De meetlijn van Freudenthal

Ed de Moor
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Binnen het Wiskobasproject[1] *is in de jaren 1971-'81 intensief gewerkt aan een vernieuwd reken-wiskundeprogramma voor de basisschool. Professor Freudenthal behoorde tot het team van dertien medewerkers. Zelf heeft hij geen ontwerpen gemaakt, maar zijn betrokkenheid op het ontwerpwerk was diepgaand. Hij nam deel aan de discussies over mogelijke nieuwe leerstof, leerlijnen en didactiek, observeerde lessen in de praktijk en deed zelf experimenten met individuele leerlingen. Ook schreef hij fenomenologische beschouwingen over onderdelen van de wiskunde met betrekking tot de didactiek. Een van die stukken, 'Meten vanuit wiskundig standpunt', is de basis geweest voor baanbrekende ontwikkelingen binnen het meetonderwijs op de basisschool. Hoe dat in zijn werk is gegaan, heb ik persoonlijk ervaren. Thans, na meer dan dertig jaar, kijk ik er nog eens op terug.*[2]

figuur 1: Wiskobasteam uit 1973[3]

1 Inleiding

Wie voor 1980 de basisschool doorlopen heeft, zal opgaven als '102,6 m^2 + 0,13 ha = ...are' of 'Wat is de oppervlakte van een weiland van 98 bij 56 meter?' wel herkennen. Bij de eerste komt het neer op kennis van het metrieke stelsel en nauwgezet cijferen. Bij de tweede gaat het vooral om het toepassen van de formule 'lengte keer breedte' - door sommige auteurs werd dit meten genoemd. Toen echter aan het eind van de jaren zestig de Wiskobasbeweging opkwam, kreeg meten als nieuw onderwerp een heel ander accent. Allereerst bestond er in die tijd grote aandacht voor het *learning by doing*-principe, dat met name een kenmerk van het Britse Nuffield-project was. Tevens kwam het onderzoekswerk van Piaget in de belangstellingssfeer van het onderwijs.

F. Goffree (1972) ontwierp aan het begin van de jaren zeventig als eerste een werkboek voor het meetonderwijs op de Pedagogische Academie (PA). 'Meten en benaderen', zo heette blok 2 van een reeks werkboeken voor de toenmalige Pedagogische Academie. Deze blokken werden in getypte en geplakte vorm uitgegeven door het toenmalige Instituut Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (IOWO), waar ook het Wiskobasproject ondergebracht was. Ze werden op grote schaal gebruikt op de PA's. Het genoemde blok vertoont duidelijke aspecten van een empirische aanpak: veel zelf meten, gebruik van meetinstrumenten, gegevens verzamelen, grafieken maken en interpreteren, directe en indirecte meetmethoden, maar ook schatten, meetfouten en foutentheorie. Tevens werd aandacht besteed aan de ontwikkelingspsychologische aspecten van het meten volgens Piaget, maar vooral nieuw voor die tijd was de aandacht voor de mathematische achtergrond van het meten.

'Meten vanuit wiskundig standpunt', zo is de titel van een elf pagina's tellend artikel in dit blok. Een aparte auteursnaam ontbreekt, maar voorin vinden we bij de groep van medewerkenden de naam van Hans Freudenthal.[4] Dat dit stuk van de hand van Freudenthal was was algemeen bekend, maar tot voor kort wist ik niet dat hij het op verzoek van Goffree specifiek voor dit blok had geschreven. Het is in die jaren nergens officieel gepubliceerd, noch heeft hij elders over dit onderwerp op deze manier geschreven.[5] In zijn bekende 'Mathematics as an Educational Task' uit 1973 spreekt hij wel over het 'meetgetal' en het gebruik van grootheden, maar verder heb ik geen stuk van zijn hand kunnen vinden dat gelijkenis vertoont met dit artikel, althans met de eerste vijf pagina's ervan. De inhoud van die vijf pagina's is in de loop van de tijd voor de Nederlandse reken-wiskundedidactici 'de meetlijn van Freudenthal' gaan heten. Pas dertien jaar later is het artikel opgenomen in zijn boekje 'Appels en peren/ wiskunde en psychologie' (1984).[6] In het volgende gaat het om de betekenis van en invloed op het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs van dit tamelijk obscure artikel.

2 Freudenthals artikel

Freudenthal begint met het vergelijken van lengtes en gewichten. Dat gaat met gewone taaltermen als 'is groter dan' en 'is zwaarder dan'. Met voorbeelden als 'rent harder dan' of 'is slimmer dan' wordt het idee van een relatievoorschrift algemener gemaakt en meteen ook gesymboliseerd. Zo staat al snel de bekende transitiviteitswet (als $A > B$ en $B > C$ dan $A > C$) als een vanzelfsprekendheid op papier. Tevens wordt het begrip 'klasse' gedefinieerd ten behoeve van gelijkheid van lengtes, gewichten of andere grootheden. Vanuit een mathematisch standpunt bezien komt dit overeen met de orderelatie en de equivalentierelatie, hoewel FreudenthaL deze termen niet expliciet gebruikt. Hij beschrijft dit als de eerste kwalitatieve fase van het meten, waarbij nog geen getallen in het geding zijn: eerst vergelijken en daarna de resultaten ordenen. Hij geeft daarvoor nog een mooi voorbeeld: de zogenoemde hardheidsschaal van Mohs voor mineralen (fig.2).[7]

1. talk 2. gips	met de nagel te krassen
3. calciet 4. fluoriet	gemakkelijk met mes te krassen
5. apatiet 6. veldspaat	moeilijk met mes te krassen
7. kwarts 8. topaas 9. korund 10. diamant	niet meer met vijl te krassen maar geven kras op glas

figuur 2: schaal van Mohs

Voor het kwantitatieve meten moet allereerst een nieuwe operatie worden ingevoerd. Deze bewerking, die hij als volgt beschrijft, noemt Freudenthal samenstellen:

> Jan is zwaarder dan Piet, maar als Lies nog bij Piet op de wip gaat zitten, zijn ze samen even zwaar als Jan. Ik heb Piet en Lies samengesteld tot iets wat even zwaar is als Jan. Ik zeg 'samenstellen' en niet 'optellen'. Optellen doe je met zoiets als getallen. 'Piet + Lies' lijkt nergens op, maar omdat ik voor het samenstellen een teken moet hebben, gebruik ik maar eventjes. Jan $\approx$ Piet $\oplus$ Lies.

Uitgaande van het begrip 'even zwaar' en de 'samenstel'-operatie komt hij tot 'dubbel zo zwaar', waarmee de eerste stap is gezet tot het kwantitatieve meten. Maar gaat dat altijd? '*A* zingt dubbel zo mooi als *B*' of '*A* is dubbel zo slim als' zo vraagt Freudenthal zich af, waarmee hij anticipeert op het probleem van het opstellen van een numerieke maatschaal voor een ordening. Daarna laat hij aan het volgende voorbeeld zien dat de mens aanvankelijk met natuurlijke maten werkte, die vaak tot ingewikkelde omwisselpraktijken leidden.

> Er was eens een volksstam, die ruilhandel pleegde en als volgt rekende:
> 1 slaaf is evenveel waard als 3 slavinnen plus 1 ezel.
> 1 slavin is evenveel waard als 2 stieren plus 1 schaap.
> 1 stier is evenveel waard als 2 koeien.
> 2 koeien zijn evenveel waard als 5 ezels.
> 1 ezel is evenveel waard als 4 schapen.
> Toen kwam er iemand op het idee: laten we alles in schapen uitdrukken. Een schaap was dus de wettelijke eenheid in deze economie. Dat kost zoveel schapen - zei de man die een huis wilde verkopen; zij kost zoveel schapen - zei de vader met een huwbare dochter.

Door nu dit betalen 'in natura' te vervangen door een afspraak over een waarde-eenheid van een zekere hoeveelheid koper of zilver of goud komt men tot een 'standaardmaat':

> Hetzelfde doe je altijd bij numeriek meten. Je kiest een maateenheid: pond, voet, kilogram, duim, el, meter, schepel, mud, liter, dag, jaar, seconde, stuiver, duit, gulden, dollar, enz. Je zorgt er verder voor dat je die eenheid voldoende kunt reproduceren, om te meten grootheden in de eenheden uit te drukken.

Zoals bekend uit de dagelijkse praktijk kunnen we het gemeenschappelijke gewicht van twee objecten, die beide in kilogrammen zijn uitgedrukt, bepalen door die twee maten bij elkaar op te tellen. Freudenthal gaat daarvoor als volgt te werk. Hij neemt twee koffers, van twintig en veertig kilogram, en laat zien dat die kunnen worden samengesteld tot een object waaraan zestig kilogram kan worden toegekend, maar dan vraagt hij zich af:

> Is dat goed, twintig kilo + veertig kilo? Mag ik gewichten optellen of alleen maar getallen? Is dat niet zo iets als:
> Jan = Piet + Lies?

Hier wordt zo precies op ingegaan om de rekenstructuur, waaraan we zo gewend zijn bij het meten, te kunnen verantwoorden; zie maar:

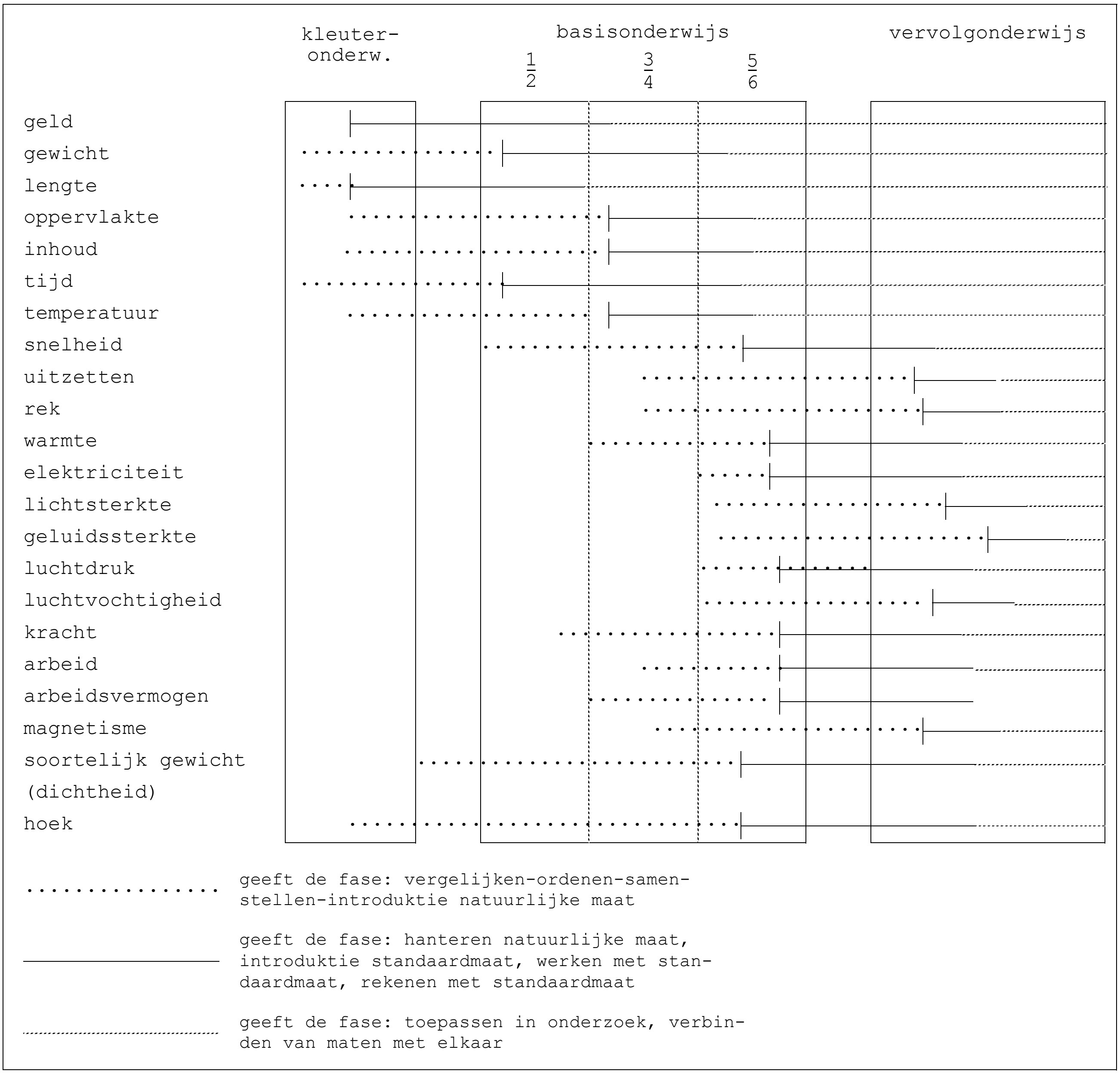
> Twintig kilo is, los van zijn feitelijke realisering, een rekenbegrip, waarmee ik rekenoperaties uitvoer. In de natuurkunde noemt men zoiets ook grootheden en werkt er rekenkundig mee.

De rest van het artikel handelt over grootheden. In het bijzonder over samengestelde grootheden, zoals oppervlakte, snelheid, druk, arbeidsvermogen en zo meer. Zo wordt verband gelegd met het natuurkundige groothedenstelsel en het rekenen daarmee. Hierop ga ik nu niet verder in. Ik beperk me tot de kern van dit stuk, de meetlijn van Freudenthal: vergelijken, ordenen, samenstellen en inwisselen, natuurlijke maat, 'standaardmaat'. Pas daarna zou het echte toepassen van het meten aan de orde moeten komen.

3 Uitwerking voor de nascholing en de basisschool

Toen het meten in de jaren zeventig op de PA als onderwerp op het programma kwam, werd er ook een blok over meten voor de heroriëntering voor onderwijzers ontworpen. Ook deze cursus was geënt op Freudenthals meetlijn, zij het dat daarin wat meer aandacht werd besteed aan het zelf ontwikkelen van maten en meetstrategieën.

De meeste invloed had Freudenthals stuk op het ontwerpplan voor de basisschool, waarin het meten toen als volwaardig 'leerstofvlak' (domein) werd onderkend. Het is met name H. ter Heege geweest, die dit onderwerp koos voor allerlei praktische meetopdrachten, een aantal in de vorm van kant en klare werkkaarten. Ter Heege bewerkte het stuk van Freudenthal voor de genoemde nascholingscursus en gaf er uitbreidingen aan. Hij liet aan de hand van praktijkvoorbeelden zien hoe een aantal traditionele meetonderwerpen (lengte, gewicht, volume) volgens de meetlijn zouden kunnen worden opgezet. Tevens pleitte hij voor verdergaande meetactiviteiten in het basisonderwijs. Hoever we daar indertijd mee wilden gaan, is te zien in figuur 3, waar een overzicht wordt gegeven van de grootheden, waarvan we toen meenden dat ze ook al op de basisschool aan de orde zouden kunnen komen. Kenmerkend hierbij zijn de trajecten, die aangeven hoe de fasen van de meetlijn voor alle grootheden doorlopen móesten worden.

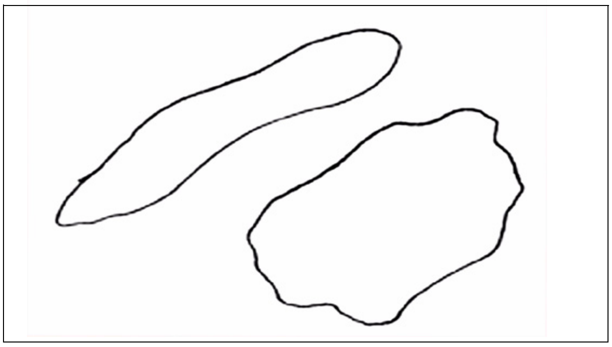


figuur 3: voorstel Wiskobas-leerlijn grootheden

4 Een leerlijn oppervlakte

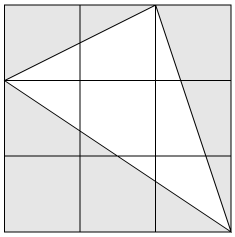
Nadat in 1975 het zogenoemde integratieplan ‘Overzicht van wiskundeonderwijs op de basisschool, een model voor een schoolwerkplan’ was gepubliceerd, kwamen er vragen uit het veld om nadere uitwerking van specifieke onderdelen. Een daarvan betrof oppervlakte. Samen met Ter Heege heb ik toen een jaar lang ontwikkelwerk op dit onderwerp gedaan. Het is een van de mooiste ervaringen die ik me uit die tijd herinner. Het sprak vanzelf dat het uitgangspunt weer Freudenthals meetlijn was. In de toen ontworpen werkbladen voor de onderbouw (thans groep 3 en 4) komen dan ook veel activiteiten voor over het vergelijken en ordenen van allerhande (ook niet ‘rechtlijnige’) vlakke figuren. Ruime aandacht wordt besteed aan ‘natuurlijke’ maten, voordat op het bekende vierkantenrooster wordt overgestapt.

We stuitten bij dit ontwikkelwerk echter op enige specifieke problemen. Vroegen we aan kinderen van zeven jaar welk stuk van twee willekeurige vormen (fig.4) het grootste was, dan wisten de meesten daar geen antwoord op of ze wezen er een aan, die naar hun idee het ‘langste’ was.



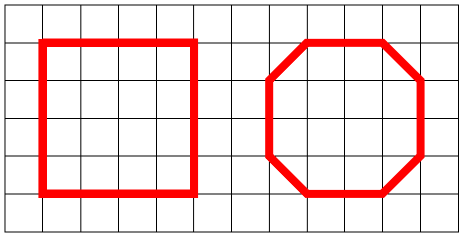
figuur 4: welke is het grootst?

Ook werd wel verwezen naar de omtrek van zo’n vorm. Hier bleek dat oppervlakte een veel lastiger begrip is dan lengte. Treffers heeft toen aanbevolen om oppervlakte in eerste instantie aan andere grootheden te binden. We veranderden de vraagstellingen door de kinderen te vertellen dat het hier ging om een keuze tussen twee stukken drop of koek van gelijke dikte. Dit bleek zeer goed te werken, en zo kozen we allerlei andere grootheden, zoals geldwaarde of tijd om te ploegen voor het vergelijken van oppervlakten van landjes. Een ander probleem bleek het zogenoemde ‘omstructureren’ van figuren te zijn. Allereerst moeten de kinderen het begrip van het behoud van oppervlakte - conservatie in de termen van Piaget - hebben, wanneer een figuur wordt verknipt en weer aan elkaar wordt geplakt. Maar tevens dienen ze daarbij enige meetkundige vaardigheden te hebben ontwikkeld. Toch boekten we ook hier frappante resultaten. Zeer lastig was ook het zogenaamde completeren of aanvullen van een figuur tot bijvoorbeeld een rechthoek (fig.5).



figuur 5: oppervlakte bepalen door completeren
$9 - 1 - 3 - 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$

Toen we dit soort problemen bespraken in de Wiskobasgroep, was het Freudenthal die daarvoor direct eenvoudige didactische tips bedacht: ‘Begin met een vierkant en knip daar eerst kleine stukjes vanaf en draai daarna pas de zaak om.’ Het werkte! (fig.6).



figuur 6: afknip-didactiek van Freudenthal

Het voert te ver op dit totale onderzoekswerk in te gaan. Ik merk slechts op dat we tijdens dat jaar ongelooflijk veel nieuwe aspecten van het meten ontdekten, dat we gebruikmaakten van de feedback van de hele Wiskobasgroep en vooral ook van een aantal ideeën van Freudenthal waarbij hij het oppervlaktebegrip in een veel ruimer kader plaatste dan tot dan toe gebruikelijk was.[8] De resultaten van dit onderzoeks- en ontwikkelwerk zijn in 1977 neergelegd in leerplanpublikatie 7, ‘Oppervlakte, handleiding en werkblok voor het basisonderwijs’. Daar wordt in de inleiding gesteld dat het meten van oppervlakte model stond voor het totale domein van het meten. Uit dit ontwikkelwerk bleek toen namelijk al dat consequent vasthouden aan deze ideële meetlijn niet voor elk begrip mogelijk en ook niet nodig is.

5 Freudenthal en Piaget

Toen ik in 1971 bij Wiskobas begon, was eigenlijk alles op het gebied van de rekendidactiek, pedagogiek, leer- en ontwikkelingspsychologie nieuw voor mij. Ik had wel eens van Piaget gehoord, maar nu moest ik me echt gaan verdiepen in zijn theorieën. Ik studeerde in zijn ‘Child’s conception of geometry’ en hoorde van de collega’s over de beroemde conservatieproeven. Iedereen kent wel het volgende voorbeeld. We laten een kind van een jaar of vijf twee identieke cylinderbekers zien, die met evenveel water gevuld zijn. Het kind ‘begrijpt’ dat het om gelijke volumes gaat. Daarna wordt een van de twee bekers in een smaller cylinderglas overgegoten, waarin het waterniveau hoger komt te staan. De meeste kinderen van die leeftijd zeggen nu dat de hoeveelheden water niet meer gelijk zijn. Het kind heeft de fase van begrip van conservatie van volume nog niet bereikt, zo wezen dergelijke experimenten van Piaget en zijn medewerkers uit.

In het genoemde PA-blok van Goffree wordt ook aandacht aan deze theorie besteed. Uitdrukkelijk wordt gewezen op het feit dat Piaget deze proeven niet bedoeld had als bijdragen voor de praktijk van het onderwijs. Hij wilde slechts aantonen dat de ontwikkeling en verwerving van begrippen als lengte, gewicht, volume, oppervlakte, tijd, enzovoort, volgens vaste fasen verlopen.
De PA-studenten kregen nu opdrachten om dit soort proefjes te herhalen of om te onderzoeken of een basisschoolmethode van toen hiermee wel rekening hield. Ondanks Piagets uitdrukkelijke bedoeling dat deze proeven niet voor het onderwijs bedoeld waren, baseerden veel moderne buitenlandse rekenmethoden rond de jaren zeventig zich bij de uitlijning van de leerstof en didactiek toch op zijn theorieën.

Uiteraard werd dit een onderwerp van discussie binnen de Wiskobasgroep. En toen ervoer ik Freudenthal als een ongemeen scherpe criticus ten aanzien van het werk van Piaget, althans zo kwam het toen op mij over. Zo herinner ik me nog hoe hij juist de genoemde proeven over conservatie van volume bekritiseerde in verband met de wijze van vraagstelling. Wat betekenen uitspraken als ‘wat is meer?’ of ‘is dit evenveel of even groot?’, waarbij hij teruggreep op de precieze formuleringen van de Franse verslagen. Hij verweet de wiskundedidactici de bevindingen van Piaget kritiekloos te volgen. Tevens stelde hij de verkeerde interpretaties van allerlei wiskundige concepten van Piaget (en zijn medewerkers) aan de kaak. Echt kwaad kon hij worden wanneer er blunders gemaakt werden zoals de gedachte dat een cylinder hetzelfde volume houdt als men de diameter halveert en de hoogte verdubbelt.

Later kreeg Freudenthal in zekere mate gelijk toen ook vakgenoten van Piaget als M. Donaldson (1978) en H. Gardner (1985) diens onderzoeken kritisch onder de loep namen. Met name Donaldson wees erop dat de uitkomsten van de experimenten geheel anders konden uitpakken indien de proeven in een voor de kinderen zinvolle context vervat werden. Dat was precies wat ook Ter Heege en ik ondervonden bij onze onderzoekingen over het oppervlaktebegrip.

Overigens heeft Freudenthal wel altijd zijn bewondering en waardering uitgesproken voor de rijkdom van ideeën en de originaliteit van Piaget. Men zal begrijpen dat wij toen in de Wiskobasgroep niet zomaar uitgingen van het ‘meten volgens Piaget’, maar de lijn van Freudenthal volgden.

6 De effecten van meetopvattingen

Vanaf de jaren tachtig kwamen er nieuwe reken-wiskundemethoden op de Nederlandse markt, die geënt waren op de realistische opvatting, zoals Treffers het Wiskobaswerk in 1979 heeft genoemd.[9] Ook het meten kreeg in deze schoolboeken een eigen plaats en de auteurs sloten zich aan bij de meetlijn van Freudenthal. Vooral het meten van oppervlakte kreeg veel aandacht, een gevolg van de eerdergenoemde publicatie over dit onderwerp. De uitwerking van het totale meten was echter niet zo breed- en diepgaand als in de Wiskobaspublicaties was beschreven, maar dat kon natuurlijk ook niet binnen de beschikbare tijd op de scholen.

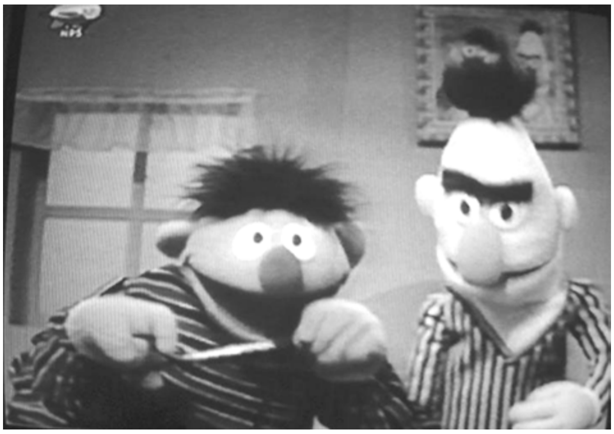
De vraag hoe de leraren met het onderwerp omgingen is nooit diepgaand onderzocht, maar uit de waarnemingen en verslagen van ondermeer schoolbegeleiders is gebleken dat de aard van het rekenonderwijs in feite niet veel veranderde. Men volgde het boek en nieuwe zaken, zoals meten en meetkunde, werden er zo’n beetje bij gedaan als er tijd voor was. Meten, dat bleef toch zoiets als een liniaal gebruiken en sommetjes maken. Men kan de leraren daarvoor niet verantwoordelijk stellen, omdat er vrijwel geen georganiseerde en verplichte nascholing op dit gebied heeft plaatsgevonden.
In 1999 kwam er echter een nieuwe kans. Binnen het door de overheid in gang gezette TAL-project werden meten en meetkunde opnieuw in studie en ontwikkeling genomen, althans voor de groepen 1 tot en met 4.[10] Het is met name K. Buijs geweest, die het meten voor deze leeftijdsgroep in een nieuw daglicht heeft gezet. In de TAL-publicatie ‘Jonge kinderen leren meten en meetkunde’ (Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 2004) wordt de globale leerlijn voor het meten als volgt omschreven:

– meten via vergelijken en ordenen;
– meten via natuurlijke maten en standaardmaten;
– meten via gebruik van een meetinstrument.

De overeenkomst met de meetlijn van Freudenthal, die overigens in het betreffende boek niet wordt genoemd, is vrijwel direct zichtbaar. Bekijken we de uitwerking wat nader, dan vallen echter wel degelijk verschillen op met de ideeën die zo’n vijfentwintig jaar terug opgeld deden. Allereerst worden vergelijken en ordenen niet meer zo strikt als verschillende fasen onderscheiden. Ze gaan als het ware hand in hand, waarbij meteen al gebruik gemaakt wordt van natuurlijke maten en ook van standaardmaten, zoals de meter, die de kinderen vaak al uit de praktijk van alledag kennen.
Ten slotte wordt het feitelijke meten met eenvoudige instrumenten als liniaal, brievenweger, maatglas en zo meer ook beoefend. De leerstof voor deze leeftijdsgroep is beperkt tot de grootheden lengte, gewicht, inhoud, een begin met oppervlakte en tijd als aparte grootheid.

Lengtemeting vormt de kern van alle meetactiviteiten voor dit niveau. Gewichtmeting wordt via het gebruik van een unster teruggebracht tot een lineaire schaal. De alledaagse standaardmaten als meter, kilogram, liter en zo meer behoren tot de leerstof.

De kern van Freudenthals meetlijn blijft zichtbaar en zelfs zie ik sprekende voorbeelden uit die tijd, die als het ware *evergreens* zijn, zoals het videofilmpje van Bert en Ernie, die een dropveter moeten verdelen (fig.7).



figuur 7: Bert en Ernie verdelen een dropveter

Hieraan zijn zo mooie en zinvolle opdrachten voor de kleuters te verbinden, zoals in het TAL-boek beschreven, dat je je nauwelijks kunt voorstellen dat niet elke leraar zoiets zou willen doen.

Lag toen de nadruk op de leerstofkeuze en -sequentie, nu gaat het vooral om (ontluikend) maatbesef, hetgeen in de TAL-publicatie als volgt wordt omschreven: besef ontwikkelen voor meten als benaderen, kwantitatief leren omgaan met alledaagse verschijnselen, daarbij een geschikte taal ontwikkelen, begrip van verschillende grootheden krijgen, en zich voorstellen welke maatsoorten daarbij horen. Ik denk dat Freudenthal zich hier heel goed in had kunnen vinden.

7 Reflectie

De aanleiding tot dit stuk was een voordracht die ik in mei 2004 hield tijdens het tiende symposium van de 'Historische Kring Reken en Wiskunde Onderwijs' (HKRWO). Ik heb daar wat uitgebreider verteld wat ik hierboven heb beschreven. Zoals dat wel vaker gaat wanneer je je in de historie van bepaalde kwesties begeeft, stuitte ik op feiten die tot dan toe onbekend waren. Verrassend was het voor mij dat Freudenthal die vijf pagina's zomaar op verzoek van Goffree had geschreven en dat ze verder nergens in zijn didactische werk zijn ingebed. Ook werd ik me bewust van het feit dat die vijf pagina's in Nederland nooit zo bekend geworden waren indien die niet door de gehele Wiskobasgroep waren omarmd en nader waren uitgewerkt. Freudenthal zelf heeft er zich verder eigenlijk niet meer mee bemoeid. Hij had een idee gezaaid en liet het verder aan anderen over om het tot bloei te brengen.

Toch kun je je achteraf afvragen hoe hij in staat is geweest zo'n stuk zo vlot te schrijven. Nu was professor Freudenthal een kenner van de geschiedenis in het algemeen, maar ook was hij thuis in de historie van de natuurwetenschappen en de wiskunde. Hij kon zich derhalve voorstellen hoe het meten zich in de loop der tijden ontwikkeld had. Alleen al op grond van de historisch-genetische ontwikkeling kan men zich de herontdekking - een principe dat hij graag propageerde - van de fasen van zijn meetlijn voorstellen. Het bijzondere is nu dat hij de meetbegrippen die bij de verschillende fasen behoren, tevens als mathematische begrippen (ordenen, relaties, klassen, maat, rekenstructuur) laat ontstaan. Natuurlijk, dat moest ook wel, Goffree had hem tenslotte gevraagd iets te schrijven waarin het meten vanuit wiskundig perspectief zou worden beschouwd. Als geen ander wist Freudenthal zijn stukken altijd zo te stileren dat ze toegesneden waren op het publiek waarvoor ze bedoeld waren. Vandaar dat hij in dit stuk, bedoeld voor de PA-student van toen, geen moeilijke wiskunde deed en in feite dichtbij het lerende kind bleef. En zo kon deze beschouwing ook uitgangspunt zijn voor een meer psychologisch-genetische ontwikkeling, zoals die later door de Wiskobasmedewerkers is uitgewerkt.

Nu verzin je zoiets natuurlijk niet op een achternamiddag. HF was goed op de hoogte van het werk van Piaget, maar hij wijdde er geen woord aan in zijn stuk. Toch vraag ik mij af of Piagets bevindingen hem niet onbewust beïnvloed hebben. Treffers heeft hem er toentertijd op gewezen dat diens opvattingen en die van Piaget over de fasen van de kinderlijke ontwikkeling in feite niet verschilden.
Piaget ging uit van de geestelijke ontwikkeling van het kind volgens vaststaande fasen: intuïtief-perceptief, handelend en formeel. Freudenthal zette zijn 'meetlijn' op vanuit de historisch-genetische ontwikkeling van wiskundige begrippen.
Toen enkele jaren geleden bij het TAL-project deze schijnbaar tegengestelde opvattingen van Piaget en Freudenthal weer ter sprake kwamen zijn de 'geschilpunten' nog eens onderzocht, zowel in historisch-didactische als in leerpsychologische zin. En er werd opnieuw geconstateerd dat beide opvattingen niet met elkaar in tegenspraak zijn. Beide grote geleerden hebben het meten als belangrijke menselijke activiteit onderkend en beiden hebben fundamentele bijdragen geleverd zowel voor de ontwikkelingspsychologie als voor de didactiek van het reken- en wiskundeonderwijs.
Omdat ik vanuit de laatste discipline heb meegewerkt aan de verdere ontwikkeling van het meten en daarbij de

beste herinneringen bewaar aan Hans Freudenthal, blijf ik toch maar het liefst spreken van 'de meetlijn van Freudenthal'.

Noten

1 Wiskobas staat voor: '*Wisk*unde *o*p de *bas*isschool'.
2 Met dank aan F. Goffree.
3 Het toenmalige Wiskobasteam bestond uit (van *l* naar *r*): Edu Wijdeveld, Louis Gilissen (U), Fred Goffree, Henk Meijer, Jan van den Brink, Ed de Moor, Adri Treffers, Johan van Bruggen, Hans Freudenthal (U), Huub Jansen, Rob de Jong, Hans ter Heege, Leen Streefland (U), Ineke Hoogeveen (zittend). Afwezig: Betty Heijman en Ada de Graaf.
4 De overige medewerkenden waren K. Kuipers, D. Karman, A. Treffers en E. Wijdeveld. Goffree voerde de redactie.
5 In de *Inventory of the papers of Hans Freudenthal* (1905-1990) staat onder nummer 1297: '*Meten vanuit wiskundig standpunt*'. Photocopy of a chapter from *Wiskunde en didactiek in de onderwijzersopleiding*, 1976, also appeared in *Appels en peren / wiskunde en psychologie*.
6 In dit gedeelte van de oorspronkelijke tekst bevonden zich twee storende fouten. Ze zijn hier herzien, zoals dat later ook in de tekst van 'Appels en peren' is gebeurd.
7 Deze tabel staat in het zogenoemde Wisboek *Meten* (blok VIII, 1973), een handleiding voor docenten van de heroriënteringscusussen.
8 In 1978 heeft Freudenthal een aantal van deze ideeën beschreven in *Wiskobas Bulletin, 7*(5/6), leerplanpublikatie 9 onder de titel: *Oppervlakte als verschijnsel benaderd*.
9 Treffers gebruikt deze term voor het eerst in Fundering, Cijferend vermenigvuldigen en delen (1). *Wiskobas Bulletin, 8*(5/6), 84.
Zie ook: E.W.A. de Moor (1999). *Van vormleer naar realistische meetkunde*, 373-374.
10 TAL staat voor 'Tussendoelen Annex Leerlijnen'. Een team van deskundigen van het Freudenthal Instituut en de SLO heeft voor het rekenen met hele getallen tussendoelen en leerlijnen opgesteld, die een aanvulling dienen te zijn op de kerndoelen.

Literatuur

Donaldson, M. (1978). *Children's Minds.* Glasgow: Fontana/ Collins.
Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Freudenthal, H. (1984). *Appels en peren / wiskunde en psychologie*. Apeldoorn: Van Walraven.
Gardner, H. (1985). *Frames of Mind.* London: Paladin Books, Granada Publishing Ltd.
Goffree, F. (1972). *Meten en benaderen.* Blok 2 voor Wiskunde en Didaktiek voor de Pedagogische Akademie. Utrecht: IOWO.
Heege, H. ter & E. de Moor (1977). Oppervlakte. Handleiding en werkblok. *Wiskobas Bulletin, 7*(1/2), leerplanpublikatie 7. Utrecht: IOWO.
Heege, H. ter & E. de Moor (1973). *Heroriëntering Onderwijzers, blok VII Meten. Ko-boek.* Utrecht: IOWO.
Heuvel-Panhuizen, M. van den & K.Buys (red.) (2004). *Jonge kinderen leren meten en meetkunde.* Groningen: Wolters Noordhoff.
Piaget, J., B. Inhelder & A. Szeminska (1966). *The child's conception of geometry.* London: Routledge and Keagan Paul.

Over the period 1971-'81 the Wiskobasteam did a lot of work to create a renewed math curriculum for Dutch primary schools. Professor Freudenthal was one of the thirteen members of this group. Although he did not create any designs himself, he was deeply involved with the design of the curriculum as a whole. He took part in discussions about new contents, learning trajectories and didactics. He observed lessons in schools and did some experiments with individual students. He also wrote phenomenological essays on the specific didactics of several math topics. One of these essays 'Measuring from a mathematical point of view' has become the foundation of pioneering developments in measurement education in primary school. With my own eyes I have seen how that happened. Now, after more than thirty years, in this article I look back on the birth of the so-called 'Freudenthal learning trajectory for measurement'.