



## Afstandsonderwijs

Frederik van der Blij,  
Gorsse!

*Hoe ga je communiceren met een buitenaardse beschaving waarvan je alleen voldoende intelligentie en een staat van technologie veronderstelt zodat radiosignalen ontvangen kunnen worden? Je moet dan eerst een taal construeren; een taal als Lincos, bedacht door Hans Freudenthal in een tijd dat de eerste Spoetnik nog moest worden gelanceerd. Frederik van der Blij dook in het boek 'Lincos' en beschrijft de structuur van de 'blijp'taal'*

### 1 Inleiding

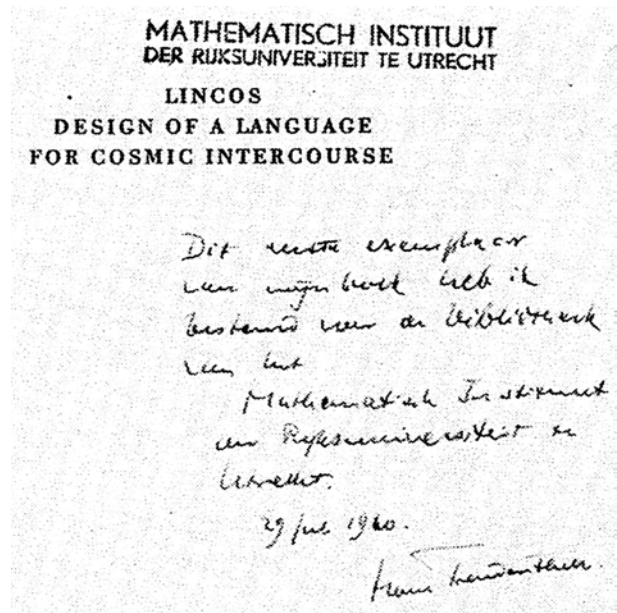
De wetenschappelijke publicaties van Freudenthal zijn talrijk en zeer gevarieerd. Ik kies voor dit artikel uit het werk van Freudenthal niet een onderwerp uit de zuivere wiskunde, zoals de analyse, de meetkunde, de topologie of de Liegroepen, ook niet uit de statistiek en waarschijnlijkheidsrekening, niet uit de geschiedenis van de wiskunde, of de didactiek en het wiskundeonderwijs, maar uit de logica, in het bijzonder de relatie tot de taal.

Op 27 april 1957 werd door Hans Freudenthal een publicatie voor de Proceedings van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen aangeboden met als titel: 'Grundzüge eines Entwurfes einer kosmischen Verkehrssprache'. In dit artikel van twaalf pagina's bespreekt hij het taalkundige probleem om door middel van een radioverbinding met 'intelligente' buitenaardse wezens in contact te treden. Hij kondigt een ontwerp aan van een taal, door hem met dit doel ontworpen, die hij 'Lincos' (Lingua Cosmica) noemt.

In 1960 verschijnt van zijn hand in de serie 'Studies in Logic and the Foundations of Mathematics' de studie 'Lincos, Design of a language for cosmic intercourse. Part I'. De inleiding omvat 44 pagina's en is gedagtekend 'Utrecht, December 23rd, 1957'. Dit eerste deel omvat 224 pagina's; een tweede deel is nooit verschenen.

In het 'Utrechts Nieuwsblad' van 30 september 1957 verschijnt een bericht over de kosmische taal, in de 'Groene Amsterdamer' van 26 oktober 1957 schrijft Freudenthal een artikel met als titel 'Een poging om een taal voor kosmisch verkeer te ontwerpen'. En een week later verschijnt in het zelfde weekblad een gedicht en cartoon van Joost 'Aan den Hooggeleerden Heere Prof. Dr. Hans Freudenthal, opsteller van d'eerste Beginselen van de kosmostael'.

Op het Mathematisch Instituut wordt met spanning meegeleefd met de verdere stroom van publicaties in binnen- en buitenland over Lincos, het manuscript wordt 's avonds in de kluis opgeborgen.



figuur 1: titelpagina van het eerste exemplaar van 'Lincos'

In het voorjaarsnummer van 'Delta', een Engelstalig tijdschrift over Nederlandse cultuur en wetenschap, waarin Freudenthal dan regelmatig publiceert, verschijnt in het voorjaar van 1958 een artikel van zijn hand met als titel 'Towards a cosmic language'. En daarna verschijnen regelmatig in heel verschillende tijdschriften verdere artikelen van zijn hand over dit onderwerp. Als voorbeeld noem ik 'Towards a Cosmic Language' in 'Cosmic Search' (winter 1980).

Voor we op de inhoud van 'Lincos' ingaan, willen we eerst nog wat terugblikken. Altijd al was taal een onderwerp van onderzoek voor Freudenthal. In 1951 verscheen

in de 'Handelingen' van het XIX<sup>e</sup> Vlaamse Filologencongres een artikel met als titel 'Omgangstaal en Logistische taal'. In 1954 verscheen in 'Wetenschap en Samenleving' een artikel met als titel 'Pleidooi voor de toren van Babel' en het volksuniversiteitsboekje 'Exacte Logica' werd vertaald als 'Einführung in die Sprache der Logik' en 'The Language of Logic'.

Van drie verschillende kanten is er belangstelling voor Lincos: vanuit de wiskunde, speciaal mathematische logica, vanuit de groep zoekers naar buitenaards leven en vanuit de zuiver taalkundigen. Van het laatste is het artikel van Freudenthal in 'Current trends in Linguistics' in 1974 met als titel 'Cosmic Language' een bewijs. Maar nu is het hoog tijd om over te gaan op de inhoud van Lincos.

## 2 Lincos

Het gaat om het ontwerpen van een nieuwe taal, maar met een heel ander uitgangspunt als dat voor het ontwerp van bijvoorbeeld Esperanto. Daarbij werd immers uitgegaan van bestaande en aan de leerling bekende talen. Ook is de opdracht niet te vergelijken met het ontwerpen van een geheimtaal voor gecodeerde berichten. Dan moet de ontcijfering voor niet-bevoegden zo moeilijk mogelijk zijn, hier moet de ontcijfering voor iedereen zo eenvoudig en duidelijk mogelijk zijn.

Het feit dat Lincos uitgaat van alleen radio- en geen televisiecontact geeft weer eigen beperkingen. Dat totaal geen beeld van de bedoelde ontvanger bekend is, komt er nog bij als extra probleem. Freudenthal schrijft heel nauwkeurig dat hij uitgaat van ontvangers, die een intellect bezitten dat niet te veel van het menselijke afwijkt. Als ik me goed herinner besprak Hugo Brandt Corstius het boek 'Lincos' onder de titel 'Freudenthal definieert een mens'.

In een bijdrage in 1970 aan 'Sind wir allein im Kosmos' schrijft Freudenthal:

'Wie musz das Wesen beschaffen sein, das diese Paragraphen versteht?' Alle diese Beschaffenheiten zusammen charakterisieren, den, der das ganze Programm versteht, d.h. den Menschen. Vielleicht hilft eine Arbeit wie Lincos uns, das besser zu verstehen, was den Menschen zum Menschen macht.'

Freudenthal zelf speculeert over de grootheid van het heelal, in zo'n grote verzameling zal toch wel ergens zo'n op de mens gelijkend intellect zijn, hij citeert 'In het huis mijns Vaders zijn vele woningen'. Dat gezegd zijnde, hoe nu te beginnen. Het is voor Freudenthal duidelijk: met de wiskunde! Dat is immers een algemeen menselijke taal, onafhankelijk van de omgangstaal van de gebruiker. Bovendien gaat de wiskundige taal uit van eenduidige symbolen, 4 is 'vier', al zegt de een er 'four', de ander

# Aen den Hooggeleerden Heere Prof. Dr. Hans Freudenthal

Opsteller van d'eerste Beginselen van de  
Kosmostaal. —



Strackx kunnen wy dus met de Ruymte converseeren,  
En A plus B-kwadraet wordt: Welkom, Kosmoliet!  
Al ligt Uw Wysheid ver van myn beperckt Gebiedt,  
Ick ben bereyd Uw vreemde Freudentaal te leeren.

Want dit is immers, wat wy, met U, zo begeeren:  
Te weten hoe een ander ons Gestuntel ziet  
En wat er verder in Godts Sterrenryck geschiedt;  
En lukt het misschien niet, wy kunnen 't toch proberen.

Doch, hooggeleerde Heer, alvorens wy gaen seynen  
Met X en Y en Q, zyt ghy er op bedacht,  
Dat wellicht niemand op Uw aardsche Vraeghen wacht?  
Wy dencken wellswaar langs recht getrocken Lynen,  
Maer slaen een vreemd Figuur, wanneer wy onverwacht  
Met A plus H-kwadraet in het Heelal verdwynen.

figuur 2: cartoon en gedicht in 'De Groene Amsterdammer'

'quatre' en weer een ander er 'quattro' tegen. En wat aangegeven wordt met het symbool 'bank' is zonder de context onduidelijk, het woord 'blad' heeft afhankelijk van de context twee verschillende meervoudsvormen. Peano heeft in het einde van de negentiende eeuw wiskundige artikelen geschreven met uitsluitend gebruik van wiskundige en logische symbolen. Maar daar heb je niet genoeg

aan voor berichten naar onze buitenaardse luisteraars. Toch lijkt de wiskunde een goed begin. En ook Fred Hoyle stelt in zijn sciencefictionroman 'The Black Cloud' uit 1957 voor om bij een poging om met buitenaardse intelligentie in contact te komen met natuurwetenschap en wiskunde te beginnen. In de roman 'Contact' van Carl Sagan (1985) zoekt de buitenaardse intelligentie contact met ons door als begin de rij van de priemgetallen te zenden.

### 3 Wiskunde

Freudenthal begint met de begrippen groter en kleiner te introduceren. Natuurlijk kan dit niet axiomatisch, we beginnen met een groot aantal voorbeelden en hopen dat daaruit het begrip wordt herkend. Dus sturen we eenvoudige piepsignalen en een duidelijk ander signaal (door ons aangegeven met @) in de volgende opstelling:

ooo @ o  
ooooo @ oo

en zo nog even doorgaand totdat we denken dat de ontvanger begrepen heeft dat @ betekent 'is meer dan'. Het is duidelijk dat analoog 'is minder dan' en 'is evenveel als' aangebracht kunnen worden. Ook 'som' en 'verschil' zijn analoog te behandelen. De natuurlijke getallen worden in het tweetallig stelsel geschreven, het is niet zeker of onze hoorders vingers hebben, en zo ja, vermoedelijk geen tien. Maar voor het gemak van mijn aardse lezers gebruik ik in de voorbeelden onze tientallige notatie.

Met de invoering van getallen en de bewerkingen is een stukje rekenkunde ontwikkeld. Maar in de algebra spelen 'letters' een grote rol. Eerst worden letters als variabelen ingevoerd, door regels als:

$$a + 2 = 2 + a$$

$$3 + a = a + 3$$

$$a + b = b + a$$

Daarna worden letters als onbekenden uit vergelijkingen aan de orde gesteld via zinnen als:

$$?x . x + 5 = 4$$

Freudenthal merkt op dat in de veelal gebruikelijke opbouw van de wiskunde alleen proposities worden gebruikt en geen vragen. In een leerproces zijn deze onontbeerlijk. Daarom worden nu vele van deze zinnen, alle beginnend met een vraagteken en niet voorzien van een antwoord, aan de orde gesteld. Tegelijkertijd worden dus het vraagteken en de letter als onbekende geïntroduceerd. De implicatie is al eerder ingevoerd, en dus kan nu na de vraag duidelijk het antwoord gegeven worden in de vorm:

$$?x . x + 4 = 7$$

$$x + 4 = 7 \leftrightarrow x = 3$$

en zo weer vele voorbeelden.

Daarna komt de introductie van letters als constanten, zoals  $e$ ,  $\pi$  en zelfs  $i$ .

De introductie van complexe getallen gaat als volgt. Eerder zijn het begrip 'element van' en de afkorting 'Rea' voor reële getallen ingevoerd. Dan wordt van een aantal bekende getallen vermeld dat ze tot 'Rea' behoren. Daarna wordt opgemerkt dat  $i$  niet tot de reële getallen behoort en  $a + bi$  met  $b$  ongelijk 0 evenmin.

De afkorting 'Com' voor complexe getallen wordt ingevoerd en zowel 1 als  $a + bi$  (nu zonder de beperking dat  $b$  ongelijk 0 is) worden gemeld als complexe getallen. Maar ook wordt nog expliciet gemeld dat de reële getallen een deelverzameling van de complexe getallen zijn. Na de opmerking 'We do not dwell on complex numbers and their arithmetics as they do not cause any difficulty', volgen nog enkele opmerkingen over de complexe getallen. Ik geef ze niet weer in de Lincossymbolen maar vertaal ze even:

Als  $a$ ,  $b$  en  $c$  complexe getallen zijn en  $a$  ongelijk 0 is, is er een complex getal  $x$  zodat:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

En de volgende Lincoszin luidt vertaald:

Als  $a$ ,  $b$  en  $c$  tot Rea behoren en  $a$  positief is, volgt uit het feit dat er een  $x$  in Rea is met:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dat  $b^2 - 4ac \geq 0$  en omgekeerd. Als  $b^2 - 4ac \geq 0$  dan is er zo'n  $x$  in Rea.

Maar hoe werden de reële getallen ingevoerd? We bladeren even terug. Na de natuurlijke getallen ingevoerd te hebben, volgen eenvoudig de gehele negatieve getallen (en de nul); en de operatietekens voor product en quotiënt ook. Het blijkt dat we behoefte hebben aan de logische symbolen voor 'er is een' en 'voor alle'. Maar er is meer nodig, we willen een symbool voor een vraag hebben om situaties als: 'Is er een  $t$  met  $t \times t = 2$ ?' weer te kunnen geven. Dit wordt bijvoorbeeld gebruikt om via een vraag: 'Is er een  $t$  met  $3 \times t = 4$ ?' tweetallige oneindig voortlopende breuken in te kunnen voeren. Ook niet-periodieke oneindig voortlopende tweetallige breuken worden via de wortel van twee ingevoerd. Natuurlijk is er nog geen theorie van limieten, maar wijzelf hebben indertijd immers ook met tientallige oneindig voortlopende breuken gewerkt zonder dat we een goede definitie van limiet hadden. Dat moet onze gesprekspartner ook maar kunnen. Opmerkelijk is dat Freudenthal in zijn commentaar bij de invoering van de reële getallen verwijst naar het verschil van de definitie van de reële getallen in de klassieke wiskunde enerzijds en in de intuïtionistische wiskunde anderzijds. Hij is immers als assistent van Brouwer naar Nederland gekomen.

In het hoofdstuk over wiskunde komen nog moeilijke

zaken aan de orde als de invoering van variabelen - de moeilijkheden zijn uit de didactiek bekend - en van het begrip verzameling, waarbij het gevaar van de invoering van paradoxen op de loer ligt. Na 34 bladzijden wiskunde is een volgend onderwerp aan de beurt.

## 4 Tijd en Gedrag

Bij het begrip ‘tijd’ hoort ook het begrip ‘gebeurtenis’. Nu wordt een klok ingevoerd en daarmee kunnen berichten die een verleden tijd of toekomst omvatten gedateerd worden. Ondertussen is het probleem van interpunctie aan de orde geweest. Wanneer we ‘kleine-meisjeskostschool’ gedrukt voor ons zien, kunnen we in de spreektaal door het al dan niet aanbrengen van pauzes tussen de geschreven woorddelen de verschillende betekenissen aangeven. In de wiskunde werken we in zo’n geval met haakjes, vierkante haakjes, accolades, enzovoort. In Lincos worden met dit doel een flink aantal soorten ‘haakjes’ ingevoerd.

Uit de inleiding van het hoofdstuk ‘gedrag’ willen we enkele punten samenvatten. Freudenthal merkt op dat het prematuur is om het menselijk gedrag te willen beschrijven met de eerderontwikkelde regels over wiskunde en tijd. Hij gaat gedrag laten ‘zien’ door gebeurtenissen te ‘vertonen’. Hij gebruikt expres deze termen, omdat hij duidelijk wil maken dat aardse gebeurtenissen niet identiek zijn aan de verzonden radioberichten. Als voorbeeld gebruikt Freudenthal hier het gebeuren in de schouwburg en de relatie tussen toneel en werkelijkheid. Op het toneel fluistert een speler iets tegen een medespeler, maar zo dat de zaal het horen kan. Maar het spel gaat verder met het feit dat de andere toneelspeler in een andere hoek van het toneel het niet gehoord heeft. En dat begrijpen we best. Freudenthal merkt nog op:

‘Even in daily life the literal happening of an event is a fiction. All we know about an event is that we remember its happening, and though we do not remember it twice in precisely the same way, we state that it is the same event whenever we remember it.’

In dit derde hoofdstuk ‘Behavior’ gaat het dus over heel andere dan wiskundige en logische zaken. Als voorbeeld noem ik, in een vrije bewerking, de vraag naar het verschil tussen juist en goed. Logische begrippen spreken over ‘waar’ of ‘niet waar’ dus fout. Zo is  $2 + 3 = 5$  waar en  $3 + 5 = 7$  fout. Maar ‘goed’ is iets anders dan ‘waar’. Dit wordt duidelijk gemaakt in een klassieke situatie van leermeester en leerling. De leraar vraagt: ‘Hoeveel is  $2 \times 2$ ?’ De leerling antwoordt: ‘ $2 \times 2 = 2 \times 2$ ’. De leraar zegt: ‘Dat is waar, maar niet goed’. De leerling zegt: ‘ $2 \times 2 = 2 + 2$ ’. De leraar zegt: ‘Dat is waar, maar niet goed’. De leerling zegt: ‘ $2 \times 2 = 4$ ’, de leraar zegt: ‘Dat is waar en dat is goed’. En het gesprek tussen leerling en

leraar wordt door een derde persoon waargenomen die zijn waarnemingen verwoordt en met een vierde persoon bespreekt.

Maar er zijn nog vele problemen op te lossen: hoe maken we het verschil tussen vermoeden en zekerheid duidelijk, hoe voeren we kans in, hoe maken we duidelijk wat we bedoelen met de zin ‘hij weet hoeveel  $2 \times 2$  is’? Problemen van deze soort worden aangepakt in gesprekken tussen twee of drie personen.

```
* Ha Inq Hb · ? x . 100 x = 1010 :
Hb Inq Ha . 1010/100 :
Ha Inq Hb Mal :
Hb Inq Ha . 1/10 :
Ha Inq Hb Mal :
Hb Inq Ha . 101/10 :
Ha Inq Hb Ben *

* Ha Inq Hb · ? x . x = 10 + 10 :
Hb Inq Ha . 10 + 10 :
Ha Inq Hb Mal :
Hb Inq Ha 100 :
Ha Inq Hb Ben *

* Ha Inq Hb · ? x . x10 = 11001 :
Hb Inq Ha . 101 × 101 = 11001 :
Ha Inq Hb Mal :
Hb Inq Ha · 101 × 101 = 11001 . ∈ Ver :
Ha Inq Hb · Ver Tan Mal : ¬ · x10 = 11001 . → · x = 101 :
Hb Inq Ha . 101 √ - 101 :
Ha Inq Hb Ben *

* Ha Inq Hb · ? √ x . x10 = 11001 :
Hb Inq Ha 101 :
Ha Inq Hb Ben *

* Ha Inq Hb · ? √ x . x10 = 11001 *
Hb Inq Ha : √ x . x10 = 11001 . ∈ · √ x . x10 = 11001 *
Ha Inq Hb Mal *
```

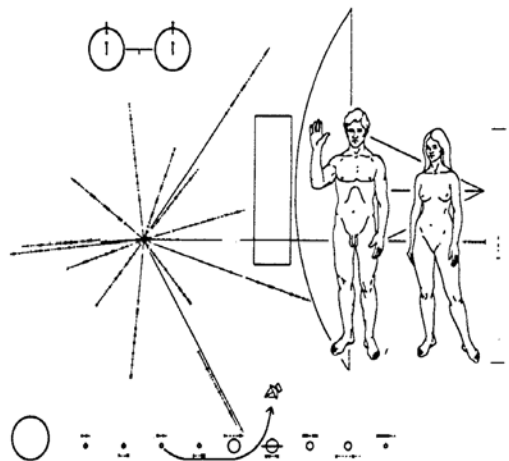
figuur 3: fragment uit ‘Lincos’

## 5 Natuurkunde

In het vierde hoofdstuk gaat het over ruimte, beweging en massa. Na de wiskunde komt nu de natuurkunde aan bod. Coördinaten zijn een essentieel hulpmiddel. Hoe definiëer je een eenheid van lengte? In Lincos wordt daarvoor gebruikgemaakt van de Rydbergconstante, een getal dat kan worden afgeleid uit het spectrum van een waterstofatoom. Omdat het in de communicatie een rol kan spelen worden al in een vroeg stadium zaken als het Dopplereffect en zelfs de (speciale) relativiteitstheorie aan de orde gesteld.

Aan het einde van dit eerste deel wordt het al duidelijk dat er nog veel werk te doen is. Freudenthal kondigt een tweede deel aan met hoofdstukken over materie (scheikunde), aarde, leven en een tweede hoofdstuk over gedrag. Dit tweede deel is nooit verschenen en ik weet niet of hij er toch nog hoofdstukken van geschreven heeft. Hoe kwam Freudenthal ertoe zich deze enorme opgave te stellen? Hij noemt een vermakelijk, maar serieus artikel,

in 1896 gepubliceerd door Francis Galton, en stelt dat we nu mogelijkheden hebben om berichten te verzenden. En ik voeg eraan toe ‘met meer inhoud dan een enkel plaatje van de mens en ons zonnestelsel’.



figuur 4: de eerste materiële boodschap van de mens aan ET: de plaquette op de Pioneer 10 die in 1983 ons zonnestelsel verliet

Maar als ik zelf wat mag interpreteren, want ik heb het hem helaas nooit gevraagd, speelt zijn belangstelling voor verschillen en relaties tussen omgangs- en formele taal een rol; de formele taal dan zoals gebruikt in logica en wiskunde. We kunnen Lincos zien als een proeve van didactiek. In het wiskundeonderwijs hebben we te maken met het aanleren van formele taal met behulp van omgangstaal; Lincos gaat over het aanleren van omgangstaal met behulp van formele taal. Van de lange weg die daarvoor nodig is, kunnen we met Lincos in de hand de eerste stappen zetten.

## 6 Vervolg

Wanneer we op het internet het woord Lincos intikken vinden we verwijzingen naar het boek van Freudenthal, maar ook naar recente activiteiten aan de Leidse universiteit door professor A. Ollengren. Hij werkt sinds 1997 aan een vervolg en/of een ander begin van het project, onder andere door de rol van de wiskunde voor een deel te vervangen door logica. Maar daarnaast wil hij ook door het zenden van muziek, en wel speciaal in het vijftonig systeem van de gamelanmuziek, proberen contact te krijgen. In de NRC-wetenschapsbijlage van 13 mei 2000 is onder de titel ‘Hallo, hier aarde’ een uitvoerige bijdrage te vinden. Opmerkelijk is dat in Hoyle’s roman ‘The Black Cloud’ na het overseinen van de ‘Encyclo-

pedia Britannica’ een uitvoering van de sonate opus 106 van Ludwig von Beethoven wordt verzonden. Het antwoord is verrassend: ‘heel interessant, maar het eerste deel zou dertig procent sneller moeten’. De uitvoerende pianiste merkt op dat inderdaad in de partituur een zeer hoge snelheid voor het eerste deel staat aangegeven, maar dat geen normale pianist die grotere snelheid kan halen.

Natuurlijk is het mogelijk dat onze luisteraar naar Lincos de lange opvolging van geluiden die op de radiotelescoop opgevangen zijn, interpreteert als iets wat wij een muzikaal kunstwerk noemen. Vaag staat me bij dat Freudenthal daar ergens ook op zinspeelt. Maar hopelijk zijn er in de cultuur van de ontvanger ook musicologen die net als sommige aardse Bachbewonderaars de compositie gaan analyseren en er veel meer dan alleen maar muziek in vinden.

Toen ik eens in een voordracht opmerkte dat Freudenthal bijna alle kunsten en wetenschappen wel eens beoefend had; geschiedenis en wijsbegeerte, dichtkunst en roman-kunst, natuurwetenschap en taalkunde, didactiek en politiek, wiskunde en logica, enzovoort, maar nooit een muziekstuk gecomponeerd had, tikte hij mij na afloop op de vingers. In zijn jeugd had hij wel degelijk gecomponeerd. Maar tot zijn grootste composities behoort toch wel de constructie, liever gezegd de compositie van Lincos. Met plezier ben ik er voor dit stukje weer ingedoken en realiseer me nu, meer dan ik in 1960 vermoedde, dat het een opmaat is voor zijn uitvoerige latere publicaties over het wiskundeonderwijs in omgangstaal. Ik herinner alleen maar aan de begrippen ‘lokaal bewijs’ en ‘quasibewijs’: je bewijst een stelling in een speciaal geval, maar zo dat de lezer onmiddellijk inziet dat het bewijs in ieder ander geval geheel analoog geleverd kan worden.

Het boek ‘Lincos’ is een typisch Freudenthalboek, zijn belangstelling en liefde voor wetenschap in het algemeen, en wiskunde, taalkunde en didactiek in het bijzonder komen erin samen. Zal ooit een voltooide editie verzonden en ontvangen worden? Of zou toch de mogelijkheid om beelden te zenden meer moeten worden ingebouwd? Freudenthal merkt op dat voor begrip van ons televisiesysteem toch eerst analytische meetkunde moet worden geleerd en dat vraagt de wiskundige voorbereiding die in Lincos te vinden is. Maar als we denken aan contacten met intelligentie buiten ons zonnestelsel is de geringe snelheid van de elektromagnetische golven in relatie met onze levensduur wel een probleem in de communicatie. Zou snellere communicatie toch mogelijk blijken? Er is nog werk aan de winkel voor de theoretische fysici!

*How are you going to communicate with an extraterrestrial civilization for which you only presume a sufficient level of intelligence and a state of technology that allows the reception of radio signals? You first have to design a language in order to do so. A language like Lincos, created by Hans Freudenthal at a time way before the first Sputnik was launched. Frederik van der Blij browsed through the book ‘Lincos’ and describes the structure of the bleep language.*