H. Freudenthals wiskundige werk

Tonny A. Springer
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

In deze HF100 special wordt alleen ingegaan op de betekenis die Hans Freudenthal heeft voor het wiskundeonderwijs. Daarbij wordt voorbijgegaan aan het feit dat Freudenthal in eerste instantie een voortreffelijke wiskundige was. In dit artikel schetst Prof. T. A. Springer de betekenis van Freudenthals werk als wiskundige.

Hans Freudenthal is in Nederland vooral bekend als coryfee van de didactiek van het wiskundeonderwijs. Hij was een zeer veelzijdig intellectueel, die van vele markten thuis was. Zijn interesse voor didactiek was er al in de jaren dertig van de vorige eeuw. Maar in die tijd moet wiskundig onderzoek toch wel zijn eerste interesse zijn geweest, zoals een blik op zijn publicatielijst leert. Zijn voornaamste bijdragen aan wiskundig onderzoek liggen op het terrein van wat men in Nederland 'zuivere wiskunde' pleegt te noemen (een niet erg gelukkige naam). Freudenthals bijdragen hebben een goede reputatie en worden nog steeds gebruikt. Goede wiskunde verjaart niet.
Die bijdragen hebben Freudenthals reputatie in de wiskundewereld gevestigd. Naar mijn mening ontleende hij zijn gezag in de wereld van de wiskundedidactiek onder andere ook aan zijn reputatie als wiskundige. Ik wil proberen hier iets te zeggen over het werk waarop die reputatie berust en de achtergrond ervan.
Freudenthal zelf is niet erg mededeelzaam geweest over die achtergrond. Hij vertelde er wel eens iets over en er is het een en ander te vinden in autobiografisch-achtige geschriften. In de eerste plaats in het boek 'Schrijf dat op, Hans; Knipsels uit een leven' (Meulenhoff, 1987), geschreven toen hij ongeveer tachtig jaar was. Freudenthal zelf zegt dat het opzettelijk chaotisch is. Over zijn wiskundige ontwikkeling vindt men hier en daar iets. Maar ook leest men er dat de wiskunde van niet veel betekenis was in zijn leven. Er is ook wat achtergrondinformatie te vinden in de brochure 'Berlin 1923-1930' (W. de Gruyter, 1987) met anekdotische herinneringen uit Freudenthals Berlijnse studietijd. Uit dit alles krijgt men enigszins een indruk van de ontwikkeling van de jonge Freudenthal.
Om te beginnen bij het begin: Freudenthal is geboren op 17 september 1905 in Luckenwalde. Zijn vader was daar voorzanger en godsdienstleraar van de kleine Joodse gemeente. Hij groeide op in een liberaal-Joods milieu.
Vanaf zijn jonge jaren leed Freudenthal aan astma, waardoor hij veel thuis moest blijven van school. Intussen las hij. Hij moet een vraatzuchtig lezer geweest zijn van Duitse literatuur, maar ook van geschiedenis, filosofie, wiskunde ... Op zijn twaalfde begon hij al aan een boek over differentiaal- en integraalrekening (zoals dat toen heette).
Al heel vroeg was besloten dat Freudenthal wiskunde zou gaan studeren, maar het is niet duidelijk waarom. Uit zijn autobiografische boek krijgt men de indruk dat een carrière in de literatuur hem meer aantrok. Hoe het ook zij, het werd wiskunde.

Na zijn eindexamen in februari 1923 begon Freudenthal in het zomersemester van dat jaar met de wiskundestudie aan de Berlijnse Universiteit. Daar kreeg hij te maken met vermaarde wiskundigen als L. Bieberbach (toen nog niet aangetast door een nazistisch virus), E. Schmidt en I. Schur. In zijn latere studiejaren raakte hij onder de indruk van de jongere wiskundigen H. Hopf en J. von Neumann. Maar Freudenthal volgde ook colleges in andere vakken en hij las veel. In zijn Berlijnse tijd moet hij de basis gelegd hebben voor zijn grote eruditie.

In het Berlijnse wiskundeonderwijs kwamen voor die tijd moderne onderwerpen aan de orde als Hilbertruimten (Schmidt) en verzamelingstheorie (Von Neumann). Van veel belang voor Freudenthal was het college van Hopf in 1926-'27, over de toen gloednieuwe algebraïsche topologie. Freudenthal verzorgde een uitwerking ervan.
Gestimuleerd door Hopf zocht Freudenthal naar een 'wezenlijke' continue afbeelding van de 3-sfeer S^3 op de 2-sfeer S^2. De n-dimensionale sfeer S^n is het n-dimensionale boloppervlak:

$$S^n = \left\{(x_1, \ldots x_{n+1}) \in \mathrm{R}^{n+1} \middle| x_1^2 + x_{n+1}^2 = 1\right\}$$

De afbeelding (later de Hopf-vezeling genoemd) was bekend, maar het bewijs van de wezenlijkheid lukte Freudenthal niet. Hopf zelf vond in 1928 een bewijs.
Van groot belang voor Freudenthals latere loopbaan was het contact met L.E.J. Brouwer bij diens Berlijnse col-

leges over intuïtionisme in 1926-'27. Het zomersemester van 1927 studeerde Freudenthal in Parijs. Maar de colleges die hij volgde van de Franse wiskundigen vond hij ouderwets.
In Berlijn was de algebra in handen van I. Schur. Freudenthal zegt dat diens stijl hem tegenstond. Schurs werk is gebaseerd op concrete algebraïsche manipulaties en misschien had Freudenthal daar niet zoveel mee op, hoewel hij als het nodig was technisch algebraïsch werk perfect kon verrichten. De algebra die hem wel lag, was de 'abstracte' algebra, in 1931 gecodificeerd in Van der Waerdens vermaarde leerboek 'Moderne Algebra', gebaseerd op colleges van E. Noether en E. Artin. Freudenthal hoorde voor het eerst over de abstracte algebra van Artin zelf tijdens een bezoek aan Hamburg in 1930 en hij werd erdoor gegrepen. Voor veel van zijn werk in de topologie uit de jaren dertig gebruikt hij de abstracte methoden. En ook in later jaren gaf hij hoog op van die methoden. Dat heeft misschien in Nederland weleens de indruk gewekt dat 'abstracte' wiskunde het neusje van de zalm is. Dat zal niet Freudenthals bedoeling geweest zijn, denk ik. Intussen is de abstracte algebra niet abstract meer en staat anderzijds de algebra à la Schur weer in hoog aanzien. De slinger gaat heen en weer ...

Freudenthal promoveerde in 1930 met Hopf als promotor. Het promotieonderwerp ligt niet zozeer op Hopfs terrein. Het proefschrift gaat over einden van een topologische ruimte en is een voorbeeld van het gebruik van de abstracte methoden in de meetkunde. Hopf vertelt dat Freudenthal het zijn promotor bijzonder gemakkelijk maakte: hij kwam op een goede dag met een kant en klaar proefschrift aanzetten.
In het proefschrift wordt een (behoorlijke) locaal compacte topologische ruimte X uitgebreid door er een aantal punten ('einden') aan toe te voegen die samen met X een compacte ruimte vormen, een 'compactificatie' van X. Freudenthal is later nog een paar keer op de einden teruggekomen. Men komt ze tegenwoordig nog steeds tegen, evenals allerlei vormen van compactificatie. Een elegant resultaat uit het proefschrift is dat een topologische groep 0, 1 of 2 einden heeft.
In 1930 nam Freudenthal een assistentenplaats aan aan de Universiteit van Amsterdam, die hem door Brouwer was aangeboden. Dat was een positie met een voor die tijd heel behoorlijk salaris: hfl. 3500,- per jaar. In november 1930 vertrok Freudenthal uit Berlijn naar Nederland. Dat zou zijn tweede vaderland worden. Hij trouwde in 1932 met Susanna J.C. Lutter. Zij zouden vier kinderen krijgen.

Zijn eerste publicaties verschijnen ook in 1930, het begin van een grote productie. Freudenthals publicatielijst bevat meer dan zevenhonderd titels: artikelen over zeer uiteenlopende onderwerpen, boeken, leerboeken en zelfs enkele romans. Onder de artikelen zijn er ongeveer honderd met een technisch-wiskundig karakter. De meeste daarvan dateren uit de jaren 1930-1940 en 1950-1970.
Freudenthal was iemand die snel en efficiënt werkte in alles wat hij ter hand nam, en dat was bijzonder veel. Hij wekte nooit de indruk het erg druk te hebben. Ik geloof dat het niet in zijn aard lag wetenschappelijk werk lang te laten liggen om het te laten rijpen en te polijsten.
Enkele hoogtepunten van zijn wiskundige werk passeren hieronder de revue (relevante artikelen worden aan het eind genoemd). De publicaties over andere onderwerpen, in het bijzonder die over didactiek van de wiskunde, laat ik helemaal buiten beschouwing bij gebrek aan competentie.

De eerste tijdschriftpublicatie (1931b) is een artikelversie van het proefschrift. In de jaren erna verschijnen verschillende andere publicaties, voornamelijk over topologie. Een bijzonder vruchtbaar jaar was 1936, waarin niet minder dan twaalf artikelen verschenen. Daaronder twee waardevolle artikelen over topologische groepen (1936a,b) en een fundamenteel artikel (1936d) over wat nu Riesz-ruimten heet, maar ook twee artikelen over intuïtionisme (1936i, j).
Intussen had Freudenthal de algebraïsche topologie à la Hopf weer opgenomen. Het belangrijkste artikel uit die periode is zonder twijfel dat over homotopiegroepen (1937h). Dat verdient een uitweiding.
Voor een samenhangende (behoorlijke) topologische ruimte X wordt de n^e homotopiegroep $\pi_n(X)$ gemaakt, uitgaande van de continue afbeeldingen $S^n \to X$ van de n-sfeer naar X. Voor $n = 1$ krijgt men de fundamentaalgroep van Poincaré. Voor $n \geq 2$ zijn de homotopiegroepen commutatief. Freudenthals collega-assistent in Amsterdam, Witold Hurewicz, die overigens in 1936 naar de Verenigde Staten vertrok, had in Amsterdam fundamentele resultaten over de homotopiegroepen gevonden, waar Freudenthal natuurlijk van op de hoogte was. Een voor de hand liggende vraag is die van de concrete beschrijving van de homotopiegroepen $\pi_m S_n$ van de sferen (de interessante gevallen zijn die waar $m > n$). Freudenthal was de eerste die deze vraag aanpakte (in 1937h). Hij introduceerde er een elementaire constructie, tegenwoordig een standaardingrediënt van de algebraïsche topologie, de *suspensie* ('Einhängung' in loc. cit.).
Laat X een behoorlijke topologische ruimte zijn. De suspensie $S(X)$ wordt aldus verkregen: neem het product $X \times [0,1]$ - de cilinder met basis X - en knijp de bovenkant $(X,1)$ en onderkant $(X,0)$ ieder samen tot een punt. Als X de cirkel S^1 is, gelegen in het x-y-vlak van $\mathbf{R}^3$, dan wordt $S(X)$ de vereniging van twee kegels in $\mathbf{R}^3$ met basis S^1, een aan de bovenkant en een aan de onderkant. Die vereniging is topologisch hetzelfde als S^2, notatie $S(S^1) \simeq S^2$. Algemener: $S(S^n) \simeq S^{n+1}$
Dit gebruikend, construeert Freudenthal een homomorfisme van abelse groepen:

$$h_{m,n}: \pi_{m+1}(S^{n+1})$$

Hij bewijst dat $h_{m,n}$ een isomorfisme is als $2n > m + 1$ (het

bewijs is moeilijk). Daaruit volgt 'stabiliteit': $\pi_{n+p}(S^n)$ is constant voor grote n. De concrete beschrijving van deze groepen is nog steeds een onopgelost probleem. Freudenthal is na zijn pionierswerk uit 1937 niet meer serieus op deze zaken teruggekomen.
Van het werk uit de jaren voor de Tweede Wereldoorlog moet ook nog genoemd worden een fraai artikel over automorfismen van Liegroepen, gepubliceerd in 1941 in de Verenigde Staten.

In de vooroorlogse jaren moet hij zijn energie vooral gestoken hebben in wiskundeonderzoek. Maar hij had ook een onderwijstaak aan de Amsterdamse universiteit, waarbij hij probeerde de 'moderne' wiskunde te introduceren. (Ik weet niet of zijn pogingen een blijvend succes hadden.) Verder verrichtte hij veel werk voor het tijdschrift 'Compositio Mathematica'. Dat was door Brouwer opgericht, die er eindredacteur van was. Maar Freudenthal verzorgde het praktische redactionele werk (correspondentie met auteurs, enzovoort).

Freudenthals situatie veranderde drastisch na de Duitse inval in 1940. Het schijnt dat hij in 1939 wel over emigratie naar de Verenigde Staten gedacht heeft, maar het is er niet van gekomen. In het najaar van 1940 werd hij als overheidsfunctionaris van Joodse afkomst van zijn functie van conservator aan de Amsterdamse universiteit ontheven en op wachtgeld gesteld. Aan de deportaties, die in 1942 begonnen, is Freudenthal ontkomen. Hij viel in de categorie van 'gemengd-gehuwden' die voorlopig van deportatie vrijgesteld werden. Door het verloop van de oorlog in 1944-'45 is deportatie hen bespaard gebleven.
Freudenthal heeft de oorlogsjaren grotendeels thuis kunnen doorbrengen, maar in een onzekere situatie. Hij heeft in die tijd van alles ter hand genomen: wiskunde, onderwijsdidactiek, bellettrie.
De wiskundige contacten met het buitenland vielen weg, behalve die met Hopf in het neutrale Zwitserland. Over wat er in de Verenigde Staten in de topologie gebeurde kan Freudenthal niet veel te weten zijn gekomen. Hij moet achterop geraakt zijn.
Men zou verwachten dat Freudenthal direct na het einde van de oorlog zijn positie aan de Amsterdamse universiteit weer zou krijgen. Maar hij kwam in allerlei verwikkelingen terecht. Die eindigden pas toen hij in 1946 werd benoemd tot hoogleraar aan de Utrechtse universiteit met als leeropdracht 'de zuivere en toegepaste wiskunde en de grondslagen van de wiskunde'. De overgang naar de provinciestad Utrecht zinde Freudenthal niet erg, hij was liever in Amsterdam gebleven. Anderzijds moet hij voor sommigen aan de conservatieve Utrechtse universiteit een vreemde eend in de bijt geweest zijn. Maar het duurde niet lang voor Freudenthal er op waarde werd geschat. Hij werd een vooraanstaand lid van de Utrechtse universitaire gemeenschap. In 1963-'64 was hij rector van de universiteit.

In de eerste Utrechtse jaren nam Freudenthal met karakteristieke energie van alles ter hand. In de eerste plaats zijn universitaire onderwijs, dat hij opnieuw moest opzetten. Hij was de eerste die in Nederland een wiskundepracticum invoerde.
Een activiteit die hij vele jaren zou volhouden en die hem veel bevrediging gaf, was het schrijven van een wekelijkse bijdrage in het weekblad 'De Groene Amsterdammer'. De bijdragen gingen over van alles en nog wat en een aantal ervan is gebundeld met de naam 'Van sterren tot inlegzolen' (Van Loghem Slaterus, 1954). Het thema 'wiskundedidactiek' verschijnt ook in zijn activiteiten. Technisch-wiskundige publicaties treden weer meer op de voorgrond in 1951. Een voorbode van later werk is zijn publicatie over het octavenvlak (1951b). Hier is weer een uitweiding vereist.

Een projectief vlak is een verzameling waarvan de elementen *punten* heten en waarin tevens deelverzamelingen genaamd *lijnen* gegeven zijn zo dat (a) twee punten op precies één lijn liggen en (b) twee lijnen precies één punt gemeen hebben. Welbekend is het reële projectieve vlak $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$, waarvan de 'punten' zijn de lijnen door de oorsprong O van de driedimensionale ruimte $\mathbf{R}^3$ en 'punten' op een 'lijn' de lijnen zijn door O gelegen in een vlak door O. Het complexe projectieve vlak $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ wordt ook zo ingevoerd, met complexe getallen in plaats van reële.
Men kan verdergaan en een projectief vlak $\mathbf{P}^2(\mathbf{H})$ invoeren over het lichaam van de quaternionen van Hamilton $\mathbf{H}$ (ontdekt in 1843). Ik herinner eraan dat $\mathbf{H}$ een vierdimensionale vectorruimte is over $\mathbf{R}$ met basis $\{1, i, j, k\}$ en rekenregels $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $ki = -ik = j$, $jk = -kj = i$. De vermenigvuldiging in $\mathbf{H}$ is niet commutatief, maar dat is voor de definitie van $\mathbf{P}^2(\mathbf{H})$ geen probleem.
De quaternionen ontstaan door een soort 'verdubbeling' van de complexe getallen. Analoog kunnen de quaternionen 'verdubbeld' worden tot het systeeem $\mathbf{O}$ van de octaven (ontdekt door Graves, ook in 1843), een achtdimensionale vectorruimte over $\mathbf{R}$, met basis $\{1, \mathrm{i}_1, \ldots, \mathrm{i}_7\}$ en analoge rekenregels. Verdere verdubbeling is niet meer mogelijk.

Er bestaat ook een projectief octavenvlak $\mathbf{P}^2(\mathbf{H})$. Omdat de vermenigvuldiging in $\mathbf{O}$ niet meer associatief is, lukt het niet een definitie te geven in de trant van die van $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$. In 1951b definieert Freudenthal $\mathbf{P}^2(\mathbf{O})$ op een andere, meer algebraïsche manier. Dat artikel bevat ook een elegante behandeling van de octaven. Een (nieuw) hoofdresultaat van het artikel is de beschrijving van de projectieve group van $\mathbf{P}^2(\mathbf{O})$, dat wil zeggen de groep van omkeerbare afbeeldingen van $\mathbf{P}^2(\mathbf{O})$ op zichzelf die lijnen in lijnen overvoeren. Bij $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ leert de klassieke projectieve meetkunde dat de analoge groep isomorf is met de groep $PGL_3(\mathbf{R})$, de factorgroep van de groep van omkeerbare reële 3×3-matrices naar de ondergroep van veel-

vouden van de eenheidsmatrix. Freudenthal bewijst dat de projectieve groep van $\mathbf{P}^2(\mathbf{O})$ isomorf is met een exceptionele Liegroep van type E_6. Het thema 'exceptionele groepen' verschijnt hier voor het eerst. Het heeft in Freudenthals latere werk een grote rol gespeeld. De Liegroepen dragen de naam van de negentiende-eeuwse Noorse wiskundige Sophus Lie. Ze belichamen de continue symmetrieën die men in wiskunde en natuurkunde tegenkomt. Voorbeelden van Liegroepen zijn de draaiingen in de driedimensionale Euclidische ruimte en de groep $SL_n(\mathbf{R})$ van reële $n \times n$-matrices met determinant 1. De eerste groep is een compacte topologische ruimte, de tweede een niet-compacte.
Er bestaat een structuurtheorie voor Liegroepen, met als bouwstenen 'simpele' Liegroepen. De classificatie daarvan vindt men al in de negentiende eeuw in de 'thèse' van È. Cartan uit 1894. Het resultaat is een lijst van typen van simpele Liegroepen, die aangeduid worden met de symbolen A_l, B_l, C_l, D_l, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2. De vraag naar concrete realisaties van deze typen ligt voor de hand. De typen A, B, C, D worden gerepresenteerd door 'klassieke' groepen. Zo is de groep $SL_n(\mathbf{N})$ van type $A_{l\text{-}1}$. De types B en D vindt men bij orthogonale groepen (in oneven, respectievelijk even dimensie) en type C vindt men bij de symplectische groepen. De vijf overblijvende types zijn die van de *exceptionele groepen*, op het eerste gezicht nogal vreemde objecten. In de loop der jaren is echter gebleken dat ze zo vreemd niet zijn en dat ze op allerlei plaatsen opduiken.
Ik vermeldde al dat Freudenthal (in 1951b) een meetkundige beschrijving gaf van een Liegroep van type E_6, als groep van projectieve transformaties van het octavenvlak $\mathbf{P}^2\mathbf{Q}$. Is er ook een meetkundige beschrijving van groepen met type E_7 en E_8 waarbij het octavenvlak een rol speelt?

Freudenthal publiceerde een lange serie artikelen (1954b,c, 1955a,b, 1959b,c, 1963b) over deze vraag. Zij geven een gedetailleerde studie van meetkundige systemen met exceptionele automorfismengroepen. Zo'n systeem is bijvoorbeeld de 'metasymplectische' meetkunde (behandeld in 1959c en 1963c), met automorfismengroep van type E_8. Freudenthal gebruikt in zijn studie een algebraïsche machinerie, maar ook synthetisch-meetkundige redeneringen. Zijn algebraïsche resultaten kunnen worden gezien als een gedetailleerde studie van zekere representaties van exceptionele groepen. De resultaten zijn mijns inziens nog steeds van waarde.

Freudenthal had in de jaren van deze publicaties veel contact met de jonge Brusselse wiskundige J. Tits, een van de weinigen die toen in exceptionele groepen geïnteresseerd waren. Het werk van Tits evolueerde later naar zijn theorie van gebouwen, waarin de meetkundige aspecten van de simpele Liegroepen (exceptioneel of niet) tot hun recht komen. De gebouwentheorie is intussen een indrukwekkend stuk wiskunde geworden, met vele toepassingen in meetkunde en groepentheorie.

Een intrigerend object dat men bij Freudenthal tegenkomt (in 1959c, 1962b, 1962c) is het 'magische vierkant'

B_1	A_2	C_3	F_4
A_2	$A_2 \times A_2$	A_5	E_6
C_3	A_5	D_6	E_7
F_4	E_6	E_7	E_8

De kolommen worden geïndexeerd door de vier lichamen **R**, **C**, **H**, **O** en de rijen door een meetkunde (of, in een andere versie, door dezelfde vier lichamen) en in het snijpunt van een rij en een kolom, staat een groep die iets te maken heeft met de index van de rij en de kolom. Voor de dimensies van die groep bestaat een uniforme regel. Het magische vierkant is een heuristisch object, een poging tot systematisering van aspecten van de exceptionele groepen. Zulke pogingen zijn interessant en ze zijn nog actueel.

Freudenthal heeft kortere artikelen gepubliceerd over verschillende aspecten van de theorie van de Liegroepen (bijvoorbeeld 1953b,c,d, 1954d,e, 1956e, 1958c). Ik wil daar niet verder op ingaan. Wel wil ik iets zeggen over het leerboek 'Linear Lie Groups' (1969b), met mede-auteur H. de Vries. Het is een efficiënte inleiding in de Lietheorie, dat veel interessant materiaal brengt dat niet in leerboeken te vinden was. Toch heeft het boek niet veel succes gehad. Vermoedelijk is de reden daarvan de ongebruikelijke terminologie. In zijn artikelen over Liegroepen gebruikte Freudenthal dezelfde terminologie als Cartan in 1894. In de jaren na de Tweede Wereldoorlog werd de Lietheorie door verschillende wiskundigen opnieuw opgenomen en uitgebouwd, waarbij zich een nieuwe terminologie ontwikkelde. Die heeft Freudenthal nooit gebruikt. In 1969b introduceert hij een eigen terminologie, die wel consistenter is dan de andere, maar die nooit ingang gevonden heeft. Zo heet een 'Cartanalgebra' bij Freudenthal een 'stam' (Engels 'trunk') en 'Weylgroep' wordt 'kaleidoscoopgroep'.
Iemand die er wat vertaalwerk voor over heeft, zal zien dat het boek veel origineels bevat. Het is, in tegenstelling tot de meeste voorgaande publicaties, in het Engels geschreven. Freudenthals wiskundige artikelen zijn tot dan in het Duits (de meeste) of in het Frans of Nederlands. Hij raakte pas goed vertrouwd met het Engels tijdens zijn gasthoogleraarschap aan Yale University in 1960-1961.

Uit het meetkundig werk moeten ook genoemd worden artikelen over 'ruimteproblemen' (bijvoorbeeld 1956a en 1964b) en het overzicht 1964c. Van volkomen andere aard is Freudenthals ontwerp van de kosmische taal 'Lincos', voor communicatie met intelligente wezens in het heelal (1957d en 1960d). Dat lijkt misschien charlatanerie, maar is het niet. Zijn ontwerp is zoiets als een formeel systeem, gebouwd op het idee dat intelligente wezens basale wiskunde zullen begrijpen. Het is een van de vele originele ideeën die men in Freudenthals werk tegenkomt. Na 1965 was Freudenthals wetenschappelijk werk vooral op het terrein van het wiskundeonderwijs, dat hier niet aan de orde komt. Op dat terrein is hij tot zijn dood in 1990 actief geweest.

Op zijn honderdste geboortedag staat zijn wiskundig werk nog steeds in aanzien.

Literatuur

De aanduiding van de artikelen naar jaartal is gebaseerd op een volledige lijst van Freudenthals wiskundige publicaties, te vinden in 'Selecta' die zullen verschijnen bij het Publishing House van de European Mathematical Society, hopelijk in 2006.

1931b. Über die Enden topologischer Räume und Gruppen. *Math. Zeitschrift, 33*, 692-713.

1936a. Einige Sätze über topologische Gruppen. *Annals of Math., 37*, 46-56.

1936b. Topologische Gruppen mit genügend vielen fastperiodischen Funktionen. *Annals of Math., 37*, 57-77.

1936d. Teilweise geordnete Moduln. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 39*, 641-651.

1936i. Zum intuitionistischen Raumbegriff. *Comp. Math., 4*, 82-111.

1936j. Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln. *Comp. Math., 4*, 112-116, 118.

1937h. Über die Klassen der Sphärenabbildungen I. *Comp. Math., 5*, 299-314.

1941. Die Topologie der Lieschen Gruppen als algebraisches Phänomen. *Annals of Math., 42*, 1051-1074.

1951b. Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie, Mathematisch Instituut der R.U. Utrecht. (met correcties herdrukt in *Geom. Dedic., 19* (1985), 7-63).

1953b. Sur le groupe exceptionnel E_7. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 56*, 81-89.

1953c. Sur des invariants caractéristiques des groupes semi-simples. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 56*, 90-94.

1953d. Sur le groupe exceptionnel E_8. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 56*, 95-98.

1953e. Zur ebenen Oktavengeometrie. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 56*, 195-200.

1954b. Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene I. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 57*, 215-230.

1954c. Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene II. *Proceedings Kon. Akad. v. Wet., 57*, 363-368.

1954d. Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen, I. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 57*, 369-376.

1954e. Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen, II. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 57*, 487-491.

1955a. Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene III. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 58*, 151-157.

1955b. Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene IV. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 58*, 277-285.

1956a. Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems. *Math. Zeitschrift, 63*, 374-405.

1956e. Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen, III. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 59*, 511-514.

1957d. Grundzüge eines Entwurfes einer kosmischen Verkehrssprache. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 69*, 353-363.

1958c. Zur Klassifikation der einfachen Lie-Gruppem. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 60*, 379-383.

1959b. Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene V, VI,VII. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 62*, 165-201.

1959c. Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene VIII, IX. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 62*, 447-474.

1960d. (boek) *Lincos, design of a language for cosmic intercourse*. Amsterdam, 220 p.

1962c. Symplektische und metasymplektische Geometrien. *Proceedings 1959 Colloq. Algebraical and Topological Foundations*, 29-33.

1962d. Bericht über die Theorie der Rosenfeldschen elliptischen Ebenen. *Proceedings 1959 Colloq. Algebraical and Topological Foundations*, 35-37.

1963b. Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene X, XI. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 66*, 457-487.

1964b. Das Helmholtz-Liesche Raumproblem bei indefiniter Metrik. *Math. Annalen, 156*, 263-312.

1964c. Lie groups in the foundation of geometry. *Advances in Mathematics 1*, 145-190.

1969b. (boek, met H. de Vries) *Linear Lie Groups*. Academic Press, New York-London.

In this special HF100 edition the emphasis is placed only on the significance of Freudenthal for mathematics education, thus almost ignoring the fact that originally Freudenthal was a great mathematician. In this article, prof. T. A. Springer outlines the significance of Freudenthal's work as a mathematician.