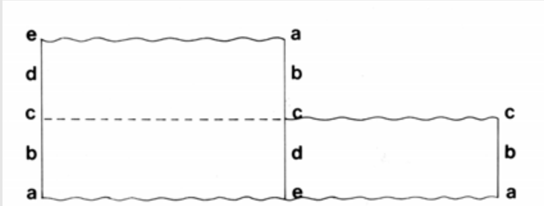
De twee opstaande zijden denk ik me aan elkaar geplakt, en de letters ernaast duiden aan hoe het moet geschieden: niet recht maar averechts. Ik zei 'ik denk het aan elkaar geplakt', maar men mag het ook echt doen (natuurlijk nadat men de rechthoek heeft uitgeknipt), en dan wordt het denkbeeldige model een echt konkreet model van wat ik abstrakt bedoelde en de letters ernaast duiden aan hoe het moet geschieden: niet recht maar averechts.



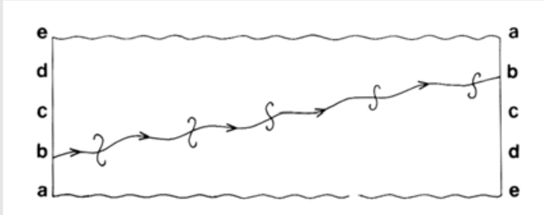
Plakten we de twee opstaande zijden gewoon, recht aan elkaar, dan (Fig. 2) ontstaat er een ring, ook cilinder genaamd, waaraan niet zoveel te beleven is. Doet men het, zoals we net deden, averechts, dan wordt het wat men een lint van Moebius noemt (naar een 19-eeuwse meetkundige). Een cilinder heeft twee randkrommen, boven en beneden. Een Moebius-lint heeft er, vreemd genoeg, maar één. De twee horizontale zijden van de rechthoek, die samen de rand voorstellen, vormen één stuk; immers als men onderaan van a links naar e rechts is gelopen, is men door de wijze van samen plakken bij de e boven links aangekomen om zijn weg naar boven rechts te vervolgen, waar men bij a aangekomen meteen weer tevens bij a links onderaan is.

Nog een verschil tussen de cilinder en een Moebius-lint: Geef er een knip in en wel langs de horizontale lijn die van c links naar c rechts loopt. De knip is een gesloten kromme, omdat door de wijze van plakken beide c hetzelfde zijn. Het lijkt nu of de figuur in twee stukken uiteenvalt: de smalle rechthoek boven en de smalle rechthoek onderaan. Voor de cilinder klopt dit ook, alleen moet je elk van die twee rechthoeken weer als een cilinder zien, wel te verstaan half zo hoog als de oorspronkelijke.
Met een Moebius-lint is het heel anders gesteld. Wat eruit ziet als twee rechthoeken zit aan elkaar: neem maar de bewuste rechthoek en leg hem rechts naast de onderste neer zodat aan de voorschriften van het knippatroon is voldaan (Fig. 3), d.w.z. wentel hem eerst om de stippellijn alvorens hem naar rechts op te schuiven.

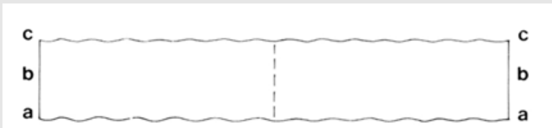
Wat is de uitkomst? Niet twee cilinders van halve hoogte, maar één cilinder van halve hoogte en dubbele omtrek. Een vreemd geval! Een Moebius-lint valt door een gesloten knip niet in twee stukken uiteen.



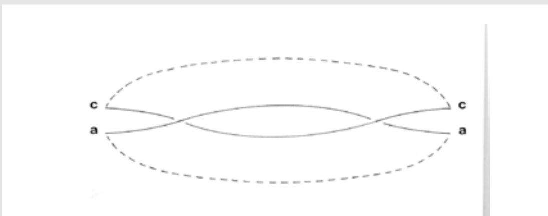
Neem een letter S, leg hem op het Moebius- lint en ga er op het Moebius-lint mee op reis (Fig. 4). Na een rondreis is de S in zijn spiegelbeeld veranderd.

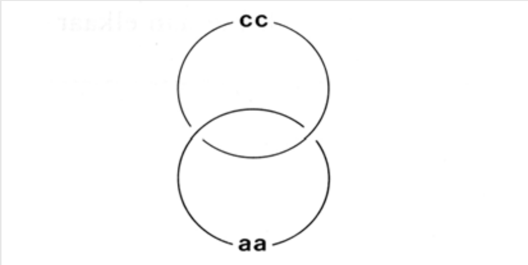


Tot dusverre konden we het met het vlakke model van het Moebius-lint doen: voor wat nu volgt, moeten we het denkbeeldige plakken in de ruimte uitvoeren. Men vervolge op dit ruimtelijk model - de horizontale lijn van c links naar c rechts. Ook op het ruimtelijk model is die lijn gesloten, maar als men hem doorlopen heeft, bevindt men zich ineens op de andere zijde van ons Moebius-lint, of beter gezegd: zo'n Moebius-lint heeft maar één zijde, niet twee zoals een cilinder. Het Moebius-lint behoort tot de eenzijdige oppervlakken (er zijn er meer van dan alleen het Moebius- lint).
Nog iets: geef er nu weer de knip in, van c naar c, zoals daarstraks. We weten al wat er ontstaat: één cilinder uit één stuk - abstrakt gezien tenminste. Konkreet is het een beetje meer genuanceerd. Om een Moebius-lint te plakken moeten we de uitgeknipte strook een halve slag wringen en dientengevolge zit er in de ring, die na het knippen is ontstaan, een hele slag. Het is een rechthoek waarvan ik de opstaande zijden met een hele slag recht aan elkaar heb geplakt (Fig. 5). Let nu op de twee randkrommen, d.w.z. de horizontale zijden van a naar a en van c haar c.

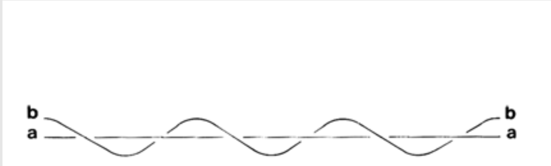


Beiden zijn gesloten krommen, maar hoe liggen ze in de ruimte tot elkaar? Kijk naar Fig. 6 en denk erom dat a aan a en c aan c is geplakt. Dit leidt tot Fig. 7. (Probeer het bijvoorbeeld met twee veters.) Het is een paar met elkaar 'geschakelde' krommen, twee gesloten krommen die men niet uit elkaar kan halen, zonder één hunner te verbreken. Ze zijn enkelvoudig geschakeld.





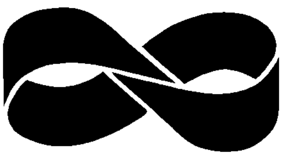
Kijk even naar de twee gesloten krommen van Fig. 8. Wat valt hier op?



U hebt nu iets geproefd van een stuk wiskunde, dat men topologie pleegt te noemen. Smaakt het naar meer?

figuur 2: Wiskobasbulletin, jrg 1 nr 1

Aan de hand van een grote variatie aan voorbeelden uit rekenen, meetkunde, getaltheorie, enzovoort, wordt de lezer op elementair niveau een (vaak verheven) blik gegund in de keuken van fundamenteel wiskundig denken. Daarbij laat Freudenthal met zijn ‘verhalende’ verteltrant duidelijk blijken dat hij zich goed bewust is van zijn (in principe) non-mathematische doelgroep. Hij neemt de lezer als het ware bij de hand, om hem al mathematisch-filosoferend met een ‘kijk eens zo’ en ‘kijk eens zus’, ogenschijnlijk simpel en logisch door het mathematische landschap van zijn keuze te leiden. Maar schijn bedriegt, want tegelijkertijd wordt van diezelfde lezer vaak heel wat denkkracht, inbeeldings- en doorzettingsvermogen, vereist. En Freudenthals verhandeling over de Möbiusband is daarvan een duidelijke illustratie.



figuur 3

Immers, niet een concrete Möbiusband met zijn verrassende topologische structuur vormt uitgangspunt van zijn beschouwing, maar een abstract model aan de hand van een ‘constituerende’ rechthoek. Niet de band op zich is doel, maar juist het mathematiseringsproces waartoe hij aanleiding geeft. Het gevolg is wel, dat de lezer die onbekend is met die eigenschappen van de Möbiusband, behoorlijke moeite zal hebben met het proces van mentaal plakken en knippen.
De tekst volgend ziet men als het ware Freudenthal voor zich, die voor de gelegenheid zijn abstracte denkproces over de Möbiusband met een paar krabbels ‘achteloos’ op papier zet, om die vervolgens ten behoeve van het Wiskobasbulletin in ‘logisch volgorde’ uit te werken. Elementaire wiskunde, op hoog niveau!

5 Hoe weet je dat?

Met het voortschrijden van de jaargangen van het Bulletin, maakte Freudenthal in zijn Kolommen meer en meer gebruik van de (onderwijskundige) ervaringen, die hij binnen en buiten het IOWO opdeed. Daarbij kon hij putten uit jarenlange mathematisch-didactische discussies in de wekelijkse kadervormingsbijeenkomsten van het IOWO, waaraan hij overigens zelf in belangrijke mate bijdroeg. Ook zijn regelmatige bezoeken aan respectievelijk de ontwerp-(lagere)school in Arnhem en de ontwerp-Pabo in Gorcum bleken voor hem een rijke bron van inspiratie, evenzeer als zijn gesprekken met de kleinkinderen, neergelegd in zijn ‘Wandelingen met Bastiaan’. Vaak betroffen dat kleine, subtiele waarnemingen, waaraan fundamentele mathematisch-didactische beschouwingen gekoppeld konden worden.
Zoals bijvoorbeeld die keer dat Bastiaan op een (meetkundig getinte) vraag van opa antwoordde ‘Ik zie het zo’. Voor Freudenthal - maar zeker niet voor hem alleen - aanleiding om voortdurend aandacht te vragen voor ‘intuïtief’ en inleidend meetkundeonderwijs in die gevoelige lagereschoolperiode. Zelf-reflecties - alweer een gevleugeld begrip binnen het IOWO - lagen aan die observaties ten grondslag. En graag laten we Freudenthal nu in zijn Kolommen aan het woord over zijn reflecties ten aanzien van een van die observaties.
Op de Juliana van Stolberg PA te Gorcum vraagt hij een student hoe je een vierkant zou kunnen verdubbelen, met als effect dat hij daar zelf het meest van leert … (fig.4).

6 Negenproef

In een aantal gevallen kiest Freudenthal ‘rekensnufjes’ tot uitgangspunt van wiskundige beschouwing. Dat de negenproef daarvan ‘de meest bekende’ zou zijn kan men betwijfelen, maar dat is niet van belang (fig.5).
Ook in deze kolom immers, biedt die negenproef weer aanleiding tot specifiek wiskundige beschouwingswijzen als verbreding, veralgemenisering en abstrahering. ‘Van een hogere wacht is het laag-bij-de-grondse beter te overzien’, stelt Freudenthal elders, al zullen sommige van zijn lezers ook nu weer moeite hebben die Olympus te beklimmen. Overigens sluit Freudenthal met het gebruik van de abacus op verrassende wijze aan bij de actualiteit van het moment en eindigt hij vergelijkbaar met een mooie testvraag uit het toen vigerende ‘Land van acht’.

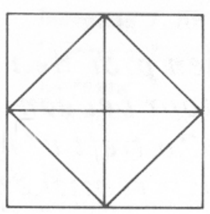
HOE WEET JE DAT?

‘Hoe weet je dat?’ Een vraag waarop het antwoord zou kunnen luiden: 'uit de krant'. Of: 'de meester heeft het gezegd'. Of: 'ik zie het zo'. Of: 'zomaar'. En al die antwoorden kunnen goed zijn ~ het hangt van de situatie af -. Ook op de vraag '8 + 5 is ...?', kan het antwoord - goed of slecht - aanleiding geven tot doorvragen: 'hoe weet je dat?'. Natuurlijk is het antwoord dan niet 'uit de krant' en vermoedelijk ook niet 'van de meester'. Maar 'ik zie het zo' kan best deugen - je hebt van die kinderen, en het zijn er niet weinig, die het optellen voor hun geestelijk oog zien gebeuren -. Ook 'zomaar' kan - ze weten het al van buiten -. Maar dan kun je verder vragen: 'hoe ben je het ooit te weten gekomen?'. En misschien herinneren ze zich hoe ze het deden toen ze het nog niet van buiten wisten, bijvoorbeeld met doortellen of bij wijze van (8 + 2) + 3.

‘Hoe weet je dat?’, kun je jezelf soms ook vragen, en in alle gevallen vereist het antwoord een wroeten, een zelfonderzoek. Ineens weet je iets, het lijkt een ingeving, maar dan ben er nog niet, want wat je zelf weet, moet je kunnen uitdragen, je moet er anderen van kunnen overtuigen, en die kunnen aan jou weer de vraag stellen: ‘hoe weet je dat?’

verdubbelen of halveren

De oudst bekende wiskundeles, en trouwens de oudste les waarover we iets weten, is bij Plato, waar Socrates zijn leerling, de slaaf van Menon, een vierkant laat verdubbelen - een echt socratische les -. Na die vaak nagebootst te hebben, ben ik uiteindelijk bij de manier terecht gekomen om dit didaktisch aan te pakken. Niet verdubbelen, maar halveren!
Ik heb het inmiddels vele malen geprobeerd. Een zakdoek of een papieren servet laten plooien dat er een vierkant met de helf van die oppervlakte ontstaat. Natuurlijk is het eerste dat geprobeerd wordt, het vierkant evenwijdig met een van de zijden te vouwen maar meteen is overduidelijk dat de uitkomst geen vierkant is. Na dit eerste onvermijdelijk wansukses hebben ze het spontaan of vrij spontaan, gauw te pakken - zes- tot achtjarigen -: de slippen van zakdoek of servet naar het midden vouwen en het is voor elkaar: een half zo groot vierkant. Een vierkant halveren is gemakkelijker dan het verdubbelen, omdat je dan de oorspronkelijke figuur niet te buiten hoeft te gaan, maar heb je een keer het halveren door, dan is het verdubbelen ook geen moeite.



Maar hoe weet je dat? Ik bedoel, dat de gevouwen figuur weer een vierkant is en dat het de helft van het oorspronkelijke is. Zou iemand die vraag stellen? Je ziet het immers zo. Wat zie je dan? Je hebt de zakdoek maar slordig gevouwen, geen uitgestreken plooien, en als je het gevouwen papieren servet nader bekijkt blijken de randen niet zo netjes aan elkaar te sluiten als eigenlijk zou moeten. Je weet het omdat je het ziet, maar wat je feitelijk ziet wordt door je verstand gekorrigeerd. Je ziet het als het ware met je geestelijk oog.

weerspiegelen

‘Ik zie het zo’, is een goed antwoord, waar je toch op door mag vragen: 'hoe weet je dat dit allemaal zo mooi op elkaar aansluit?' En met het beantwoorden van deze vraag begint het probleem. Want om te weten te komen, hoe je iets weet, moet je bij jezelf te rade gaan, je moet reflekteren over wat je zelf doet en denkt. Ik zeg ‘reflekteren’, hetgeen woordelijk ‘weerspiegelen’ betekent: je moet jezelf in de spiegel zien, om je je gedachten bewust te maken.

Iets dergelijks geldt ook voor wie een ander wil helpen bij het beantwoorden van de vraag: hoe weet je dat?' Hij moet de gedachte van de ander trachten te weerspiegelen, zich in de ander verplaatsen, zeg je ook. Voor wie met sukses meetkunde op school heeft geleerd, is het een koud kunstje om te bewijzen dat de opgevouwen zakdoek weer een vierkant en de helft van het oorspronkelijke is. Hij heeft termen als kongruentie en stellingen over evenwijdige lijnen paraat, om er een sluitende redenering van te maken. Hij kan het de ander voorredeneren en het hem laten naredeneren. Een koud kunstje. Maar als je niets van meetkunde afweet, hoe weet je het dan? Je zíet immers, dat de opgevouwen zakdoek weer een vierkant is en de helft van het oorspronkelijke. Je bent er ook zonder redeneren van overtuigd. Hoe? Dit is zo moeilijk te achterhalen, omdat je op school geleerd hebt, het ook nog te beredeneren.

gewoon doen

Laten we proberen gewoon te doen. Het gaat over vierkanten. Wat is dat, een vierkant? Een vierhoek, en wel een heel bizondere, een regelmatige. Regelmatig - wat is dat? Hij ziet er aan alle kanten eender uit, hij past op zichzelf, als je hem draait, vier keer, bij elk van de vier hoekpunten. Je haalt bij elk hoekpunt een slip over, bij elk hoekpunt dezelfde slip, dus wat er ontstaat, is een figuur die dezelfde regelmatigheden vertoont als de oorspronkelijke kant - een vierhoek - die je weer vier keer op zichzelf kunt leggen, dus weer een vierkant. De helft van het oorspronkelijke, want met dat overslaan van de slip heb je wat eronder ligt, verdubbeld.
Zou je zo redeneren? Symmetrieën spelen een grote rol in al hetgeen je 'zo ziet' en waarvan je je afvraagt: 'hoe weet je dat?'

andere voorbeelden

Een ander voorbeeld. Probeer het zelf!
Een gesloten touw loopt glijdend over de hoekpunten *a, b, c* van een gelijkzijdige driehoek en vormt er dus de omtrek van. Deze omtrek is in drie gelijke stukken verdeeld door middel van de punten *p, q, r*, waar lusjes aan het touw vastzitten, en door de lusjes bij *p, q, r* loopt een gesloten elastiek. Hoe je het touw ook over de omtrek van de driehoek abc beweegt, de lussen bewegen mee en de elastieken driehoek *pqr*, variërend van afmeting, is en blijft eveneens een gelijkzijdige driehoek.
Waarom? Je ziet het zo. Maar hoe weet je dat?

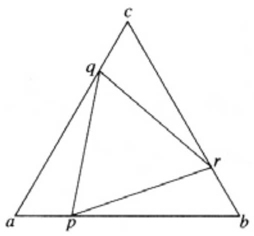


fig. 2

Je mag hetzelfde ook met een vierkant doen. De vaste punten *a, b, c, d* vormen een vierkant; het touw, dat om *abcd* als omtrek loopt, is in vier gelijke delen verdeeld, met lusjes bij *p, q, r, s* en door de lusjes loopt weer een gesloten elastiek. De variabele figuur *pqrs* is weer een vierkant.

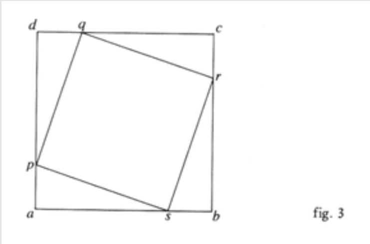


fig. 3

Misschien doet de laatste figuur u ergens aan denken. Kijk naar de oppervlakten:

$$\begin{aligned}\overline{pq}^2 + 4 \cdot \tfrac{1}{2}\overline{ap} \cdot \overline{as} &= (\overline{ap} + \overline{pd})^2 \\ &= \overline{ap}^2 + 2\,\overline{ap} \cdot \overline{pd} + \overline{pd}^2.\end{aligned}$$

Schrap de tweede summand rechts en links tegen elkaar weg en je krijgt:

$$\overline{pq}^2 = \overline{ap}^2 + \overline{pd}^2$$

Een welbekend bewijs van de stelling van Pythagoras.

figuur 4: Wiskobasbulletin, jrg 8 nr 1

NEGENPROEF

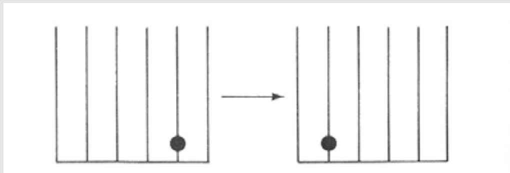
Van alle rekensnufjes is de negenproef wel het meest bekende. Het treft me steeds weer dat maar heel weinigen weten wat erachter zit en dat van de rest weer slechts enkelen de behoefte gevoelen erachter te komen. De negenproef wordt klaarblijkelijk door de meesten gezien als een soort natuurverschijnsel, zoals de dagelijkse opgang van de zon of als een technisch wonder, zoals het geluid uit de ether als je de radioknop omdraait.

getal en cijfersom

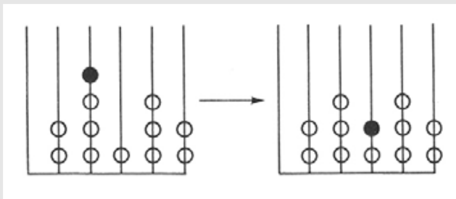
Voor wie is dit stuk geschreven? Voor hen die een aanmoediging nodig hebben om de negenproef als een serieus stuk wiskunde te beschouwen, én voor hen die een steun behoeven om anderen daartoe aan te moedigen.
U weet natuurlijk waar het om gaat: om te weten of een getal door 9 deelbaar is, tel je zijn cijfers op; is de cijfersom door 9 deelbaar dan is het getal zelf ook door 9 deelbaar - en omgekeerd. Praktisch iedereen in onze streken weet het en praktisch niemand kan het 'waarom' iets schelen.
Als je het waarom van iets wilt inzien, verdient het - althans in de wiskunde - vaak aanbeveling het probleem uit te breiden, een meer algemene vraag aan de orde te stellen.
Neem het getal 27316478. De cijfersom is 38, dus niet door 9 deelbaar. Bij deling door 9 vertoont 38 de rest 2. Deel nu het gegeven getal door 9; ook dan blijkt de rest 2 te zijn. De uitbreiding waar ik op doelde, lukt.
Bij deling door 9 laten een getal en zijn cijfersom dezelfde rest. Het deelbaarheidskenmerk dat ik zo-even formuleerde, is hiervan een speciaal geval, te weten dat waarbij de rest 0 is. Ook het kenmerk van deelbaarheid door 3 is er een speciaal geval van. In plaats van: ... is deelbaar door 3, kun je immers ook zeggen: ...laat bij deling door 9 de rest 0,3 of 6 zijn en dat moet dan gelijkelijk opgaan voor een getal én zijn cijfersom.

abakus

Hoe nu het hierboven kursief gedrukte te laten inzien? Of laat ik wagen: hoe het handtastelijk te maken? Pak, wiskobasgewoonten getrouw, een abakus. Zet er ergens een kraaltje op. Het kan me niet schelen op welke beugel: 1, 10, 100, 1000, ... of wat dan ook. Wat valt u op?



Paarsgewijs scheelt dit soort getallen zoiets als 9990, dat wil zeggen: iets dat door 9 deelbaar is. Anders gezegd: al deze getallen laten bij deling door 9 dezelfde rest, te weten 1. Dus: *Als ik een kraal van de ene beugel naar de andere verplaats, blijft de rest na deling door 9 onveranderd.*
We veronderstellen tot hier toe dat er maar één kraal op de hele abakus zit. Maar stel nu dat er al heel wat kralen op de abakus zitten en ik verplaats er een:



Het getal dat door de witte kralen wordt aangeduid laat een zekere rest na deling door 9 (in het onderhavige geval 2). De zwarte kraal die ik verplaats, levert een bijdrage tot de rest (te weten 1) die door de verplaatsing niet verandert. Dus verandert de rest bij deling door 9 in het geheel niet. Wat ik zonet kursief heb laten drukken, blijft gelden als er meer dan één kraal op de abakus zit. En met dit inzicht gewapend, maken we schoon schip. Gegeven een getal op de abakus: we verplaatsen de ene kraal na de andere naar de beugel van de eenheden. Het oorspronkelijke getal en hetgeen nu op de beugel van de eenheden zit, laten dan dezelfde rest bij deling door 9. Maar op de beugel der eenheden zit juist de cijfersom van het gegeven getal. En hiermee is het gestelde bewezen: *Bij deling door 9 laten een getal en zijn cijfersom dezelfde rest.*

meer wiskundig

Meer wiskundig ingekleed: a en b laten bij deling door 9 dezelfde rest, wordt in wiskundetaal ook geschreven:
$a \equiv b$ mod 9 (lees: a kongruent b modulo 9).
Deze kongruentierelatie is wat men wiskundig een ekwivalentie noemt:
$a \equiv a$ mod 9;
als $a \equiv b$ mod 9, dan ook: b ≡ a mod 9;
als $a \equiv b$ mod 9 en b ≡ c mod 9, dan ook: $a \equiv c$ mod 9;
zoals gemakkelijk is na te gaan.
Er geldt echter nog meer en daar hebben we boven in het bewijs - een beetje stiekum - gebruik van gemaakt. Wat betekent dit eigenlijk: a laat bij deling door 9 de rest r?
Ik kan het ook anders zeggen: a is een negenvoud plus r.
Of anders: $a \equiv 9q + r$; waarvan q het kwotiënt en r de rest is.
Neem nu nog een b met dezelfde rest r, dus:
$b \equiv 9m + r$.
Trek de twee vergelijkingen van elkaar af en je ziet de r wegvallen en houdt een negenvoud over. Dus:
$a \equiv b$ mod 9; is hetzelfde als:
$a - b$ is een negenvoud.
Je mag derhalve in:
$a \equiv b$ mod 9; links en rechts hetzelfde optellen:
$a + c \equiv b + c$ mod 9; is ook juist, want het verschil van $a + c$ en $b + c$ is hetzelfde als van a en b.
(Van dit feit hebben we gebruik gemaakt toen we op de abakus aan het 'witte' een 'zwart' getal toevoegden.)
Je kunt nog verder gaan. Als:
$a \equiv b$ mod 9;
$c \equiv d$ mod 9;
dan ook:
$a + c \equiv b + d$ mod 9;
en evenzo met zoveel summanden als je maar wenst. Dat is iets waarvan je gebruik maakt als je de negenproef van een proef op de som toepast, bijvoorbeeld voor een optelsom: de cijfersom van de summanden optellen en met die van de som vergelijken.

kenmerk van deelbaarheid

En nu nog eens terug naar het kenmerk van deelbaarheid door 9!

$10^i - 1$;

is een getal met alsmaar negens als cijfers, dus een negenvoud. Of anders:

10^i ½ 1 mod 9.

Gegeven een getal met achtereenvolgens van rechts naar links de cijfers:

$a_0, a_1, ..., a_n$

Dus feitelijk het getal:

$a_0.1 + a_1.10^1 + a_2.10^2 + ... + a_n.10^n$

En dat is dan:

$\equiv a_0 1 + a_1 1 + a_2 1 + ... a_n.1$

kortom met de cijfersom:

$a_0 + a_1 + a_2 + ... a_n$

land van acht

Hoe zit het in andere talstelsels? Bijvoorbeeld in 'Het land van acht'? Wie speelt dan de rol van de 9? Iets om over na te denken.

figuur 5: Wiskobasbulletin, jaargang 9 nummer 6

7 Slotbeschouwing

U heeft uit de drie voorbeelden een indruk kunnen krijgen van de veelzijdigheid van Freudenthals talent. In vrijwel alle kolommen laat Freudenthal de lezer kennismaken met interessante thema's uit wiskunde en didactiek. Achteraf gezien lijkt het er haast op, of hij uit zijn kennisbestand en ervaring onderwerpen bij de kop neemt, als ware het een grabbelton.
Ogenschijnlijk had hij daarmee nog wel jaren door kunnen gaan. Maar juist om die veelzijdigheid en originaliteit én omdat vele van zijn columns nog niets aan actualiteit hebben ingeboet, zou het jammer zijn als zijn Kolommen in de vergetelheid zouden geraken.
Zou het niet een aardig idee zijn om ter gelegenheid van Freudenthals honderdste geboortedag zijn columns in het 'Wiskobasbulletin' en in 'Willem Bartjens' tot een boekje te bundelen?[3] Welke uitgever en/of vereniging durft die handschoen op te rapen ….?

Noten

1 Freudenthal, H. (1971). Möbiuslint, Kolommen, *Wiskobasbulletin*, *1*(1), 3 e.v.
Freudenthal, H. (1972). Plaatjes en Praatjes, *Kolommen*, *Wiskobasbulletin, 1*(2/3), 99 e.v.
Freudenthal, H. (1972). Ontsporingen. *Wiskobasbulletin, 1*(4), 243 e.v.
Freudenthal, H. (1972). Exponentiële Groei. *Wiskobasbulletin, 1*(5), 355 e.v.
Freudenthal, H. (1972). Gelijke monniken, gelijke kappen. *Wiskobasbulletin, 2*(1), 491 e.v.
Freudenthal, H. (1973). Windstoten van 162 km per uur. *Wiskobasbulletin*, *2*(2), 615 e.v.
Freudenthal, H. (1973). 'Hij is míjn broer'. *Wiskobasbulletin*, *2*(3), 175 e.v.
Freudenthal, H. (1973), Eerlijk spel, *Wiskobasbulletin*, *2(*4/5), 827 e.v.
Freudenthal, H. (1973). Rekenen, dat moeilijke vak. *Wiskobasbulletin*, *2*(6), 971 e.v.
Freudenthal, H. (1973). Spelletjes. *Wiskobasbulletin*, *3*(1), 4 e.v.
Freudenthal, H. (1974). Wiskobas. *Wiskobasbulletin*, *3*(2), 104 e.v.
Freudenthal, H. (1974). Een kaartkunstje met een wiskundig staartje. *Wiskobasbulletin*, *3*(3), 208 e.v.
Freudenthal, H. (1974), Tafels van vermenigvuldiging. *Wiskobasbulletin*, *3(*4/5), 312 e.v.
Freudenthal, H. (1974). De grootst mogelijke - de kleinst mogelijke. *Wiskobasbulletin*, *3*(6), 456 e.v.
Freudenthal, (1974). H. Er zit muziek in. *Wiskobasbulletin*, *4(*1), 4 e.v.

Freudenthal, H. (1974). Allerhande rond Fibonacci. *Wiskobasbulletin*, *4*(2), 100 e.v.
Freudenthal, H. (1975). Breuken en driehoeken. *Wiskobasbulletin*, *4*(3/4), 231 e.v.
Freudenthal, H. (1975). Waar gaat meer in? *Wiskobasbulletin*, *4*(5), 364 e.v.
Freudenthal, H. (1975). Listen en lagen van het kansbegrip. *Wiskobasbulletin*, *4*(6), 488 e.v.
Freudenthal, H. (1975). De snelste langzaam rijdende file. *Wiskobasbulletin*, *5*(1), 2 e.v.
Freudenthal, H.(1975). G.G.D. *Kolommen*, *5*(2/3), 2 e.v.
Freudenthal, H. (1976). Een kleurloos kleurenprobleem. *Wiskobasbulletin*, *5*(4), 2 e.v.
Freudenthal, H. (1976). De toren van Babel. *Wiskobasbulletin*, *5*(5/6), 4 e.v.
Freudenthal, H. (1976). Van ’t zelfde. *Wiskobasbulletin*, *6*(1), 3 e.v.
Freudenthal, H. (1977). Twee werklieden. *Wiskobasbulletin*, *6*(3), 2 e.v.
Freudenthal, H. (1977). Pythagoras. *Wiskobasbulletin*, *6*(5/6), 2 e.v.
Freudenthal, H. (1978). Het midden van ... *Wiskobasbulletin*, *7*(4), 2 e.v.
Freudenthal, H. (1978). Hoe weet je dat? *Wiskobasbulletin*, *8*(1), 2 e.v.
Freudenthal, H. (1979). Tovenarij? Neen, wiskunde. *Wiskobasbulletin*, *8*(2), 2 e.v.
Freudenthal, H. (1979). Hetzelfde is niet hetzelfde. *Wiskobasbulletin*, *8*(3), 2 e.v.
Freudenthal, H. (1979). Stuivertje wisselen. *Wiskobasbulletin*, *8*(4), 4 e.v.
Freudenthal, H. (1980). Zon en maan. *Wiskobasbulletin*, *9*(4/5), 20 e.v.
Freudenthal, H. (1980). Negenproef. *Wiskobasbulletin*, *9*(6), 2 e.v.

2 Freudenthal, H. (1981). Roltrappen. *Willem Bartjens, 1*(1), 3-4.
Freudenthal, H.(1981). Wat is er met het aftrekken aan de hand, *Willem Bartjens, 1*(2), 74 e.v.
Freudenthal, H. (1982). Ik was moeder en ik doe boodschappen. *Willem Bartjens, 1*(3), 131-133.
Freudenthal, H. (1982). Studentenhaver Willem Bartjens, 1(4), 214-215.
Freudenthal, H. (1982). Ganzenborden - andersom. *Willem Bartjens, 2*(1)1, 18-19.
Freudenthal, H. (1983). Dat zie je toch zó! *Willem Bartjens, 2*(2/3), 93-96.
Freudenthal, H. (1983). Ga eens even schatten. *Willem Bartjens 2*(4), 186-190.
Freudenthal, H. (1984). Appels en peren - wiskunde en psychologie. *Willem Bartjens, 3*(1), 60-65.
Freudenthal, H. (1984). Memoriseren. *Willem Bartjens, 3*(2), 124-125.
Freudenthal, H. (1984). Het is niet alles botertje tot ‘de rekenboom’. *Willem Bartjens, 4*(2), 88-91.
Freudenthal, H. (1985). In het perspectief van het Vbao, *Willem Bartjens, 4*(3), 188-190.
Freudenthal, H. (1986). Waarom is 4 < 9? *Willem Bartjens, 5*(4), 216-217.

3 Overigens: ook de rubrieken ‘Wiskunst’ van F. van der Blij verdienen bundeling.

In the same way that the 'Pillars of Hercules' are the entrance to the Mediterranean, in the 1970s Freudenthal's 'Kolommen' marked the development of the mathematical-didactical thinking of the Wiskobas group. It wasn't the case that Freudenthal put down the markers for the content; on the contrary, he often focused on current (internal) discussions and added a deeper mathematical level to them.