
# Wat te bewijzen is (30)

## Vaste rubriek in de 'Nieuwe Wiskrant'

*Martin Kindt*
*Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht*

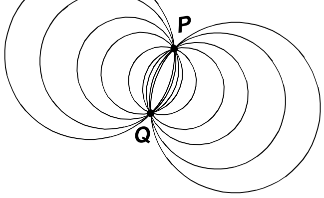
## 1 Inleiding

> 'Vanuit didactisch standpunt is er een groot verschil tussen axiomatiek en de traditionele wijze van deductie. Ik heb dat onderscheid aangeduid met de termen 'globale' en 'lokale' ordening. Iedereen weet dat het lang duurt voordat de doorsnee student een bewijs als geheel overziet. Het neemt nog meer tijd om een bepaalde stelling in relatie tot andere stellingen te overzien, zelfs als een student met pijn en moeite dit niveau heeft bereikt en hem het volgende niveau, dat van de globale ordening krijgt opgedrongen.'

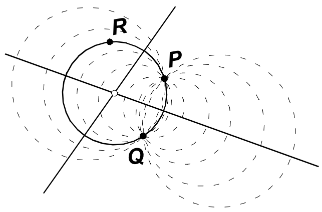
Aldus Freudenthal in 'Mathematics as an Educational Task', zijn eerste boek over wiskundeonderwijs, dat in de jaren zeventig verscheen en dat ik met rode oortjes heb gelezen. Met name het hoofdstuk over meetkunde ('The case of geometry'), waarin bovenstaand fragment te lezen valt, vond en vind ik buitengewoon mooi. Wat Freudenthal bedoelde met 'lokale ordening' kan het best worden geduid met voorbeelden. Zijn eerste voorbeeld betreft het door één punt gaan van de drie middelloodlijnen van een driehoek. Mede in verband met het vervolg kies ik hier voor een wat andere, maar nauw verwante, insteek.

## 2 Drie punten bepalen een cirkel

De basisinstrumenten voor meetkunde zijn vanouds de passer en de liniaal. Dat er in het platte vlak door één punt oneindig veel lijnen en door twee punten precies één lijn kan worden getekend, is iets dat met het hanteren van een liniaal op papier direct wordt ervaren. Als twaalfjarige had ik die voor mij triviale waarheid maar uit het hoofd te leren: *twee punten in het vlak bepalen één rechte lijn.* Aan een discussie hierover ga ik voorbij om te kijken naar een meer prikkelend probleem: *door hoeveel punten is een cirkel bepaald?* Een antwoord waarvan ik niet raar zou opkijken is *twee*, want door het middelpunt en een punt van de omtrek ligt de cirkel vast (dit is precies de manier waarop met Cabri cirkels worden gemaakt). Maar mijn bedoeling is natuurlijk: door hoeveel punten van zijn omtrek is een cirkel bepaald. Gewapend met een passer zal een leerling al experimenterend kunnen ontdekken dat twee punten (zeg $P$ en $Q$) van de omtrek niet voldoende zijn om een cirkel vast te leggen.
In eerste instantie zal zo'n experiment misschien wat primitief verlopen: probeer de passerpunt zo op papier te zetten dat bij een gekozen passeropening de cirkel door $P$ en $Q$ gaat. Dat is een soort 'trial and error'. Je hoopt dan dat er bij de leerling een blikwisseling plaatsvindt, zo van: ik zet de passerpunt in $P$, daarna in $Q$ en teken twee boogjes met dezelfde straal. Die beide boogjes bepalen het middelpunt van een cirkel die door $P$ en $Q$ gaat. Verandering van passeropening geeft dan een nieuwe cirkel door $P$ en $Q$, in principe zijn er dus oneindig veel en de collectie van al die cirkels wordt een bundel genoemd.




Kijkend naar die bundel lijkt het intuïtief wel duidelijk dat er naast $P$ en $Q$ nog maar één punt nodig is om een cirkel vast te leggen. Hoe evident is dat nu? Geldt het ook als de drie punten heel dichtbij of juist heel ver uit elkaar liggen? Die twijfel kan weliswaar wat worden weggenomen via schaalvergroting of -verkleining, maar de zekerheid lijkt toch een beetje aangetast.
Bovendien is er nog de vraag of het derde punt wel overal in het vlak kan liggen. Kortom, er zal geargumenteerd moeten worden. Een eerste stap daarbij is de ontdekking dat de middelpunten van alle cirkels in de bundel op een rechte lijn (zeg $m_{PQ}$) liggen. Als je even aanneemt dat dit zo is, kom je snel verder. Want wil de cirkel ook door een derde punt (zeg $R$) gaan, dan moet het middelpunt ook op $m_{PR}$ liggen en de lijnen $m_{PQ}$ en $m_{PR}$ hebben slechts één gemeenschappelijk punt en dat moet dan het middelpunt van *de* cirkel door $P$, $Q$ en $R$ zijn.



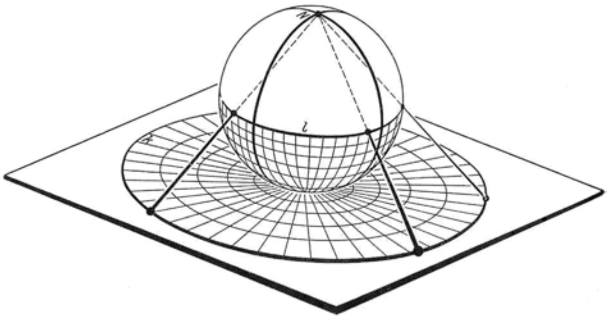
Maar nu kunnen weer nieuwe vragen worden gesteld:
- Waarom liggen alle middelpunten van exemplaren van zo'n bundel op één rechte lijn?
- Is ieder punt van die lijn ook middelpunt?
- Hebben de lijnen $m_{PQ}$ en $m_{PR}$ zeker een snijpunt?

Zo'n waarom-keten moet een keer worden afgebroken tot een voor (bijna) iedereen aannemelijk punt is bereikt. Zo zijn ooit axioma's ontstaan. Freudenthal zegt:

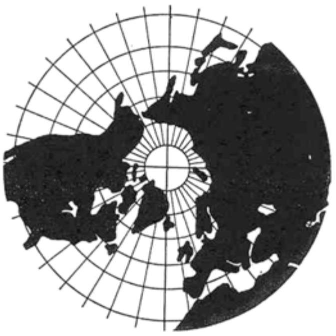
> 'Een wiskundetekst kan met axioma's beginnen omdat het kant-en-klare wiskunde is. Bij wiskunde als activiteit kan dat niet. Wat we doen als we wiskunde creëren, is lokale organisatie. Beginners in wiskunde kunnen alleen korte deductieketens produceren en begrijpen, iedere leraar weet dat ...'

## 3 Stereografische projectie

Een klassieke manier om een boloppervlak af te beelden op een plat vlak is de zogenaamde stereografische projectie. Daarbij worden de punten van de bol vanuit een uitverkoren punt van die bol geprojecteerd op het raakvlak in het tegenvoetpunt aan diezelfde bol.



De figuur met projectiecentrum $N$ (de noordpool) suggereert dat breedtecirkels worden geprojecteerd als concentrische cirkels om het punt $Z$ (de zuidpool) en dat meridianen worden afgebeeld op rechte lijnen door $Z$.
Deze projectiemethode, die wordt toegeschreven aan de astronoom Hipparchos (ca. 150 voor Christus) en die later ook bij Ptolemaios bekend was, is een van de manieren om hemelgewelf of aarde in kaart te brengen. Zo kan met projectiecentrum $N$ goed het zuidelijk en met projectiecentrum $Z$ het noordelijk halfrond worden afgebeeld.



*stereografische projectie van het noordelijk halfrond*

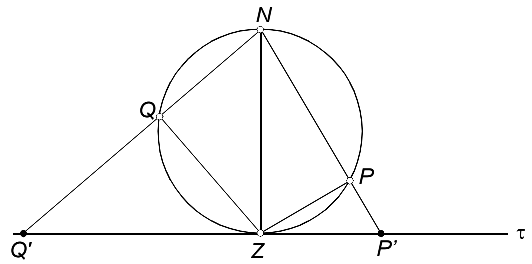
In het vervolg bedien ik me soms van geografische terminologie, waarbij het projectiecentrum steeds als noordpool wordt aangeduid. Verder gaat het om de 1-1-afbeelding van de gehele (aard)bol $\alpha$ (met als enige uitzondering het punt $N$ zelf!) op het gehele raakvlak in $Z$ (zeg $\tau$).
Die stereografische projectie heeft twee aantrekkelijke eigenschappen:
- zij is conform (dat wil zeggen hoektrouw);
- zij beeldt cirkels af op rechte lijnen of cirkels;

Van die laatste eigenschap laat de bovenste figuur in de linkerkolom al een voorproefje zien. Er is weinig kennis van de stereometrie voor nodig om te begrijpen dat niet alleen de meridianen, maar alle cirkels door $N$ op een rechte lijn worden afgebeeld. Immers, alle projecterende stralen van zo'n cirkel liggen dan in hetzelfde vlak door $N$ en dat vlak snijdt het projectievlak volgens een rechte lijn. Voor alle andere cirkels op de bol geldt dat hun projectie een cirkel in het vlak $\tau$ is.
Freudenthal gebruikt het bewijs van de eigenschappen van de stereografische projectie om het principe van lokale ordening verder toe te lichten.

## 4 Cirkels gaan over in cirkels

Een cirkel op de bol is de snijkromme van een vlak met die bol en is bepaald door drie van zijn punten $P$, $Q$ en $R$. Neem nu aan dat $P$, $Q$ en $R$ niet met $N$ in één vlak liggen. Ik volg nu Freudenthals redenering min of meer op de voet. Veronderstel dat $P'$, $Q'$ en $R'$ de beeldpunten van dit drietal zijn. Eerste bewering:

$P$, $Q$, $P'$ en $Q'$ liggen op een cirkel.




In de rechthoekige driehoek $NZP'$ is $ZP$ de hoogtelijn uit $Z$ op de schuine zijde en dus:

$$|NZ|^2 = |NP| \cdot |NP'|$$

Met $Q$ in plaats van $P$ wordt dat:

$$|NZ|^2 = |NQ| \cdot |NQ'|$$

zodat:

$$|NP| \cdot |NP'| = |NQ| \cdot |NQ'|$$

en daaruit volgt dat $P$, $Q$, $P'$ en $Q'$ op een cirkel $r$ liggen. Om dezelfde reden liggen $Q$, $R$, $Q'$ en $R'$ op een cirkel $p$. De cirkels $p$ en $r$ snijden elkaar in twee punten en liggen niet in één vlak, dus door $p$ en $r$ gaat één bol $\beta$.
Dus drie punten van $\alpha$ liggen met hun drie beeldpunten op één bol. Stel $c$ is de cirkel op de bol $\alpha$ bepaald door $P$, $Q$ en $R$ en $c'$ is zijn beeldfiguur in $\tau$.

De bol β die bepaald wordt door $P$, $Q$, $R$ en $P'$ bevat ook $Q'$ en $R'$. Deze bol snijdt τ volgens een cirkel $c^*$ die nu ook $Q'$ bevat. Dit geldt voor ieder punt $Q$ van $c$. Dus $c'$ is vervat in $c^*$. Beschouwing van de stereografische projectie in omgekeerde richting geeft nu $c^* = c'$.
Dus $c'$ is een cirkel. Dus gaan cirkels over in cirkels. Freudenthal gaat dan verder met het bewijs van de invariantie van hoeken onder stereografische projectie, maar dat laat ik hier even weg. Vervolgens zegt hij:

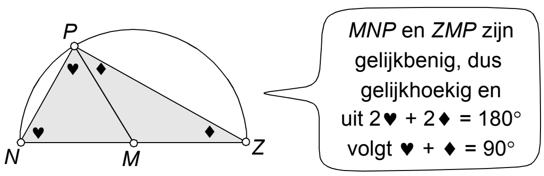
> 'Is dit geen mooi bewijs? Natuurlijk kan men het ook ingewikkelder doen. Men kan bijvoorbeeld de stereografische projectie als inversie van een bol met middelpunt $N$ en straal $NZ$ opvatten. Men kan de stelling ook algebraïsch bewijzen en als men dat handig doet, hoeft het niet ingewikkeld te zijn en kan het nieuwe inzichten geven.'

## 5 Vragen staat vrij

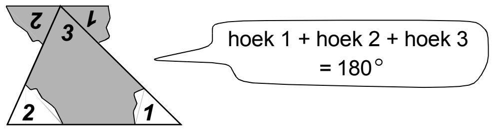
Freudenthals bewijs bevat grote stappen, althans voor de lezer die niet ingewijd is in de klassieke meetkunde. Dat is natuurlijk opzet, want dan kan hij tussenvragen stellen of laten stellen. Ik meng hier zijn reflecties met mijn eigen gedachten en loop het vorige bewijs langs.

*Waarom staat ZP loodrecht op NP?*

In de Engelse uitgave van Freudenthals boek staat: 'this is the angle in the semicircle'. In de Duitse versie staat: 'das ist doch der Thales'. Met de stelling van Thales wordt in veel landen bedoeld de stelling over de evenredigheid van lijnstukken waarin de opstaande zijden van een driehoek worden verdeeld door een lijn evenwijdig aan de basis. Bij ons (net als in Duitsland blijkbaar) is het de stelling over de rechte hoek die bij een halve cirkelboog past. Als je deze stelling niet eerder bent tegengekomen, wil je wel worden overtuigd door een bewijs:



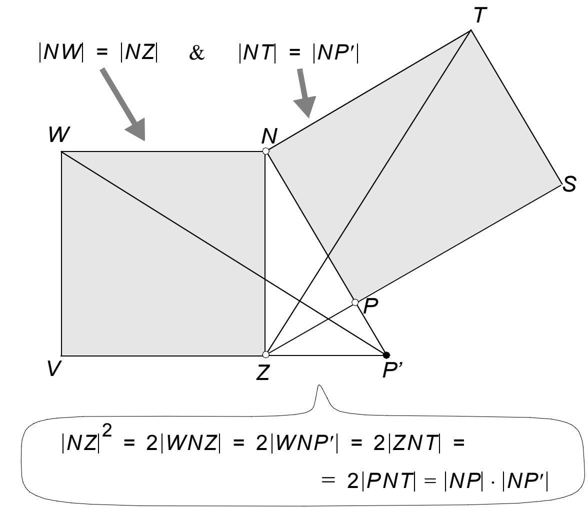

Deze stelling (met zijn omgekeerde), die een grote reikwijdte heeft en wat dat betreft van alle stellingen uit de klassieke elementaire meetkunde misschien alleen de stelling over de hoekensom in een driehoek en de stelling van Pythagoras boven zich moet dulden, zou wat mij betreft de prominente plaats in het meetkundeonderwijs van de onderbouw terug moeten krijgen. Het hier gegeven bewijs berust onder andere op de stelling dat in een gelijkbenige driehoek de basishoeken gelijk zijn. Dit laatste is typisch een voorbeeld van een intuïtief te vatten waarheid. Knip een gelijkbenige driehoek uit papier, leg de onderkant boven en niemand zal eraan twijfelen dat de omgeklapte driehoek weer precies in de opening past. Bij het 'terugde-




duceren' ben je op een punt aangeland waar verdere vragen op muggenzifterij lijken. De stelling betreffende de hoekensom is van een ander kaliber en verdient wél een overtuigende redenering. Het afscheuren van de drie hoekjes van een papieren driehoek en het aan elkaar leggen met de constatering dat ze een gestrekte hoek vormen (zoals dat nu in sommige methoden gebeurt) is een experiment van een lagere orde dan de zojuist beschreven actie met de gelijkbenige driehoek die wel degelijk inzicht oplevert. In een oud Spaans meetkundeboek vond ik ooit het bovenstaande plaatje waarin gesuggereerd wordt om twee hoeken af te scheuren en die na draaiing over 180° vast te plakken aan de tophoek. Dat de twee van de basis afgescheurde benen in elkaars verlengde komen te liggen is intuïtief duidelijk als je gelooft dat er door de top van een driehoek slechts één lijn parallel met de basis kan worden getrokken.

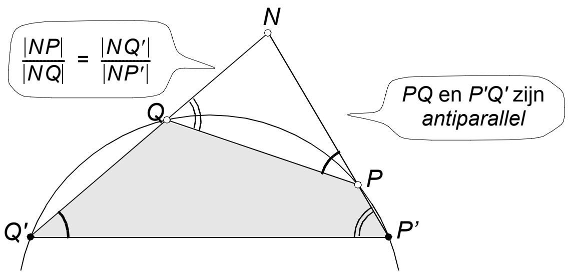
*Waarom geldt:* $|NZ|^2 = |NP| \cdot |NP'|$ *?*

Dit was vroeger een bekende eigenschap van de rechthoekige driehoek, die gebruikt werd bij het bewijs van de stelling van Pythagoras. Het is een gevolg van de gelijkvormigheid van de driehoeken $NPZ$ en $NZP'$.
Euclides vermijdt bij zijn (eerste) bewijs van de stelling van Pythagoras de gelijkvormigheid en toont via de congruentie van de driehoeken $ZNT$ en $WNP'$ aan dat het vierkant $NZVW$ en de rechthoek $NPST$ (met $NT$ even lang als $NP'$) dezelfde oppervlakte hebben.



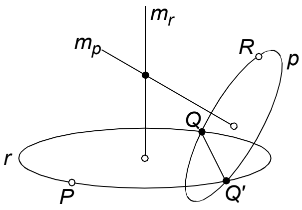

*Waarom volgt uit* $|NP| \cdot |NP'| = |NQ| \cdot |NQ'|$ *dat P, Q, P' en Q' op een cirkel liggen?*

De gelijkheid van de twee producten impliceert de gelijkheid van twee quotiënten. Daaruit volgt dat driehoek $NPQ$ gelijkvormig is met $NQ'P'$, dus $\angle NPQ = \angle NQ'P'$ met als gevolg $\angle NPQ + \angle NPP' = 180°$. Vierhoek $P'PQQ'$ is dus een koordenvierhoek.




De laatste stap is voor een VWO-leerling van nu met N&T-profiel (en zijn wiskundeleraar) direct te volgen, maar voor veel anderen resten hier nog vragen. Het draait om de stelling dat de hoekpunten van een vierhoek dan en slechts dan op een cirkel liggen als de sommen van paren overstaande hoeken aan elkaar gelijk (dus 180°) zijn, ofwel als de overstaande zijden antiparallel zijn.

*Waarom gaat er één bol door twee cirkels die elkaar in twee punten snijden (en niet in één vlak liggen)?*




Zoals er een bundel van cirkels is die een gegeven lijnstuk als gemeenschappelijke koorde hebben, zo is er een bundel van bollen die een gegeven cirkel bevat. Je hoeft zo'n cirkelbundel maar om zijn as van middelpunten te wentelen om in te zien dat dit zo is; alle cirkels worden bollen en de gemeenschappelijke koorde wordt een gemeenschappelijke cirkel. De middelpunten van al die bollen liggen op wat de *as* van die cirkel wordt genoemd. Het eventuele middelpunt van de bol die twee gegeven cirkels $p$ en $r$ bevat, zal dus op de beide assen $m_p$ en $m_r$ moeten liggen. Blijft over te bewijzen dat die assen elkaar snijden in het geval dat de gegeven cirkels elkaar in twee punten (hier $Q$ en $Q'$) snijden. Als de cirkels niet in één vlak liggen zijn die assen duidelijk niet evenwijdig, maar ze zouden elkaar nog kunnen kruisen. Om aan te tonen dat dit niet het geval is, moet er een vlak worden gevonden waarin beide assen liggen. Dat vlak zal het symmetrievlak moeten zijn van de figuur gevormd door de twee snijdende cirkels ofwel het middelloodvlak van $Q\,Q'$.

Om hard te maken dat $m_p$ en $m_r$ inderdaad in dat middelloodvlak liggen, zijn beschouwingen over de onderlinge loodrechtheid van lijnen en vlakken nodig.

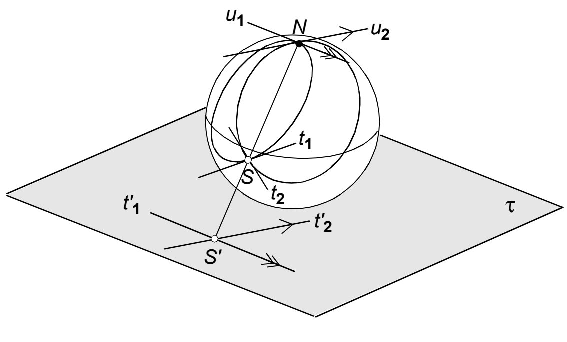
Dat twee (niet coplanaire) snijdende cirkels één bol bepalen is equivalent met het feit dat een bol wordt vastgelegd door vier punten die niet in één vlak liggen. Dat laatste feit kan dan verklaard worden met het door één punt gaan van de middelloodvlakken van vier (ja, zelfs zes) puntenparen die uit het viertal kunnen worden gevormd en dat kan weer bewezen worden met ... enzovoort. Zo roept de beantwoording van iedere vraag weer nieuwe en interessante vragen op. Freudenthal:

> 'Het is steeds hetzelfde: stel me een vraag! Er zijn mensen die alles wat men bij een bewijs aan vragen kan stellen in dat bewijs proppen of met hulpstellingen voorbereiden. Dat is een methode om meetkunde te vermoorden.'

Er blijft nog wel meer te vragen bij de stappen in Freudenthals bewijs. Bijvoorbeeld: waarom snijdt een bol een vlak volgens een cirkel. Naar mijn idee zijn echter de meest klemmende kwesties nu wel opgehelderd.

## 6 Hoektrouw

Dat de stereografische projectie hoeken tussen krommen op de bol invariant laat, wordt eenvoudig aangetoond via de hoek tussen twee cirkels op de bol.
Een hoek op de bol in een punt $S$ wordt gemeten als hoek in het raakvlak aan de bol in $S$, dus als hoek tussen twee raaklijnen (zeg $t_1$ en $t_2$). Zo'n hoek is dan gelijk aan de hoek tussen de twee snijcirkels van de bol met de vlakken $(N, t_1)$ en $(N, t_2)$. De hoek tussen twee cirkels die elkaar in twee punten snijden, manifesteert zich in beide snijpunten, in dit geval dus ook in het punt $N$. Anders gezegd: de hoek tussen de bedoelde cirkels is ook gelijk aan de hoek tussen de raaklijnen - zeg $u_1$ en $u_2$ - aan die cirkels in $N$. Maar die raaklijnen in $N$ aan beide cirkels zijn parallel aan het projectievlak, ze liggen immers in het raakvlak aan de bol in $N$. De projecterende vlakken van $t_1$ en $t_2$ snijden het projectievlak $\tau$ volgens lijnen die parallel zijn met $u_1$ en $u_2$.




Gevolg: $\angle(t_1, t_2) = \angle(u_1, u_2) = \angle(t'_1, t'_2)$
Freudenthal gebruikt niet de noordpool, maar juist de zuidpool in zijn bewijs en merkt op dat de projectie van een cirkel door $Z$ (en niet door $N$) een cirkel is die in $Z$ raakt aan zijn origineel op de bol. De rest laat zich raden.

## 7 Freudenthal, een anti-globalist?

Lokale ordening is een belangrijk principe in de (didactiek van de) meetkunde. Het zijn niet de minste wiskundigen die zich daaraan 'schuldig' hebben gemaakt. Freudenthal

noemt en roemt in dit verband Coxeter, auteur van het magistrale werk ‘Introduction to Geometry’, alsook Hilbert, tóch de vader van de moderne axiomatiek, die samen met Cohn Vossen het prachtige ‘Anschauliche Geometrie’ schreef (in Engelse vertaling ‘Geometry and the Imagination’).
Zelf wil ik hier nog een wat minder lijvig boekwerk aan toevoegen, namelijk Stanley Ogilvy’s ‘Excursions in Geometry’. In het Profi-project is in de teksten van vooral Aad Goddijn het principe van de lokale ordening in onderwijspraktijk gebracht (nu verkrijgbaar bij het Freudenthal Instituut als ‘Geometry with applications and proofs’). Tot slot geeft ik nogmaals het woord aan de ‘anti-globalist’ HF:

> ‘Lokale ordening is niet een ongeoorloofde of oneerlijke activiteit in de wiskunde. Het is een algemeen aanvaarde instelling van de volwassen beoefenaar van zuivere en toegepaste wiskunde, ook al zou hij zulke oefeningen nooit publiceren.’