



Wiskunde en psychologie

- de brug en de kloof tussen Freudenthal en Van Parreren -

Dolly van Eerde
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

De wiskundige Freudenthal besteedt in veel van zijn publicaties expliciet aandacht aan een psychologisch perspectief op het leren en onderwijzen van wiskunde. Hij stond kritisch ten opzichte van het werk van psychologen en onderwijskundigen waar dit het wiskundeonderwijs betrof en stak dit hij niet onder stoelen of banken. In deze bijdrage wordt Freudenthals kritiek op enkele thema's uit de psychologie en de onderwijskunde beschreven. Denkbeelden van Freudenthal over de psychologie worden verhelderd door deze te confronteren met die van de psycholoog Van Parreren met wie hij jarenlang discussies voerde in de stuurgroep van het project 'Kwantiwijzer'. Zowel raakpunten als enkele geschilpunten tussen beiden passeren de revue. Ook de rolverdeling tussen wiskunde en psychologie in het project komt aan bod. Freudenthal en Van Parreren waren het op een aantal punten volstrekt oneens maar konden toch tot een zekere consensus komen omdat zij een aantal gemeenschappelijke uitgangspunten hadden. De geschiedenis laat zien dat deze hun oorsprong vinden in de jaren dertig; sinds die tijd zijn er al min of meer intensieve contacten tussen bepaalde wiskundigen en psychologen in Nederland. Er wordt bepleit om enkele interessante raakpunten uit de realistische visie op wiskundeonderwijs en uit de cultuur historische school binnen de psychologie verder uit te werken.

1 Inleiding

Freudenthal heeft in veel van zijn publicaties over rekenwiskundeonderwijs aandacht besteed aan psychologische en onderwijskundige aspecten. Dit deed hij op een eigenzinnige wijze en in originele bewoordingen. Psychologen en onderwijskundigen die het terrein van het rekenwiskundeonderwijs betraden zonder vakdidactische kennis van zaken, konden op scherpe aanvallen van Freudenthal rekenen. Zo merkt hij in een kritische beschouwing over het is-teken op dat men liefst al aan kleuters zou willen leren dat hierbij aan beide zijden hetzelfde staat.

Het leek zinsontleding oefenen met een kind dat net leert praten. In de *onderwijskunst* is dit alweer van de baan, maar inmiddels zijn *onderwijskunde en psychologie* erdoor gegrepen als door een openbaring.

Niet alleen in zijn wetenschappelijke en vakpublicaties trok Freudenthal ten strijde tegen misvattingen van psychologen en onderwijskundigen, ook in zijn columns zoals in de NRC kreeg menig sociaal wetenschappelijk onderzoeker een veeg uit de pan, een enkeling kreeg een complimentje. Vermoedelijk begon Freudenthal dan ook met de nodige scepsis aan een samenwerking met de psycholoog Van Parreren binnen het project 'Kwantiwijzer'. Maar na een aarzelende start werkten beiden jarenlang samen in dit project. Zij waren het op een aantal punten volstrekt oneens maar konden toch tot een zekere consensus komen omdat zij een aantal fundamentele uitgangspunten deelden.

In dit artikel probeer ik bepaalde denkbeelden van Freudenthal over de psychologie te verhelderen door deze te confronteren met die van Van Parreren.

Ik bespreek eerst kort een aantal thema's die terugkeren in Freudenthals kritische beschouwingen over psychologen en onderwijskundigen. De kern van het betoog gaat over de raakpunten in de denkbeelden van Freudenthal en Van Parreren in het project en de punten waarop ze van mening verschilden. Aan de hand van illustraties laat ik zien hoe dit gestalte kreeg. Ook de rolverdeling tussen wiskunde en psychologie in het project 'Kwantiwijzer' komt aan bod. Aan het slot geef ik voorbeelden van onderwerpen die vanuit een gemeenschappelijk perspectief van de wiskunde en de psychologie om uitwerking vragen. Tevens probeer ik een mogelijke verklaring te geven voor het feit dat de wiskundige Freudenthal en de psycholoog Van Parreren het tot op zekere hoogte eens konden worden.

Ik baseer me hierbij op de volgende bronnen: diverse publicaties van Freudenthal en Van Parreren (zie literatuurlijst), een reconstructie onderzoek naar het Kwantiwijzerproject (Hetebrij en Van Eerde, 1988), uitvoerige interviews die in het kader van dit onderzoek met beiden gehouden werden (De Vries, 1985), en op eerder analyses uit mijn proefschrift (Van Eerde, 1996). Ten slotte is er een bescheiden rol voor mijn eigen observaties tijdens de stuurgroep vergaderingen in het Kwantiwijzerproject, waarvan ik projectleider was.¹

In de hierna volgende tekst gebruik ik de term ‘we’ als het om het projectteam gaat en de term ‘ik’ als het over een persoonlijke ervaring binnen het project gaat.

2 Kritiek op psychologen en onderwijskundig onderzoek

In deze paragraaf besteed ik kort aandacht aan enkele kernpunten uit Freudenthals kritiek op psychologen en onderwijsonderzoek. Voor een uitvoerig overzicht over Freudenthals werk en opvattingen die verband houden met didactiek en curriculumonderzoek, verwijs ik naar Gravemeijer en Terwel (2003).

Freudenthal vond dat er te weinig kritiek was op onderwijsonderzoek dat volgens hem werd geregeerd door allerlei rituelen en de waan van de dag (Freudenthal 1978, pag.77). De kern van Freudenthals kritiek op onderwijsonderzoek en de psychologie heeft te maken met de scheiding die daarin vaak wordt aangebracht tussen vorm en inhoud. Hij was van mening dat je niet goed kunt observeren, geen fatsoenlijke toetsen of relevante theorieën kunt ontwikkelen los van de vakinhoud. Kortom, wie geen kaas gegeten heeft van rekenwiskunde-didactiek dient daarnaar geen onderzoek te doen noch theorie daarover te ontwikkelen.

De grondgedachte dat vorm en inhoud onlosmakelijk met elkaar verbonden dienen te worden, komt treffend tot uitdrukking in zijn beeld van de ‘lege dozen’ van psychologen en onderwijskundigen die vakexperts moeten vullen (Freudenthal 1978, 1991). Hij was ook tegenstander van ‘hard onderzoek’, waarin complexe statistieken worden toegepast. Veel statistiek in dit soort onderzoek noemde hij irrelevant en hij liet een aantal malen zien dat statistische analyses fout werden toegepast. Hij was van mening dat men met statistische analyses wetenschappelijk respect probeert af te dwingen maar dat type onderzoek geen antwoord kan geven op de vragen uit het onderwijs (Freudenthal, 1973). Ook verzette hij zich tegen de zogenaamde ‘objectieve’ toetsen die in onderwijsonderzoek gebruikt worden, omdat ze betrouwbaarheid laten prevaleren boven validiteit. Kortom, bij herhaald meten vind je hetzelfde maar wat je meet blijft duister.

Dit standpunt moet gezien worden in samenhang met zijn opvatting over het belang van discontinuïteiten in het leren. Om deze op het spoor te komen moet de individuele ontwikkeling van leerlingen gevolgd worden. Kortom, onderzoek zou gericht moeten zijn op het observeren van leerprocessen en niet op het testen van objectieve leerresultaten.

In zijn kritiek op de rol van de psychologie keren een aantal namen van bekende psychologen terug. In ‘Mathematics as an Educational Task’ (1973) uit hij zijn teleur-

stelling over wat de leerpsychologie het wiskundeonderwijs te bieden heeft. In een destijds bekend leerpsychologisch boek (Gagné, 1966) herkende hij niets over wat leren is en voelde hij zich ver verwijderd van wat hij zelf en met anderen had ervaren als *wiskundig leren* (curs. H.F.).

A feeling of loneliness seized me, is mathematics really so different? I wish that someone who profoundly understands both mathematics and psychology would show us the bridge. (Freudenthal 1973, vi)

De leerhiërarchieën die Gagné schetst zijn gebaseerd op een zogeheten taakanalyse, een analyse vanachter het bureau. De eindhandeling wordt middels een logische analyse uiteengelegd in voorwaardelijke deelhandelingen die één voor één kunnen worden aangeleerd. Het leerproces verloopt van simpele naar complexe structuren. (Gravemeijer & Van Eerde, 2004). Dit staat lijnrecht tegenover Freudenthals idee van het mathematiseren van rijke, complexe structuren uit de realiteit naar de abstracte structuren van de wiskunde (Gravemeijer & Terwel, 2003). Gagné’s aanpak via een taakanalyse staat haaks op Freudenthals kerngedachte van wiskunde als menselijke activiteit.

Ook het werk van de psycholoog Bloom werd door Freudenthal op de snijtafel gelegd. Hij maakte diepgaande analyses van Blooms taxonomie voor onderwijsdoelen (zie bijvoorbeeld Freudenthal, 1978, pag.81-92) en oordeelde dat deze volstrekt ongeschikt was voor het wiskundeonderwijs door de kunstmatigheid van de onderscheiden categorieën.

De taxonomie was bedoeld als instrument om de evaluatie van examenresultaten te coördineren. Freudenthal vindt de onderscheiden niveaus echter vaag, iedereen kan er iets anders onder verstaan, en ze vormen een pure simplificatie van het leren van wiskunde. De taxonomie belooft een classificatie van onderwijsdoelen maar is volgens hem een classificatie van vakinhouden naar vermeende niveaus. Over de wiskundige voorbeelden uit de taxonomie zegt hij:

Their smell remind me of dead stock of the arithmetic department in the college department store of 1900. (Freudenthal 1978, pag.86)

Het werk van Gagné en Bloom illustreert Freudenthals overtuiging dat onderwijstheorie niet vanachter het bureau ontwikkeld kan worden. Dit sluit aan bij zijn idee dat het draait om onderzoek *in* het onderwijs en niet *van* het onderwijs.

Ten slotte besteedt Freudenthal in diverse publicaties uitvoerig aandacht aan het werk van een van de grootste psychologen van de twintigste eeuw: Piaget. Ook de studies van Piaget analyseerde Freudenthal uitvoerig (1973 pag.616-676). Ondanks kritiek op zijn werk, had Freudenthal grote waardering voor Piaget. Zijn onderzoek, gebaseerd op nauwgezette observaties van (vaak zijn

eigen) kinderen, was gericht op een beschrijving van de cognitieve ontwikkeling van kinderen. Piagets object van onderzoek was de genetisch epistemologie. Deze gaat over de vraag hoe kennis ontstaat. Freudenthal betreurde het dat Piagets fasentheorie, die descriptief van aard is, zo vaak verkeerd werd geïnterpreteerd en ten onrechte werd toegepast voor instructiedoeleinden.

Freudenthal had vooral kritiek op wat hij de pseudo-wiskundige aspecten van Piagets werk noemde en de verbale instructie bij de taken die vaak misleidend waren voor de kinderen.

3 Freudenthal en Van Parreren in het Kwantiwijzerproject

De wiskundige Freudenthal en de psycholoog Van Parreren hadden jarenlange discussies binnen het 'Kwantiwijzer'project. K. Koster, initiatiefnemer van het project, bracht hen beiden samen in de stuurgroep² van dit project, die zeer regelmatig bij elkaar kwam. Ongeveer veertien jaar bleven Freudenthal en Van Parreren het project

koers. Freudenthals interesse voor het observeren van het rekenen van kinderen komt in het centrum van de aandacht en Van Parreren kan zijn handelingsmodel verder ontwikkelen en handen en voeten geven. Het ontwikkelwerk verbreedde zich gaandeweg tot een ontwikkelingsonderzoek met een theoretische en praktische opbrengst (zie bijvoorbeeld Van Eerde, 1996; Van den Berg, Van Eerde & Lit, 1992 a en b).

Wat vormde de binding tussen de wiskundige Freudenthal als vertegenwoordiger van Wiskobas en de psycholoog van Parreren als vertegenwoordiger van de cultuur historische school? Op welke punten konden ze het eens worden en waar liepen de meningen uiteen? Alvorens op deze vragen in te gaan, geef ik een korte situatieschets van het 'Kwantiwijzer'project.

4 Kwantiwijzerproject: tegen de stroom op

Kenmerkend voor het Kwantiwijzerproject is dat het op veel punten tegen de stroom van de tijd oproeide, zowel

	Opvattingen eind jaren 70	Uitgangspunten Kwantiwijzer
Oorzaak probleem	In het kind	In het onderwijsleerproces
Visie op rekenen	Traditioneel mechanistisch	Wiskobas
Object van onderzoek	Basisfuncties	Rekenen van kinderen
Relatie met rekenonderwijs	Indirect	Direct
Object van diagnostiek	Productgericht	Procesgericht (handelingen)
Onderzoeksmethode	Gestandaardiseerd	Interactief
Resultaat	Constateerend: testscore	Prospectief: instructie, hulp

figuur 1

trouw. Hun denkbeelden vormen de grondslag voor de ontwikkeling van het diagnostisch instrumentarium met de naam 'Kwantiwijzer'.

Het project 'Kwantiwijzer' had tot doel een diagnostische rekentoets te ontwikkelen. Omdat er in die tijd geen opgaven bestonden om het rekenen van jonge kinderen te onderzoeken, gingen we in het project aanvankelijk eclectisch te werk: er werden allerlei opdrachten ontwikkeld op het gebied van tellen en getallen, ruimtelijke oriëntatie en meten, maar ook rond Piagetiaanse taken, zoals classificeren, seriëren en conserveren, die indertijd als ontwikkelingspsychologische voorwaarden voor rekenen werden gezien. Na een startfase van het project wordt de koers nauwkeuriger uitgezet, we richten ons volledig op het rekenen zelf, de *rekenhandelingen* van kinderen en mogelijke stagnaties daarin. Als de Piagetiaanse taken van het toneel verdwijnen, vinden Freudenthal en Van Parreren elkaar steeds meer in deze gemeenschappelijke

wat betreft de onderzoeksmethodologie als wat betreft het object van onderzoek. De uitgangspunten die rond 1980 binnen het project gekozen werden, weken in alle opzichten af van wat toen gangbaar was, ze spoorden niet met de gangbare opvattingen over diagnostiek, niet met die over testconstructie noch met die over onderwijsonderzoek. In figuur 1 wordt deze tegenstelling schematisch weergegeven (Van Eerde, 1996).

Binnen het project was bovendien geen vastomlijnd onderzoeksprogramma maar eerder *een koers* die uitgezet werd en die gaandeweg specifiek bepaald werd binnen diverse deelonderzoeken. Zonder de jarenlange trouwe deelname aan de stuurgroepvergaderingen van Freudenthal en Van Parreren en hun betrokkenheid bij het project, ook in stormachtige tijden, had dit eigenzinnige ontwikkelingsonderzoek nooit uitgevoerd kunnen worden.

5 Naar een dialoog tussen Freudenthal en Van Parreren

In de beginfase van het project nam Freudenthal een afwachtende houding aan. De discussie tijdens de stuurgroepbijeenkomsten werd meestal in gang gezet door Van Parreren, die als eerste het woord nam en zijn commentaar gaf op de door het projectteam ontwikkelde materialen. Freudenthal reageerde vaak helemaal niet op zo'n betoog van Van Parreren en er volgde dan een stilte. Was dit een teken dat Freudenthal het er niet mee eens was of wilde hij een en ander eerst overdenken voordat hij tot een oordeel kwam?

Als ik per se een reactie van Freudenthal wilde op wat Van Parreren had gezegd, stelde ik steevast de vraag: 'Professor Freudenthal, wat is hierover uw mening?' Na enige aarzeling reageerde Freudenthal dan altijd. Soms begon hij dan eerst over een ogenschijnlijk geheel ander onderwerp, bijvoorbeeld over zijn observaties van zijn Surinaamse buurmeisje dat hij hielp met rekenen. Mogelijk wilde hij Van Parreren niet voor het hoofd stoten en liet hij met zo'n reactie zien waarop naar zijn idee de nadruk moest liggen in het project: het observeren van het rekenen van jonge kinderen. Pas in de loop der jaren kwam een directere discussie tussen Freudenthal en Van Parreren op gang.

6 Raakpunten in de opvattingen van Freudenthal en Van Parreren

Afwijzing objectieve testen

Het gangbare psychologische onderzoek uit de zeventiger en tachtiger jaren van de vorige eeuw was gericht op het toetsen van objectieve leerresultaten. Zowel Freudenthal als Van Parreren waren sterk gekant tegen wat ze respectievelijk 'objectieve toetsen' en 'metende tests' noemden. Uit interviews met beiden blijkt dat zij het op dit punt volledig met elkaar eens waren. Freudenthal merkt hierover het volgende op:

Wat je natuurlijk wel kan zeggen van Van Parreren is dat door zijn invloed de projectgroep geen toetsen ging gebruiken. Ik bedoel van die vierkeuze dingen. Zijn grote verdienste is dat hij zich verre heeft gehouden van de Amerikaanse school en wel vanaf het begin. (De Vries 1985, 90).

Van Parreren drukt het als volgt uit:

Freudenthal nam in het begin een erg afwachtende houding aan. Je kon merken dat hij er sceptisch over was, maar dat was hij over alles dat psychologen deden. Hij vond namelijk dat psychologen altijd metende tests gebruikten, waardoor je wel een getal krijgt maar absoluut niet weet wat het kind wel

of niet begrijpt. Freudenthal wist toen nog niet dat ik er net zo over dacht. (De Vries, 1985)

Met de ontwikkeling van Kwantiwijzer zagen beiden hun kans schoon om te laten zien dat er een alternatief mogelijk was voor de gestandaardiseerde testen en test scores: een vakdidactisch en vakpsychologisch georiënteerde werkwijze, interactief van aard, met als resultaat een beeld van wat een leerling kan en wat niet, en aanwijzingen voor verder onderwijs.

Activiteit

Een sterke binding tussen Freudenthal en Van Parreren kan worden gevonden in het begrip 'activiteit'. In Freudenthals opvatting van wiskunde als menselijke activiteit, construeren mensen hun eigen wiskunde door het mathematiseren van verschijnselen uit de realiteit. Hierdoor krijgt hun wiskundige activiteit betekenis. Wiskundeonderwijs dient daarom niet gericht te zijn op de overdracht van wiskunde als afgerond bouwwerk. Maar leerlingen zouden wiskunde moeten leren door wiskunde te bedrijven en daarop te reflecteren. Het gaat kortom niet om het onderwijzen van een resultaat van mathematische activiteit van anderen maar om het onderwijzen van de activiteit zelf. Freudenthal (1973) spreekt over een 'didactische inverse' als de mathematische activiteiten van anderen als startpunt voor onderwijs worden genomen.

De cultuur-historische school beschouwt activiteit als het object van de psychologie. Menselijk gedrag, met inbegrip van mentale processen, wordt geïnterpreteerd in termen van handelingen. In het handelingsmodel van Van Parreren staat, in navolging van de cultuurhistorische school, het handelingsconcept centraal. Handelingen zijn doelgerichte activiteiten van mensen aan objecten. Het gaat niet de resultaten van ontwikkeling maar om het proces zelf. Het doelgerichte handelen bij Van Parreren en de wiskundige activiteit bij Freudenthal benadrukken beide het belang van de eigen activiteit van mensen en het procesmatige karakter daarvan. Het door Van Parreren expliciet geformuleerde handelingsconcept werd impliciet geaccepteerd door Freudenthal, omdat dit uitstekend past binnen zijn activiteitsconcept (Hetebrij & Van Eerde, 1988).

Observeren van leerprocessen

Freudenthal en Van Parreren hechtten beiden grote waarde aan het observeren van leerprocessen van kinderen. Deze methodische voorkeur komt direct voort uit hun belangstelling voor menselijke activiteit, respectievelijk menselijk handelen. In diverse publicaties benadrukt Freudenthal het belang van het observeren van leerprocessen.

Niet achter het bureau, maar: kinderen, mensen observeren in hun ontwikkeling, in hun leerprocessen ... (Freudenthal 1984, 98)

En verderop in hetzelfde boek:

Waarom leerprocessen observeren? Alleen al om - vooroordelen overboord zettend - erachter te komen wat mensen allemaal moeten leren. Ook hoe ze leren, hoe ze kunnen leren, hoe geleerd kan worden - uiteraard. Erachter trachten te komen, niet ter wille van de wetenschap, maar om er iets mee te doen. (Freudenthal 1984, 106)

De slotzin in Freudenthals boek over wiskunde en psychologie spreekt in dit kader boekdelen:

Is het gelukt? U kunt het bewijs leveren door zelf naar kinderen te kijken. Doe het dan. (Freudenthal 1984, 110)

Uit het volgende interviewfragment blijkt dat Freudenthal wist dat Van Parreren op dit punt achter hem stond:

Dogmatici zeggen dat kinderen het zo moeten doen als ze het geleerd hebben, anders begrijpen ze het niet. Op dit vlak konden Van Parreren en ik elkaar altijd vinden. Al ken ik de leertheorie van Van Parreren niet hij was vrij van elke dogmatiek. Als ik zei dat ik dit of dat geobserveerd had, aanvaardde hij dat iedereen dat op een andere manier kon doen en paste dat in zijn systeem. Het gaat ons om processen, niet om producten. Dit heeft Van Parreren benadrukt en dat interesseert mij ook. (De Vries 1985, 92)

In zijn laatste boek licht Freudenthal nog eens toe waarom hij veel onderwijsonderzoek didactisch zinloos vindt en verklaart waarom dit onderzoek doorgaans gericht is op producten van het denken en niet op processen. Volgens hem komt dit doordat producten gemakkelijker te observeren en analyseren zijn (Freudenthal, 1991).

Deze opvattingen van Freudenthal sluiten naadloos aan bij de denkbeelden van Van Parreren die leerprocessen als centraal onderzoeksobject zag en een groot deel van zijn oeuvre daaraan wijdde. Van Parreren spreekt in dit verband over onderzoeksmethoden die handelings- en procesobservatie mogelijk maken (Van Parreren & Schouten-Van Parreren, 1981). In zijn voorwoord bij zijn boek over 'Ontwikkeld onderwijs' schrijft Van Parreren, als hij het heeft over het belang van het observeren en denkend analyseren van onderwijsleerprocessen, dat hij zich hierover geenszins tegenover collega's wetenschappers hoeft te excuseren, maar het hen zelfs moet aanbevelen:

Deze benadering van praktijkproblemen is de enige vruchtbare en ook de enig die voor de sociale wetenschappen in aanmerking komt (Van Parreren 1988, 9).

Van Parreren kan gezien worden als een voorloper van de brede cognitieve heroriëntatie in de psychologie, met meer aandacht voor leerprocessen, ook in de Verenigde Staten (vergelijk Van Parreren 1982, pag.17).

In het Kwantiwijzerproject speelde het observeren van kinderen een dubbele hoofdrol, niet alleen bij de con-

structie van het instrument maar ook als methode voor het doen van diagnostisch onderzoek. Observaties van kinderen werden regelmatig besproken in de stuurgroepvergaderingen aan de hand van uitvoerige verslagen en video-registraties. De observaties van het rekenen van kinderen in de talloze gesprekken die we met hen hadden, vormen de bron van het instrument. In de gesprekken openden kinderen hun verborgen rekenwereld, hun privédoel: de op school onderwezen en hun zelfbedachte oplossingswijzen, hun opvattingen over wat handig is en wat niet, hun strategieën om wat de leerkracht niet gewent vond verborgen te houden (bijvoorbeeld vinger rekenen), en hun attitude ten opzichte van rekenen. Veel probleemsituaties in het instrument zijn ontleend aan wat kinderen aan ons toevertrouwden.

Een voorbeeld: veel leerlingen vonden het overbruggen van tien lastig en hadden moeite met de standaard aanpak van het 'aanvullen tot tien': $7 + 8$; $7 + 3 = 10$; $8 = 3 + 5$; $10 + 5 = 15$.

Uit onze gesprekken bleek dat kinderen allerlei informele strategieën toepassen zoals het rekenen via verdubbelen: $7 + 8$; $7 + 7 = 14$; $7 + 8 = 15$. Via het rekenen met vijven: $7 + 8$; $5 + 5 = 10$; nog 3 erbij van 8 en nog 2 erbij van 7 is 15. Of via afleiden: $7 + 9$; $7 + 10 = 17$; $7 + 9 = 16$.

Op grond van deze observaties werden opgaven ontwikkeld om na te gaan of kinderen die moeite hadden om dit soort sommen op te lossen volgens de aanpak die ze op school leerden, mogelijk snel een andere aanpak konden leren. Daartoe werden in het instrument allerlei opgaven opgenomen rond verdubbelen, het rekenen met vijven, en het afleiden om na te gaan of een leerling dergelijke strategieën snel zou kunnen oppikken. Zo openden de informele strategieën van leerlingen de weg voor anderen om een doodlopend spoor te verlaten.

Ook namen we informele begrippen van kinderen over. Op een bepaalde school noemden de kinderen sommen zoals $9 + 1, 8 + 2$, $7 + 3$ enzovoort. 'de vriendjes van tien'. Dit begrip sprak andere kinderen direct aan en het werd overgenomen in de hulpaanwijzingen bij het instrument.

Het observeren van kinderen is naast het stellen van allerlei soorten vragen de belangrijkste vaardigheid bij het bedrijven van diagnostisch onderzoek, en misschien ook wel bij onderwijzen. Volgens Freudenthal zou observeren als middel om iets te begrijpen van leerprocessen niet exclusief gereserveerd moeten zijn voor ontwikkelaars en onderzoekers. Ook voor opleiders, onderwijzenden en studenten van de Pabo ziet hij observeren als het middel bij uitstek om mensen bewust te maken van de leerprocessen van anderen en van henzelf. Deze processen zouden bewust gemaakt moeten worden en er zou een mentaliteit moeten worden gekweekt waarin mensen ze bewust willen maken. (Freudenthal, 1984).

Ook op dit punt vinden Freudenthals ideeën weerklank in het project doordat er gaandeweg bij het Kwantiwijzerinstrumentarium een professionaliseringspakket wordt ontwikkeld voor Pabo-studenten en leerkrachten waarin

observeren centraal staat. Hierbij gaat het dan zowel om het observeren van leerlingen, in de klas of op videoband, als om het observeren van jezelf of iemand anders tijdens het leren werken met het instrument.

Leren als discontinue proces

Freudenthal hechtte niet alleen groot belang aan observeren als methode om leerprocessen op het spoor te komen, maar had er tevens een uitgesproken opvatting over op welke leerprocessen die observaties gericht zouden moeten zijn: op discontinuïteiten (Freudenthal, 1973, 1984).

Een longitudinale observatie - dit is onhaalbaar; en het hoeft ook niet. Als er niets gebeurd hoeft je ook niets te observeren. Wat je wel kunt, is: uitkijken naar de discontinuïteiten, naar de sprongen in de ontwikkeling. En daarvoor moet je naar het individuele kind kijken. (Freudenthal 1984, 103)

Deze opvatting spoort inderdaad met die van Van Parreren, die ook groot belang hechtte aan discontinuïteiten in het leren. Al in de jaren zestig bespreekt Van Parreren dit thema en wijst erop dat we dit bij onszelf kennen als:

Het vaak overrompelende van de goede ingeving, het een licht opgaan.

En even verderop:

Het plotseling intreden en behouden blijven van inzicht betekent nu, dat het verloop van het leren bij het door inzicht ontdekken van een handeling discontinu is. (Van Parreren 1966, 214)

Van Parreren onderscheidt diverse eigenschappen aan handelingen; er is sprake van een leerproces wanneer er een verandering plaatsvindt in een of meer eigenschappen van een handeling, in de handelingsstructuur (Van Parreren 1983, pag.5). Kortom, Freudenthal en Van Parreren wezen beiden op het belang van het observeren van *discontinuïteiten* in het leren.

In dit kader gebruikten zij ook allebei herhaaldelijk het begrip *Aha experience*, dat uit de denkpsychologie komt (zie bijvoorbeeld Van Parreren 1966, pag.214; Freudenthal 1978 pag.214).

Observeren, aldus Freudenthal, moet je wel leren, je moet weten waarnaar je op zoek bent. Aan dit leerproces kan het uitwisselen van observaties bijdragen. Maar om echt te kunnen begrijpen wat wordt onderwezen en wat wordt geleerd, moet je een vak geleerd hebben.

In het begin van het project was er weinig bekend over het leren rekenen van kinderen. De kennis hierover ontwikkelden we met elkaar in direct relatie met wat we observeerden bij de kinderen.

Veel aandacht werd ook besteed aan de verkenning van de zone van naaste ontwikkeling in diagnostisch onderzoek. Hiertoe werden tijdens het diagnostisch gesprek allerlei vormen van hulp aangeboden als een kind een bepaald probleem niet op kon lossen.

Wanneer een leerling door deze hulp inderdaad ter plekke iets leerde, was er dus sprake van een discontinuïteit in het leerproces.

7 Verschillen in de opvattingen van Freudenthal en Van Parreren

Naast de genoemde punten waarop Freudenthal en Van Parreren het eens konden worden, waren er ook enkele geschilpunten. Zo verschilden ze sterk van mening over de ontwikkeling van begrippen. Van Parreren benadrukte, evenals Piaget en veel andere psychologen, conceptvorming als startpunt voor leerprocessen. Freudenthal ziet de ontwikkeling van begrippen juist als resultaat van een leerproces:

Cognition does not start with concepts, but rather the other way around: concepts are the *result* (curs. HF) of cognitive processes. (Freudenthal 1991, 18)

Ik beperk mij in het volgende tot twee belangrijke geschilpunten die in het Kwantiwijzerproject naar voren kwamen: de betekenis van theorie, en de sturing van onderwijsleerprocessen.

Theorie

Van Parreren had de neiging snel naar een zekere systematisering te werken. Freudenthal zag theorieën als iets vanzelfsprekends en hechtte niet zo'n belang aan systematisering. Hij zegt hierover:

Zoals gezegd, die theorievorming daar heb ik me niet mee bemoeid. Leertheorieën zijn veel te vaag, te weinig op speciale leerstof toegesneden. Wat de leertheorie achter Kwantiwijzer is zou ik niet kunnen zeggen. (...) Je hebt natuurlijk wel je eigen gedachten. Zo spreek ik in mijn boeken over de geleide herontdekking. Dat is een soort leertheorie. Ik kom dan op het belang van heterogene groepen, waar alle partijen van kunnen profiteren. Ik stel bijvoorbeeld prijs op reflectie: dat kinderen dus op hun eigen denken reflecteren. (De Vries, 93).

Dit wil niet zeggen dat Freudenthal geen waarde hechtte aan theorie. Hij gebruikte regelmatig begrippen uit de handelingstheorie, maar hij gaat er op een intuïtieve wijze mee om:

Als je dan van theorie wilt spreken, dan is het gericht zijn op handelingen. Dat zijn namelijk van die begrippen die een rol spelen, zoals: eigenschappen van handelingen en allerlei indelingen. Voor mij zijn die nogal vanzelfsprekend en daar is geen theorie voor nodig. Ik ben gewend vanuit de wetkunde heel andere dingen onder theorie te verstaan. Wat hier in de 'Kwantiwijzer' staat is gewoon gezond verstand. (De Vries 1985, 94).

Van Parreren hechtte wel belang aan theorie en reali-

seerde zich hoe hij en Freudenthal op dit punt van mening verschilden. In een interview verwoordt hij het als volgt:

Die samenvoeging (*samenwerking, DvE*) ging niet van een leien dakje. Freudenthal was gewend intuïtief te werken, terwijl ik meer ordening in het geheel wilde brengen (...)

Het grootste verschil tussen Freudenthal en mij was dat hij de diagnostiek opvatte als een soort kunst, die je intuïtief en op grond van ervaring en creativiteit moest hanteren, terwijl ik toch probeerde er een goed systeem in te brengen.

(De Vries 1985, 91).

Samenvattend kunnen we zeggen dat Freudenthal wiskundig gezien iets heel anders verstaat onder theorie; psychologisch gezien ziet hij wat Van Parreren theorie noemt als vanzelfsprekendheden. Wat voor de psycholoog Van Parreren een kunde was, was voor de wiskundige Freudenthal een kunst (Van Eerde, 1996).

Van Parreren streefde net als het projectteam naar systematisering en explicitering, mede met het oog op de overdraagbaarheid van het instrumentarium naar anderen. Alhoewel Freudenthal principieel van mening verschilde met Van Parreren, kon hij toch vrede hebben met wat er aan theorie rond Kwantiwijzer ontwikkeld werd. Dit hangt vermoedelijk samen met het feit dat ook er geen sprake was van een pasklare theorie vooraf. De theorie werd gaandeweg ontwikkeld, weliswaar door een handelingspsychologische bril, maar in directe samenhang met onze observaties van het rekenen en de theorie was altijd vakdidactisch gekleurd. Op deze wijze was het mogelijk psychologische en vakdidactische theorie te integreren. (Zie bijvoorbeeld Van den Berg, Van Eerde & Lit, 1992 a en b).

Sturing van onderwijsleerprocessen

Hoezeer beide wetenschappers het ook eens waren over het belang van observeren van onderwijsleerprocessen, over de sturing daarvan waren ze het volstrekt oneens. Freudenthal wees elke vorm van sturing van de hand, de taak van de leerkracht bestaat erin te leerprocessen te observeren en analyseren, passende problemen aan te bieden en interactie tussen leerlingen, liefst in heterogene groepen, te stimuleren. In dit verband wijst Freudenthal op de spanning tussen de vrijheid om te leren, de *reinvention* van de leerling, en de kracht van het onderwijzen, het *guided* door de leerkracht. Twee zaken acht hij hierbij essentieel: het kiezen van situaties binnen de huidige realiteit van de leerling die uitnodigen tot mathematiseren, en het bieden van instrumenten voor verticaal mathematiseren (Freudenthal, 1991).

Van Parreren stelt dat er voor een vorm van meer of minder sturend onderwijs gekozen dient te worden, afhankelijk van het beoogde leerdoel en de vaardigheden van de leerlingen. Hij spreekt in dit verband van banend onderwijs en geeft hier een brede invulling aan.

‘Zelf ontdekken of probleemgericht onderwijs kunnen we ook *banend onderwijs* (curs. auteur) noemen: onderwijs

waarin een min of meer brede baan wordt uitgezet waarbinnen de leerling vrij kan bewegen, dat wil zeggen zelf zijn weg zoeken, problemen opzoeken en oplossen, enz. (Van Parreren 1988, 100)

We zouden kunnen zeggen dat de leerkracht bij Van Parreren de rol heeft van regisseur en bij Freudenthal die van observerende en stimulerende leraar. Van Parreren benadrukte in navolging van Vygotskij meer de interactie tussen leerkracht en leerlingen, Freudenthal meer de interactie tussen leerlingen onderling.

8 De rolverdeling tussen vakdidactiek en psychologie

In een beschouwing van Treffers (1986) over de rolverdeling tussen vaktheorie en psychologie laat hij op overtuigende wijze zien dat niet zozeer onderwijsleertheorieën als wel de basis concepties over wiskunde en wiskundeonderwijs bepalend zijn voor het ontwikkelde onderwijsproduct. Deze basisconcepties zouden onderwerp van discussie moeten zijn. Dit is precies wat gebeurde in het Kwantiwijzerproject: de basisconcepties, ontleend aan de ideeën van Wiskobas en gebaseerd op wat we bij kinderen observeerden, stonden centraal in de discussies. Ik ga kort in op de vraag wat de rolverdeling was tussen vakdidactische en psychologische aspecten en waarom deze konden samengaan in het Kwantiwijzerproject. Een uitgebreidere analyse is te vinden in mijn proefschrift (Van Eerde 1996, pag.39-80).

Als een vaktheoretische en psychologische benadering die raakpunten hebben in onderzoek samengaan, biedt dit mogelijkheden deze te verbinden. De interactieve gesprekken met kinderen over hun vaak verborgen rekenwereld gaf zicht op de complexiteit van leerprocessen en droeg bij aan de ontwikkeling van vakdidactische kennis op het gebied van het rekenen. Deze rekenhandelingen boden bovendien een rijk onderzoeksterrein voor een psychologische benadering die het handelen van mensen wil bestuderen.

De realistische visie op rekenwiskundeonderwijs is in de Kwantiwijzer vooral terug te vinden in de wiskundige probleemsituaties, en de contexten en modellen die zowel bij de diagnostiek als bij de remediering een essentiële rol spelen. In de voorbeeldjes voor het geven van hulp zijn de vijf leerprincipes van de reconstructie didactiek toegepast (Treffers, De Moor & Feijs, 1989). Verder vormen twee essentiële kenmerken van realistisch rekenwiskundeonderwijs het hart van de Kwantiwijzer: de centrale aandacht voor de eigen oplossingswijzen van kinderen en de interactieve werkwijze. Het handelingsmodel van Van Parreren bood een psychologisch begrippenkader om de rekenhandelingen van kinderen nauwkeurig te obser-

veren, te beschrijven, te analyseren, te interpreteren en te waarderen. Zo konden de geobserveerde rekenhandelingen van kinderen uiteengelegd worden in deelhandelingen, die elk weer op verschillende niveaus uitgevoerd kunnen worden (bijvoorbeeld uit het hoofd of op de vingers) en in verschillende mate verkort kunnen zijn. Verder werd een diversiteit aan handelingen beschreven in psychologische 'rekentaal' aan de hand van begrippen zoals: aftellen, doortellen, bijtellen, terugtellen, afleiden, afsplitsen, leegmaken, aanvullen, geautomatiseerd, enz. Dit vergroot de mogelijkheden van herkenning van handelingen en de communicatie over geobserveerde handelingen.

Kortom er was een wisselwerking tussen opvattingen over realistisch rekenwiskundeonderwijs en denkbeelden uit de handelingstheorie, die langzamerhand leidde tot integratie van vaktheoretische en psychologische aspecten. Zo werd gaandeweg theorie ontwikkeld en achteraf geëxpliciteerd.

9 Slot

Velen zagen Freudenthals kritiek op de psychologie en onderwijsonderzoek als tegendraads, maar zijn kritiek was altijd onderbouwd en sneed meestal hout. Hij had niet alleen het talent om kritisch te reflecteren op de tijdgeest maar ook het talent om uitspraken te doen die mogelijk nu nog geldig zijn. In hoeverre hebben de opvattingen van Freudenthal aan actualiteit ingeboet?

Ik meen dat veel van zijn kritiek nog steeds opgaat voor veel onderwijsonderzoek. Maar er is er ook sprake van meer toenadering tussen vakdidactici en psychologen. Na een decennia lange strijd lijkt het erop dat ook subsidiegevers, zoals NWO het belang van de vakdidactiek en ontwikkelingsonderzoek erkennen.

Er is al veel werk verzet, soms tegen de klippen op. Veel proefschriften van medewerk(st)ers van het Freudenthal Instituut en van enkele vakdidactisch georiënteerde psychologen en onderwijskundigen, hebben de laatste dertig jaar hiertoe interessante aanzetten gegeven.

Ik bepleit dat binnen vakdidactisch georiënteerd ontwikkelingsonderzoek meer ruimte gecreëerd wordt om aan de explicitering en integratie van vakdidactische en psychologische aspecten te werken. De denkbeelden uit de realistische visie en uit de cultuurhistorische school, c.q. de handelingspsychologie hebben elkaar mijns inziens interessante aanknopingspunten en discussiepunten te bieden, die verder uitgewerkt zouden kunnen worden. Enkele daarvan zijn in het voorgaande aan bod gekomen: de mate van sturing van onderwijsleerprocessen: guided reinvention tegenover banend onderwijs, het observeren en analyseren van wiskundige leerprocessen met speciale aandacht voor discontinuïteiten in het leren, en de ontwikkeling van geïntegreerde vakpsychologische theorie.

Hoe kan het dat Freudenthal en Van Parreren, twee wetenschappers uit zo'n verschillende hoek, toch met elkaar in dialoog gingen en het in project op belangrijke punten eens konden worden? De verklaring kan mogelijk gezocht worden in de oorsprong van de tradities waaruit beiden voortkwamen. In de jaren dertig en veertig van de vorige eeuw ontstond een Europese traditie waarin grote waarde gehecht werd aan de bestudering van psychologische processen en daarop toegesneden kwalitatieve onderzoeksmethoden.

Van Parreren baseert, zoals bekend, veel van zijn denkbeelden op die van de Rus L. Vygotskij. Mogelijk minder bekend is dat hij ook in de voetsporen trad van de Nederlandse psycholoog Ph. Kohnstamm (Van Parreren 1983, pag.33-39). Deze bepleitte al in de jaren dertig van de vorige eeuw de zogenaamde microbenadering voor onderzoek van het onderwijs waarbij het onderwijs wordt onderzocht waar het plaatsvindt: tussen onderwijsgevende en leerlingen in de klas. Bovendien was hij voorstander van kwalitatief onderzoek, eerst processen observeren voor er gemeten wordt. Ook Freudenthal heeft banden met deze traditie.

Freudenthal begeleidde samen met de fenomenoloog en pedagoog Langeveld het echtpaar Van Hiele bij hun doctoraal onderzoek (Gravemeijer & Terwel 2000, pag.3). Verder had Kohnstamm contact met de Wiskundewerkgroep, waarvan onder meer Freudenthal, mevrouw Ehrenfest en Van Hiele lid waren. En last but not least, Freudenthals leermeester Brouwer komt ook uit deze traditie voort.

De samenkomst van denkbeelden van Freudenthal en Van Parreren is te verklaren uit hun gemeenschappelijke wortels: zij zijn loten van een zelfde stam (Van Eerde, 1996).

Noten

- 1 Het kernteam van het project bestond de langste periode uit: Wim van den Berg, Dolly van Eerde en Sabine Lit.
- 2 De samenstelling van de stuurgroep van het project was vrij constant, de volgende mensen zaten bijna de gehele looptijd van het project in de stuurgroep: professor Freudenthal, Jan van den Brink, Klaas Koster, Jo Nelissen en Bert van Oers.

Literatuur

- Berg, W. van den, H.A.A. van Eerde & S. Lit (1992a). *Kwantijzer voor Leerkrachten. Handleiding*. Tilburg: Zwijsen.
- Berg, W. van den, H.A.A. van Eerde & S. Lit (1992b). *Kwantijzer voor Leerkrachten, Werkboek 4: Overbruggen van tien(optellen)*. Tilburg: Zwijsen.
- Eerde, H.A.A. van (1996). *Kwantijzer. Diagnostiek in rekenwiskundeonderwijs*. Tilburg: Zwijsen (proefschrift).
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

- Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing. Preface tot a Science of Mathematical Education*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1984). *Appels en peren / wiskunde en psychologie*. Apeldoorn: Van Walraven B.V.
- Freudenthal, H. (1987). *Schrijf dat op Hans. Knipsels uit een leven*. Amsterdam: Meulenhoff.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics Education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer.
- Gagné, R.M.(1977). *The conditions of learning*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD-β Press (proefschrift).
- Gravemeijer, K. & H. Terwel (2000) Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of curriculum studies*, 32(6), 777-796.
- Gravemeijer, K. & D. Van Eerde (2004). Verschil maken. De ontwikkeling in denkbeelden over het omgaan met verschillen tussen leerlingen. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 23(1), 3-15.
- Hetebrij, M. & H.A.A. van Eerde (1988). *Reconstructie onderzoek Kwantiwijzer*. Utrecht: ISOR, Rijksuniversiteit Utrecht.
- Parreren, C.F. van (1966). *Psychologie van het leren I*. Arnhem: Van Loghum Slaterus.
- Parreren, C.F. van & M.C. Schouten-Van Parreren (red.) (1981). *Onderwijsproceskunde: Leerpsychologie en onderwijs*. Groningen: Wolters Noordhoff.
- Parreren, C.F. van (1982). *Op weg naar een genetische onderwijsleerpsychologie*. Groningen: Wolters Noordhoff.
- Parreren, C.F. van (1983). *Leren door handelen. Onderwijsvernieuwing in de klas*. Apeldoorn: Van Walraven.
- Parreren, C.F. van (1988). *Ontwikkelen onderwijs*. Apeldoorn/Leuven: Acco.
- Treffers, A. (1986). Analyseren en ontwikkelen van reken/wiskundeonderwijs vanuit twee verschillende basisconcepties. *Pedagogische Studiën*, 1963(1), 14-25.
- Treffers, A., E. de Moor & E. Feijs (1989). *Proeve voor een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 1: Overzicht einddoelen*. Tilburg: Zwijssen.
- Vries, E. M. de (1985). *Verkenning Kwantiwijzer. Vooronderzoek als hulpmiddel ter reconstructie van het project Kwantiwijzer als research programma*. Amsterdam: Vrij Universiteit.
- Vygotskij, L.S., (1986). *Thought and language*. Cambridge, MIT Press 1986.

In many of his publications, the mathematician Freudenthal draws explicit attention to the psychological perspective on the learning and teaching of mathematics. He was critical of psychologists' and educationalists' studies on mathematics education and made no secret of this. In this contribution we discuss Freudenthal's criticism of some psychological and educational themes. His ideas about psychology are clarified by confronting them with those of the psychologist Van Parreren, with whom he had discussions in the advisory committee of the 'Kwantiwijzer' project over many years. The common ground as well as the differences between these two are reviewed. The division of roles between mathematics and psychology in the project is also discussed. Freudenthal and Van Parreren disagreed completely with each other on some points. However, they could reach a consensus because they shared some basic assumptions. History shows that these originate in the thirties; since then, there have been more or less intensive contacts between some mathematicians and psychologists in the Netherlands. A plea is made to elaborate further on the common ground between Realistic Mathematics Education and the social-cultural school of psychology.

Walking with Bastiaan

Bastiaan (5,7). Walking with Bastiaan. He finds two tree branches. 'This is longer than that', he says - the difference was small. 'If you have three of them, what do you say then?', I ask him. I must help him: the biggest, the smallest, and in between. Then I ask him: 'At home you are the eldest, Daphne is the?' 'Youngest.' 'And Monica?' 'Is in between.' He takes one branch on each hand. 'This is heavier.' Maybe he is right, anyhow the difference is small. 'Can you weigh it with the spring balance?', I ask him. 'No', with indignation. Than: 'This one with the nail I can.' He probably meant that it can hang at the nail. 'How far does the spring balance weigh?', I ask. 'Up to 100.' 'And how much does this weigh?' 'A thousand.' 'Can you weigh it with the spring balance?' 'No, but with another balance.'

(Educational Studies in Mathematics, 8, 1977)