Over memoriseren[1]

- ontwikkelingen in het onderwijs in vermenigvuldigen -

Hans ter Heege
SLO, Enschede / Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Dit artikel gaat over het memoriseren van elementaire vermenigvuldigfeiten, ook wel 'de tafels' genoemd. Aan de opzet van een didactische aanpak die tot vernieuwing van de aloude tafeldidactiek leidde, hebben velen bijgedragen. Onder hen ook Hans Freudenthal.
Ik zal in dit artikel een poging doen de ontwikkeling in het denken over memoriseerprocessen in beeld te brengen en daarbij Freudenthals invloeden te achterhalen. Het verrassende punt is dat hij aanvankelijk weinig aandacht schonk aan memoriseerprocessen in het reken-wiskundeonderwijs. Wellicht vond hij de betekenis van feitenkennis in het rekenen van ondergeschikt belang. Maar allengs zag hij in hoe cruciaal deze processen zijn voor (de start van) een effectieve mathematische kennisontwikkeling.

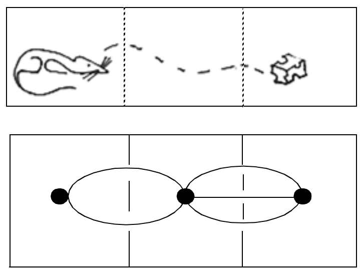
1 ICME 1972

Ik begin dit artikel over de betekenis van het memoriseren in het (aanvankelijke) reken-wiskundeonderwijs met twee gebeurtenissen die zich in het begin van de jaren zeventig van de vorige eeuw afspeelden.

In de jaren zestig was op initiatief van Freudenthal de ICME[2] opgericht, die in 1969 haar eerste internationale conferentie voor wiskundeonderwijs in Lyon organiseerde. Op de tweede ICME-conferentie te Exeter in 1972, speelde de lezing van een prominente deelnemer een belangrijke rol, namelijk die van de al op leeftijd zijnde G. Polya. De titel luidde 'As I read them'.[3] Freudenthal was bereid gevonden zitting te nemen in de programmacommissie van deze conferentie en oefende daarmee zijn invloed uit op de invitatie van deze spreker. Polya's boek 'How to solve it'[4] was kort voor de conferentie verschenen. Het bevatte een, volgens velen, centraal thema van het wiskundeonderwijs: hoe je problemen kunt (leren) oplossen. Hij beschreef er regels in die ten grondslag zouden liggen aan de 'ontdekking en uitvinding' van heuristieken in het wiskundig denken, veelal aan de hand van voorbeelden uit de meetkunde.
Dit was een onderwerp dat Freudenthal sterk aansprak. Enkele stellingen die Polya in het verslag van de conferentie liet opnemen zijn geheel in lijn met Freudenthals denken over het leren van wiskunde, zoals:

> The ideas should be born in the student's mind and the teacher should act only as midwife (naar Socrates).
>
> Intuition is the conception of an attentive mind, so clear, so distinct, and so effortless that we cannot doubt what we have so conceived (naar Descartes).
>
> Nothing is more important than to see the sources of invention which are, in my opinion, more interesting than the inventions themselves (naar Leibnitz).
>
> What is good teaching? Giving opportunity to the student to discover things by himself (naar Herbert Spencer).

Rond diezelfde tijd kwam Freudenthal op een gegeven moment in een bijeenkomst van de Wiskobasgroep,[5] waar gewoonlijk nieuwe ideeën besproken werden, met een verrassend en interessant voorbeeld. Hij toonde de groep een tekening.



figuur 1: de muis en de kaas

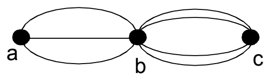
De vraag die erbij werd gesteld luidde: op hoeveel manieren kan de muis naar de kaas toe? Of, wellicht op meer kinderlijk niveau: hoeveel weggetjes zijn er voor de muis naar de kaas? Het is geen makkelijk probleempje voor leerlingen van groep 3 of 4. Het zal niemand verbazen dat zij hierop vaak met '5' antwoorden, zelfs als hen wordt gevraagd de mogelijke weggetjes op het werkblad te tekenen.
Hoe komt dat? Wel, ze tellen gewoon het aantal poortjes en gebruiken hun kennis van het tellen of van 'groepjes bij elkaar nemen' om het antwoord te geven (Van den Brink e.a., 1973).

Veel meer dan dit hebben ze op zo'n moment immers nog niet in huis. Additieve wiskundige structuren zijn dan nog zo dominant in hun wiskundige kennisbezit, dat veel leerlingen bij het zien van vijf poortjes denken dat er voor de muis slechts vijf weggetjes mogelijk zijn om de kaas te bereiken.

Het was daarentegen Freudenthals bedoeling leerlingen van deze leeftijd door middel van dit probleem in de gelegenheid te stellen de bewerking 'vermenigvuldigen' te ontdekken. Want de vermenigvuldiging 2×3 is de geëigende oplossing voor het probleem. Zo wordt leerlingen de gelegenheid geboden om een volgende stap in hun wiskundige ontwikkeling te nemen. Het gaat dus niet alleen om de oplossing van het probleem van 'de muis en de kaas', maar om de ontdekking van de multiplicatieve structuur, die in dit voorbeeld op een ietwat verdekte manier aanwezig is.
De relatie met Polya's ideeën over wiskunde als activiteit waarmee men problemen zou kunnen oplossen, ligt voor de hand. Hoewel Freudenthal in die tijd bijzondere interesse had in het wiskundig denken dat zich richtte op het oplossen van problemen, voegde hij er nu een belangrijk element aan toe: leerlingen kunnen met het muis-en-kaasprobleem een belangrijke stap maken in hun wiskundige ontwikkeling. Zij worden zo in staat gesteld de multiplicatieve structuur van problemen te ontdekken. Het probleem van 'de muis en de kaas' staat als het ware model voor een pril begrip van de bewerking vermenigvuldigen.

2 Didactisch onderzoek naar vermenigvuldigen

Het geschetste probleem vormt een aanleiding om multiplicatieve structuren in de wiskunde nader te doordenken. Medewerkers van Wiskobas gaan met dit gegeven aan de slag. Van den Brink, met speciale aandacht voor de groepen 3 en 4, interviewt leerlingen van de basisschool om meer grip te krijgen op de vraag hoe kinderen zich de bewerking vermenigvuldigen, met inzicht eigen maken. Zijn collega Van Bruggen en ikzelf bezinnen ons op een meer effectieve aanpak van het cijferend vermenigvuldigen en delen dan tot op dat moment in het onderwijs gebruikelijk was. Daarbij is het kunnen vermenigvuldigen uiteraard een onmisbare voorwaarde.
In een zogenoemde leerplanpublicatie, een speciale uitgave van het Wiskobas-Bulletin (Treffers (ed.), 1979), zoals die door Wiskobas met enige regelmaat werd uitgebracht, legt de Wiskobasgroep haar vernieuwende ideeën over het vermenigvuldigen aan het onderwijs voor.
In publicatie nummer 10 uit 1979, is een hoofdstuk opgenomen, dat werd geschreven door Treffers, onder de titel 'wijder verband', waarin wordt ingegaan op de achtergrond van de bewerking vermenigvuldigen.
In de paragraaf 'modellen en schema's' wordt een opsomming gegeven van een twaalftal modellen voor vermenigvuldigen die in didactisch opzicht van belang zijn, alles aan de hand van de voorbeeld-vermenigvuldiging 3×4. In hun totaliteit weerspiegelen de twaalf modellen de vermenigvuldigstructuren die in diverse situaties voorkomen. Een van de twaalf modellen is isomorf met dat van het muis- en kaasprobleem en wordt hier het 'wegenmodel' genoemd (fig.2).



figuur 2: het wegenmodel uit leerplandeel 6 van Wiskobas

Zo wordt voortgeborduurd op het initiatief dat Freudenthal nam met de introductie van het muis- en kaasprobleem, en tevens op diens aanpak om wiskundige fenomenen in een didactische context te beschrijven, volgens een didactische fenomenologie.

Over de rol van modellen schrijft Treffers dat deze een belangrijke functie kunnen vervullen bij het oplossen van toepassingsproblemen. 'Zo staan modellen van het reken-wiskundeonderwijs tussen de concrete werkelijkheid enerzijds en het abstracte rekenen anderzijds', voegt Goffree daar later in zijn boek voor de opleidingen aan toe (Goffree, 1974). De nadruk in de ontwikkeling van het vermenigvuldigen als basisvaardigheid, zoals door Wiskobas werd aangegeven, lag tot het midden van de jaren zeventig op twee zaken:

1 Leerlingen tot het inzicht brengen welke problemen je met behulp van de bewerking vermenigvuldigen effectief zou kunnen oplossen.
2 Nagaan hoe leerlingen in de middenbouw het cijferend vermenigvuldigen konden leren.

In het eerste punt paste de aandacht voor modellen en schema's, alsmede de wens om het vermenigvuldigen met inzicht te leren, onder meer in onderscheid met het optellen. Ofwel, het vermenigvuldigen leren begrijpen als de geëigende bewerking bij problemen met een multiplicatieve structuur. Parallel hieraan werd een waaier aan zogenoemde telproblemen bedacht en uitgewerkt die effectief door een vermenigvuldiging konden worden opgelost. Een voorbeeld daarvan is het volgende probleempje:

> Een gezelschap van zeven mensen ontmoet elkaar na jaren weer. Iedereen geeft de ander een hand. Hoeveel handdrukken worden er op de reünie gegeven?

Het antwoord 21 kan via de vermenigvuldiging $7 \times 6 = 42$ worden gevonden. Dit tussenresultaat moet door 2 worden gedeeld omdat als persoon A persoon B een hand geeft, B vanzelfsprekend ook A een hand geeft. In het tweede moeten toepassingen van feitenkennis van het vermenigvuldigen onmisbaar worden geacht. De nadruk lag, wat het vermenigvuldigen als elementaire rekenvaardigheid betreft, aanvankelijk dus op het oplossen van problemen, ofwel op het toepassen van eerder verworven kennis van vermenigvuldigingen.

3 Realiteit van het rekenonderwijs in de jaren na WO-II

Als we ons realiseren hoe het rekenonderwijs er anno 1970 in Nederland uitzag, wordt het duidelijk hoe ingrijpend de vernieuwing was die Wiskobas, met Freudenthal als teamlid met een speciale rol, in dit opzicht voorstelde. De dominante rekenmethode uit die tijd was 'Naar Zelfstandig Rekenen',[6] een methode waarin de introductie van het vermenigvuldigbegrip ronduit 'arm' kon worden genoemd. Dit begrip wordt in de methode via rijen tafels aangeboden, modellen voor vermenigvuldigen komen niet voor. Freudenthal wilde dat kinderen met inzicht leerden vermenigvuldigen. 'Naar Zelfstandig Rekenen' kwam niet veel verder dan kinderen voor te bereiden op het maken van sommen. Het lag dus voor de hand dat Freudenthal huiverig stond ten opzichte van de traditionele aanpak zoals die in de methode 'Naar Zelfstandig Rekenen' werd gepraktiseerd.
Er was in die tijd, in het begin van de jaren zeventig, aandacht voor vernieuwing van het rekenonderwijs, maar men meende die te moeten vinden in een andere organisatievorm van dit onderwijs. Leerlingen werden in zogenoemde niveaugroepen ingedeeld en werkten grotendeels zelfstandig aan taken uit de methode. De methode die dit organisatorische model in de meest uitgesproken zin hanteerde, was 'Niveaucursus Rekenen'. Kenmerkend voor de didactiek was de eenzijdige nadruk op het oefenen van rekenfeiten en -procedures, wat mede een gevolg was van het werken in niveaugroepen, die in methoden als 'Naar Zelfstandig Rekenen' en 'Niveaucursus Rekenen' werd nagestreefd. Het idee was dat kinderen de beoogde rekenkennis zouden verwerven door veel schriftelijk te oefenen.
Zowel de organisatievorm waarin het rekenen volgens de vernieuwers van het midden van de jaren zestig plaats zou moeten vinden, als de nadruk op het veelal schriftelijke oefenen, ondervonden veel kritiek in het onderwijsveld. Wiskobas sloot zich daarbij van harte aan en onderbouwde haar mening met veel voorbeelden uit de onderwijspraktijk, die openingen vormden voor een andere aanpak.

Het automatiseren van rekenprocedures en het memoriseren van feitenkennis in het reken-wiskundeonderwijs is niettemin van groot belang voor de voortgang in het rekenen. Leraren in het basisonderwijs waren zich daar terdege van bewust.
In de jaren zestig en zeventig meenden veel leraren echter, daarin gesteund door traditionele, later 'mechanistisch' genoemde methoden uit die tijd, dat het leren rekenen grotendeels op memoriseren van feiten en automatiseren van procedures neerkwam. Inzicht in de wiskunde werd destijds vooral geïnterpreteerd als inzicht in van tevoren door deskundigen bepaalde procedures en werd nauwelijks een element geacht in het kindeigen proces van verwerving van de wiskunde.
Dit was Freudenthal een doorn in het oog. Hij was sterk gekant tegen overmatig oefenen om te memoriseren en tegen het vroegtijdig verwoorden van abstracte rekenregels. Ook Wiskobas zou daar aandacht aan besteden en er vernieuwende voorstellen voor doen. De omslag die in dit opzicht door Wiskobas en Freudenthal werd bepleit, werd in een *one-liner* geformuleerd: 'Wiskunde is een menselijke activiteit, dus ook een activiteit van kinderen (zelf)'.

4 Appels en peren

Freudenthal had in vele geschriften stelling genomen tegen de vernieuwing die het structuralisme in het rekenonderwijs van na de Tweede Wereldoorlog wilde doorvoeren. In een bundel met enkele opstellen die hij in de loop van de jaren had geschreven komt zijn stellingname duidelijk naar voren (Freudenthal, 1984a).

> Dankzij IOWO en Wiskobas is Nederland de vloedgolf van averechtse vernieuwing bespaard gebleven die in de jaren zestig en zeventig de onderwijswereld overspoelde,

schrijft Freudenthal in het hoofdstuk 'Wiskundig-didactische principes - vanuit rekenonderwijs gezien'. Een van die principes gaat in op de vanouds bekende tafeldidactiek. Hij schrijft daarover:

> Volgens de aloude rekendidactiek worden de tafels gememoriseerd door ze rij na rij op te zeggen. Kinderen wordt wijsgemaakt dat ze om 7×8 te beantwoorden de tafel van 8 binnensmonds moeten opzeggen om bij 7×8 te stoppen, hetgeen dan hoorbaar wordt geuit.
> Maar onderzoekers hebben vastgesteld dat kinderen die men hun gang laat gaan, hun eigen flexibeler methoden ontwikkelen: commutativiteit, verdubbelen, halveren, met 10 vermenigvuldigen, op- en afstappen van bekende produkten, en dit al met elkaar gecombineerd, bijvoorbeeld om 7×8 te berekenen; $2 \times 8 = 16$, $2 \times 16 = 32$, $2 \times 32 = 64$, $64 - 8 = 56$.
>
> De slimmen doen het slim. Neen, niet de slimmen, maar de moedigen die grote stappen aandurven. Het is de taak van de onderwijzer dit te bemoedigen.

Dit voorbeeld haalt hij aan om een van zijn wiskundig-didactische principes te verduidelijken. Die luidt in dit geval:

> Vooruitwijzend leren verdient de voorkeur boven het keurslijf van systematisme.

Hij zegt verder:

> Ik heb dit voorbeeld aangehaald omdat het verdubbelen en halveren zich vroegtijdig aanbiedt als vooruitwijzend leren van vermenigvuldigen en delen. Maar we zagen al dat ook het memoriseren van de tafels vooruitwijzend leren is, want pas bij het cijferen komt de kennis van de tafels echt te pas. Pas door de behoefte bij het cijferen wordt het van buiten kennen goed gemotiveerd en het van buiten leren echt bevorderd. Daarmee zou men rekening kunnen houden door het stimuleren van vooruitwijzend cijferen waar nu het mondeling rekenen overheerst.

De rekenkennis die een leerling op een gegeven moment verwerft, staat dus niet op zichzelf. Zo is het ook met de kennis van het vermenigvuldigen. Met die kennis kun je nieuwe kennisvelden aanboren. Ze werpt als het ware haar schaduw vooruit. Maar hoe je de elementaire vermenigvuldigfeiten kunt memoriseren, wordt uit Freudenthals beschouwing nog niet duidelijk.

5 Ervaringen met kinderen over tafels leren

Aan het eind van de jaren zeventig deed ik, als teamlid van Wiskobas, in een kleine basisschool te Est bij Geldermalsen ervaring op met de manier waarop kinderen zelf, zonder dwang van een door de traditionele didactiek voorgeschreven aanpak, de tafels van vermenigvuldiging probeerden te verwerven.[7] De school hanteerde de methode 'Naar Zelfstandig Rekenen', met haar begindeeltjes 'Jongleren met Getallen', waarin de vanouds bekende tafeldidactiek werd gevolgd. Deze didactiek kan worden gekarakteriseerd met de volgende punten: (1) de bewerking vermenigvuldigen wordt nauwelijks inzichtelijk aangeboden; modellen, bedoeld om het denken te ondersteunen, komen in deze aanpak niet voor; (2) er wordt weinig tot geen gelegenheid geboden tot het leren uitrekenen van basisvermenigvuldigingen; (3) wat het memoriseren van vermenigvuldigfeiten betreft ligt de nadruk op het eenzijdig en blind uit het hoofd leren van de tafels. De school hanteerde deze didactiek uiteraard ook, hier en daar aangevuld met enige stimulerende maatregelen, zoals een tafelrapport per kind; er was immers niets anders waarop men zich kon baseren.
In de school in Est sprak ik met een groot aantal leerlingen, uit alle groepen vanaf groep 4, diepgaand over hun tafelkennis. Daaruit bleek al snel dat sommigen van hen grote problemen hadden met deze leerstof. Er waren leerlingen van de hoogste leerjaren die de tafels nog steeds niet op een adequate wijze, zoals die door de traditionele didactiek werd beoogd, kenden. Anders gezegd, deze leerlingen bezaten als feitenkennis slechts flarden van het totale tafeldomein. Daarnaast kon men ook leerlingen van groep 5 aantreffen die erin geslaagd waren zich de tafels op de gevraagde manier eigen te maken, door opzeggen en veelvuldig oefenen. Het gaat te ver om te zeggen dat de kennis van de tafels die leerlingen toonden geheel onafhankelijk was van het leerjaar waarin ze zich bevonden, maar een eenduidige relatie was er ook niet. Dit is een belangrijk punt, want in wezen wordt hier gewezen op een deficit in de traditionele tafeldidactiek.
De vraag was daarom: zou het ook anders kunnen? Ook het antwoord op die vraag gaven de leerlingen van deze school in Est. Vroeg ik ze bijvoorbeeld naar het antwoord op 9×6, dan gaven veel leerlingen daar een correct en sommigen een incorrect antwoord op, maar dat was niet mijn hoofddoel in de interviews. Het hoofddoel was te achterhalen hoe ze tot de oplossing kwamen. Natuurlijk probeerden veel leerlingen mij te antwoorden door, in het geval van 9×6, de tafel van zes op te zeggen. Door de vraag die ik hen stelde, 'vlogen ze direct in de netten' van het geijkte patroon van de traditionele didactiek. Om het anders te doen, vereist natuurlijk vertrouwen in mij als hun gesprekspartner. Als ze eigenlijk anders dachten dan ze in hun antwoorden toonden, zou ik de situatie wel eens misprijzend kunnen beoordelen. Dat merken leerlingen direct, onder meer omdat ze gewend zijn te reageren zoals hun leraar wil. Een standje of het misprijzen van de leraar probeert iedere leerling natuurlijk te voorkomen.

Het interessantste waren daarom de antwoorden van de leerlingen die de vrijheid namen om mij te vertellen wat ze werkelijk dachten. Slechts een deel van de leerlingen bleek hiertoe in staat. Met hen ging ik in eerste instantie verder. Toen bleek dat sommigen een geheel eigen, in de zin van niet-onderwezen, dus 'informele' oplossing hadden bedacht. Zoals voor 9×6: eerst $10 \times 6 = 60$, dan 6 eraf, met het antwoord 54. Deze aanpak van de kinderen uit Est werd in de jaren tachtig in enkele publicaties beschreven en bijvoorbeeld ook verwoord in de afscheidsbundel van het IOWO, 'De achterkant van de Möbiusband', uit 1980.[8] Het was verrassend om te zien dat er een waaier aan oplossingen voor de dag kwam, die echter geïnterpreteerd moest worden als 'niet van buiten gekend'. 'Maar', vroeg ik me af, 'waren ze slechts berekend of toch van buiten gekend?' Ik ontdekte dat leerlingen voorkeuren hadden voor bepaalde oplossingen, bijvoorbeeld om $9 \times A$ te berekenen via $10 \times A$, maar dat zij de oplossing die hun voorkeur had uiterst snel konden reproduceren. Zo snel dat het verschil tussen 'even uitrekenen' en 'van buiten kennen' voor de meesten van ons niet eens te merken zou zijn geweest. Tafels van buiten kennen en tafelproducten uiterst snel kunnen berekenen kan men als twee 'toestanden' van vermenigvuldigkennis onderscheiden, maar ik gaf er weldra de voorkeur aan ze als vrijwel identiek te zien.
Er ging, dankzij de leerlingen in Est, een nieuwe wereld voor me open: we dachten dat de aloude didactiek van de tafels 'rigide' was en wellicht ook moest zijn. We ontdekten echter dat leerlingen zelf veel flexibeler waren en gebruikmaakten van de relaties in het rekenen die ze min

of meer zelf tussen allerlei vermenigvuldigingen hadden ontdekt, zoals het verdubbelen en halveren. Zo werden nieuwe vermenigvuldigingen verkregen. De een bleek daar overigens vaardiger in te zijn dan de ander.

Met deze gegevens die de leerlingen mij hadden aangereikt op zak, interviewde ik daarna ook leerlingen die geen eigen, informele oplossingen voor vermenigvuldigingen hadden. Zij vertelden mij vaak standaardoplossingen. Dit wil zeggen dat zij geneigd waren de tafels simpelweg op te zeggen. Het gros van deze leerlingen was niet in staat om de flexibele oplossingen van hun leeftijdgenoten over te nemen, maar een deel van hen begreep heel goed welke voordelen het gebruik van een flexibele oplossing had. Dat nog relatief veel leerlingen de weg volgden die hen door de traditionele didactiek was aangereikt, is te begrijpen en te billijken. Het is nu eenmaal moeilijk afstand te nemen van een oplossing die je geleerd hebt, die je inmiddels vertrouwd geworden is en waarmee je hebt aangetoond succesvol te kunnen rekenen.

Theoretisch bezien was het onderzoek dat ik in Est deed interessant, omdat de flexibele aanpak van de tafels laat zien dat leerlingen de kennis die ze hebben verworven kunnen inzetten ten behoeve van nieuwe kennis (Ter Heege, 1985). Wil je bijvoorbeeld de verdubbeling kunnen inzetten bij 4×6, dan moet je weten dat 2×6 (ofwel $6 + 6) = 12$ en je moet deze kennis kunnen inzetten bij de verdubbeling $12 + 12 = 24$. Maar het gaat ook verder: 14×9 kan immers met inzicht worden berekend door 14 van 10×14 af te trekken: $140 – 14 = 126$. Dit met strategieën uit het hoofd uit te rekenen, lag in de oude didactiek niet voor de hand, maar kwam met de flexibele aanpak opeens binnen handbereik.
Zo werpt deze haar schaduw vooruit. Als leraren een flexibele rekenwijze stimuleren, gaan kinderen die ook toepassen op aanpalende terreinen. Terreinen die strikt genomen verdergaan dan de tafels alleen. Verder was het voor mij en de Wiskobasgroep van belang ons te realiseren dat de traditionele standaarddidactiek voor de tafels voor een deel van de leerlingen geen soelaas bood. De zwakke leerlingen leken meer profijt te hebben bij de nieuwe aanpak die zich richtte op inzichtelijke oplossingen van de tafels, omdat er daarbij beter werd aangesloten bij wat ze al eerder aan rekenkennis hadden verworven. En dan - ten slotte de kern van dit betoog - werd er een nieuwe ‘definitie’ gegeven voor het memoriseren van tafels van vermenigvuldiging. ‘Blind memoriseren’ van de tafels bleek voor een deel van de leerlingen niet effectief, misschien zelfs anti-productief. Memoriseren van tafels vloeit voort uit het met inzicht gebruiken van eerder opgedane rekenkennis.[9]
Deze conclusie strookt helaas niet met wat het merendeel van de leraren basisschool toen en ook nu nog van mening is: tafels leren moet je doen door stampen. De spanning die er zo ontstaat tussen wat leraren menen en wat er na diepgaand didactisch onderzoek als meest wenselijke aanpak voor het leren van tafels van vermenigvuldiging naar voren komt, blijkt in het onderwijs decennia later nog steeds voelbaar.

6 HF’s artikel ‘Memoriseren’ in ‘Willem Bartjens’

Hoewel Freudenthal het leren van wiskunde in het begin van de jaren zeventig, de beginperiode van Wiskobas, vooral koppelde aan het leren oplossen van problemen, betekende dit niet dat hij geen oog had voor de rol die het geheugen en het onthouden speelde in het leren rekenen. Er waren in die begintijd veel tegenstanders van de vernieuwing die door Wiskobas, en dus door Freudenthal, werd bepleit. Die meenden dat het memoriseren en automatiseren in het vernieuwde reken-wiskundeonderwijs een (te) ondergeschikte plaats zou krijgen. Uit het hoofd leren zou in het reken-wiskundeonderwijs in ieder geval veel minder dominant zijn dan zij voor wenselijk hielden. Zij leidden dit af aan het vigerende rekenonderwijs van die tijd, waarin de memoriseer- en automatiseerprocessen juist veel nadruk kregen.

Het lag bij Wiskobas in werkelijkheid echter heel anders dan zij vermoedden. Wiskobas keerde zich niet tegen het memoriseren en automatiseren op zich, maar wel tegen het betekenisloze memoriseren, dat in het oude rekenonderwijs veelal gekoppeld was aan het excessieve oefenen van blinde reken-wiskundige feiten en procedures. Dit oefenen zou aan banden moeten worden gelegd, ten faveure van het leren-met-inzicht. Oefenen was dus ook een gewenst aspect van het nieuwe reken-wiskundeonderwijs. Het zou in het kader van ‘leren met inzicht’ moeten worden gezien, meende het Wiskobasteam.

Deze opvatting verwoordde Freudenthal (1984b) in een artikel met de veelzeggende titel ‘Memoriseren’. Na de lezer enige voorbeelden te hebben gegeven van wat hij zelf uit het hoofd weet - en daarin vergelijkingen trekt met het leren van taal - zegt Freudenthal dat er twee manieren van uit het hoofd leren bestaan: het bewust memoriseren (dat hij ‘akoestisch memoriseren’ noemt) en het met steuntjes onthouden. De eerste vorm van memoriseren is kenmerkend voor het leren van basisvaardigheden in het traditionele rekenonderwijs. Het laatste, bijvoorbeeld tafels leren met behulp van ‘kapstokken’ als steun bij het onthouden, heeft in de huidige, moderne aanpak de nadruk gekregen. Hierin is eigenlijk sprake van snel, uiterst snel rekenen. Freudenthal schrijft daar in zijn artikel over: ‘De grens tussen parate en snel geproduceerde kennis is niet scherp.’ Beide manieren, het akoestische en het met steuntjes memoriseren, hebben een functie voor de kennis die ermee wordt beoogd.
En, zegt hij:

> ... laten we het erover eens zijn dat ondanks rekendoosjes en computers gememoriseerde kennis in rekenen en wiskunde nog steeds onmisbaar is.

Het artikel gaat vervolgens vooral over de vraag hoe je parate kennis het beste kunt verwerven. Kan dat misschien ook met behulp van oefeningen op de computer? Het antwoord dat Freudenthal geeft luidt bevestigend. Hij betoogt dat het mogelijk moet zijn 'familiesommen' met de computer te oefenen. 8 + 7 = , 15 – 7 of 15 – 8 = en, voor vermenigvuldigen, 7 × 3 = en 21 : 3 = of 21 : 7 = vormen zo'n 'familie'. Freudenthal sluit het artikel af met de volgende woorden:

> Let wel: de computer gaat alleen de juistheid van de tussenuitkomsten na, niet de gemotiveerdheid van de procedure. Zoiets te programmeren, evenals foutenanalyse, lijkt me te hoog gegrepen.

Op dit punt had hij het echter mis. Klep, werkzaam bij de SLO,[10] werd mede door Freudenthals woorden geïnspireerd om het tegendeel te bewijzen, wat hem enkele jaren later inderdaad op voorbeeldige wijze lukte. Met zijn computerprogramma, dat hij samen met Gilissen ontwikkelde, konden leerlingen tafels oefenen, tafels 'in hun context'. Centraal in dit programma staat het idee van een leeromgeving waarin de leerling zelf zijn strategie kan kiezen, geholpen door de computer die aangeeft welke 'buursommen' de leerling kent.
Dit computerprogramma[11] dat de titel 'Een wereld rond tafels' had gekregen, bood dus oplossingen op punten die Freudenthal kort daarvoor nog als 'te hoog gegrepen' had beoordeeld. In de aanloop naar het pakket 'De wereld rond tafels' had Klep de gedachte van 'familiesommen' al uitgewerkt en daarvoor hadden hij en Gilissen in hun artikelen met de titel 'Voorwerk voor een computerprogramma' laten zien waar zij bij de ontwikkeling van een computerprogramma aan dachten: een programma, zoals door Freudenthal was bedoeld. Klep schrijft hier in 1984 over:

> Computers kunnen wél individuele gegevens onthouden en in beslissingsprocedures betrekken. In het deelproject 'Basisvaardigheden leren en computers' zoeken we naar een manier om een computer redelijke beslissingen te laten nemen over het feit of een leerling al dan niet iets kent.

Eigenlijk dus iets dat op een voortgangsanalyse lijkt, en misschien wel is. Enige jaren later blijkt uit het promotieonderzoek van Klep dat de computer ook in staat is zowel het met inzicht oefenen van tafelproducten te organiseren, als van het oefenwerk van iedere leerling een analyse te maken. Die analyse werd ingezet om de volgende stappen in het proces te bepalen die de leerling in het computerprogramma zou zetten.

Het centrale punt in het denken van Klep, in zijn pogingen om een geschikt oefenprogramma voor vermenigvuldigen met de computer te ontwikkelen, is dat het leren vermenigvuldigen met strategietjes verweven is met het memoriseren van tafels, dat het leren uitrekenen en het memoriseren beide voortvloeien uit contexten (zoals 'de muis en de kaas') en dat modellen voor vermenigvuldigen (zoals die eerder door Treffers werden beschreven) daarin een belangrijke functie hebben. De rol van modellen was in het ontwikkelde computerprogramma groot, wat in lijn was met de opvattingen van Freudenthal. In bovengenoemd artikel schrijft Klep:

> De bevrediging flexibel te kunnen rekenen is een intrinsiek motief om verder te memoriseren. De didactiek van het uitgaan van de strategietjes van de leerlingen kan aangevuld worden met interesse voor geheugenkennis, zodat de leerlingen zich ook bewust wensen bezig te houden met het memoriseren.
>
> ... het leren toepassen van de verworven geheugenkennis is dus niet iets dat pas na het tafels leren komt, maar iets dat natuurlijk verweven is met de inzicht-verwerving en het oefenen.

7 De huidige situatie

In de huidige, moderne reken-wiskundemethoden is de ontwikkeling van de tafeldidactiek die in dit artikel werd geschetst, duidelijk terug te vinden. Er zijn verschillen tussen de diverse methoden, maar alle baseren zich in enige vorm op de 'strategie- en steunpuntenmethode', waarin ruime aandacht wordt geschonken aan (1) de introductie van het vermenigvuldigbegrip (en verder: het multiplicatieve denken), (2) modellen ter ondersteuning en houvast, (3) het leren uitrekenen van vermenigvuldigingen met behulp van rekenstrategieën en de flexibiliteit in het oplossen van vermenigvuldigingen, dat veelal maar niet altijd, in interactieve onderwijssettingen gestimuleerd wordt. Bovendien wordt (4) in de strategie- en steunpuntmethode toegewerkt naar uitbreiding van het aantal steunpunten in de vorm van rekenfeiten, alles met het oog op de toepasbaarheid van de tafelkennis ('het vooruitwijzend leren').

Belangrijke bakens in deze ontwikkeling zijn de volgende twee publicaties geweest. In de eerste plaats de 'Proeve van een nationaal programma voor het rekenwiskundeonderwijs op de basisschool', met name het tweede deel over basisvaardigheden en cijferen (Treffers & De Moor, 1990). In deze publicatie wordt de vernieuwde tafeldidactiek (daar de reconstructiedidactiek genoemd) afgezet tegen de aloude reproductiemethodiek. Over de reconstructiedidactiek schrijven de auteurs:

> Deze stuurt niet uitsluitend en direct op reproductie van kennis aan, maar probeert dit doel mede via een proces van reconstructie, van kennisopbouw via vaardig rekenen, te realiseren. Kennis van de tafels is hier het resultaat van een proces van steeds verdergaande verkorting van handig rekenen, met als laatste stap het volledig inprenten.

Die verkorting geschiedt onder meer door: efficient gebruiken van eigenschappen, benutten van reeds gememoriseerde tafelkennis, uitbuiten van bepaalde structuren in het getalsysteem en ... gericht oefenen.

Deze publicatie kende een ruime oplage en heeft zo sterk bijgedragen aan de verspreiding van de geschetste vernieuwing. In de tweede plaats noemen we de nascholingsmodule die in 1991 in het kader van de zorgverbreding ‘speerpunt rekenen’ werd uitgebracht. Hoewel deze nascholing een vroege dood is gestorven, werd in het deel ‘tafels’ een interessante poging gedaan de nieuwe didactiek in het onderwijs te introduceren en leraren basisonderwijs ermee vertrouwd te maken. Achteraf bezien is dit doel maar in beperkte mate bereikt. Het neveneffect was echter dat vanaf dat moment in de te verschijnen rekenwiskundemethoden van realistische signatuur de aanpak voor het leren van tafels door middel van de strategie- en steunpuntenmethode werd ingevoerd en dat op die wijze de vernieuwingsvoorstellen van Wiskobas en haar navolgers over het leren van de tafels in methoden voor het basisonderwijs konden worden herkend.

Het geheel overziende meen ik, in het kort, de volgende lijn te zien. Aanvankelijk was Freudenthal, rond 1970, sterk geïnteresseerd in het probleemoplossend denken in de wiskunde. Hij hechtte veel betekenis aan leerprocessen die tot kennis met inzicht leidde. Dit voedde de misvatting bij velen in en rond het onderwijs dat hij geen belangstelling had voor de rol die het leren van feitenkennis (het memoriseren) in het leren rekenen speelt.[12] Hetzelfde werd door sommigen, ten onrechte, tegen de vernieuwingsvoorstellen van Wiskobas ingebracht. De elementaire rekenvaardigheden (of: ‘basisvaardigheden’) worden door leerlingen van de aanvangsklassen in het basisonderwijs nu evenals vroeger ‘van buiten geleerd’, alleen niet op dezelfde manier als toen. Nu worden de rekenfeiten niet geïsoleerd, maar in samenhang geleerd. Mede op grond van het ontwikkelingsonderzoek van Wiskobas en de door haar ontwikkelde leergangen werd Freudenthal zich meer en meer bewust van de betekenis van memoriseerprocessen voor het leren van rekenen-wiskunde.

Noten

1 Met dank aan A. Treffers en J. Klep voor hun commentaar op de eerste versie van dit artikel.

2 ICME staat voor International Congress for Mathematics Education.

3 Zie: A.G. Howson (ed.) (1973). Developments in Mathematical Education. *Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education.* Cambridge: University Press. De psycholoog Piaget had eveneens toegezegd een lezing te geven, onder de titel ‘Comments on mathematical education’, maar moest de conferentie wegens ziekte afzeggen.

4 G. Polya (1971). *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press. Dit boek is in 1974 in het Nederlands vertaald onder de titel: *Heuristiek en wiskunde; een andere kijk op de werkwijze van de wiskunde*. Den Bosch: Malmberg.

5 Wiskobas staat voor WISKunde Op de BASisschool. Wiskobas was een project van het IOWO (1971-1980). Het project richtte zich op de ontwikkeling van een nieuwe visie op reken-wiskundeonderwijs voor de basisschool, de opleidingen en de nascholing van leraren basisonderwijs. Het bood bovendien steun aan schoolbegeleidingsdiensten.

6 Zie voor een beschouwing over het leren vermenigvuldigen in traditionele methoden na de Tweede Wereldoorlog ook de analyse van H. ter Heege in *Willem Bartjens, 3*(2), 115 - 123, ‘Naar Zelfstandig Rekenen’. In *Willem Bartjens, 3*(4) werd de methode ‘Taltaal’, een realistische methode ‘van de eerste lichting’ eveneens geanalyseerd met betrekking tot het leren vermenigvuldigen. Ook in de laatste methode, ‘een rekenmethode voor de jaren ‘80’, berust het memoriseren nog te veel op het schriftelijk oefenen, luidt een van de conclusies.

7 Dit is een ander principe van professor Freudenthal dat hij aanhaalt in het eerdergenoemde hoofdstuk van het vermelde boek (Freudenthal, 1984a) en dat door de Wiskobasgroep in haar ontwikkelingsonderzoeken voor reken-wiskundeonderwijs veelvuldig wordt gepraktiseerd: ‘Van de informele strategieën van kinderen om problemen op te lossen zou men profiteren om ze meer formele strategieën te laten leren en gebruiken.’

8 Zie: Pieters, S. (eindred.) (1980). *De Achterkant van de Möbiusband.* Utrecht: Instituut Ontwikkeling Wiskunde-Onderwijs), 77-83. Later worden de resultaten van het ontwikkelingsonderzoek over het leren vermenigvuldigen in enkele, ook in interne SLO- en IOWO-publicaties, beschreven. Zie bijvoorbeeld:
(1) Heege, H. ter (1987). Een goed product, onderzoek en ontwikkeling ten behoeve van een leergang vermenigvuldigen. *Studies in Leerplanontwikkeling, 9.* Enschede: SLO.
(2) Heege, H. ter (1983). Het leren van tafels van vermenigvuldiging. *Willem Bartjens*, *3*(1), 18-22.

9 Uit onderzoek van Brownell c.s., dat werd gedaan aan het eind van de jaren dertig in de Verenigde Staten, was hetzelfde geconcludeerd.
Zie bijvoorbeeld: Brownell, W.A. & C.B. Chazal (1935). The effect of premature drill in thirdgrade arithmetic. *Journal of Educational Research, 29*, 17-32.

10 J. Klep en L. Gilissen werkten in het midden van de jaren tachtig aan het deelproject ‘Basisvaardigheden leren en computers’, in de SLO aan ‘Wiskunde 4-12’. Dit deelproject had als oogmerk een computerprogramma te ontwikkelen waarmee kinderen de tafels van vermenigvuldiging konden (be)oefenen aan de hand van zowel kale sommen als van modellen en in reële contexten.
Zie: Klep, J. (1984). Voorwerk voor een computerprogramma. *Willem Bartjens*, *4*(1), 30-40.
Gilissen, L. (1986). Voorwerk voor een computerprogramma. *Willem Bartjens*, *5*(2), 80-87.

11 Zie: Klep, J. & L. Gilissen (1987): *Een wereld rond tafels*. Enschede: SLO. Leerlingen worden door het programma in de gelegenheid gesteld om ‘hulp’ te vragen die aansluit bij hun eigen manier en niveau van denken. De computer legt de resultaten van de leerlingen vast en bepaalt op grond van die resultaten welke nieuwe oefenopgaven aan de leerling wordt aangeboden. Dit programma, dat met een floppy en een handleiding voor de leraar werd uitgebracht, stond aan de basis van Kleps dissertatie (‘Arithmeticus; simulatie van

wiskundige bekwaamheid') uit 1998, waarin hij de didactische mogelijkheden van de computer voor het rekenwiskundeonderwijs in ruime zin onderzocht. De ondertitel van het proefschrift luidt dan ook: Computerprogramma's voor het generatief en adaptief plannen van inzichtelijk oefenen in het reken-wiskundeonderwijs'.

12 In 'Revisting Mathematics Education' (1991) schrijft Freudenthal op pagina 49 als het over het leren van betekenisvolle leerstof handelt: 'Multiplication tables are a striking example - at least as long as they are considered worth learning and memorising, which I still think they are'. Vervolgens zet hij de traditionele didactiek tegenover de nieuwe aanpak, zoals die in dit artikel is beschreven.

Literatuur

Brink, J. van den, H. ter Heege, L. Streefland & A.Treffers. Leerplanontwikkeling: ordenend tellen. *Wiskobas-Bulletin, 2*(6), 1042 - 1058.

Freudenthal, H. (1984a). *Appels en peren / wiskunde en psychologie.* Apeldoorn: Van Walraven.

Freudenthal, H. (1984b). Memoriseren. *Willem Bartjens, 3*(2), 124-126.

Goffree, F. (1982). *Wiskunde & Didactiek 1*. Groningen: Wolters Noordhoff, 178-193.

Heege, H. ter (1985). The Aquisition of Basic Multiplication Skills. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 375- 388.

Ontwikkelgroep Speerpunt Rekenen. Bokhove, J., S. Huitema & A. Noteboom (ed.) (1991). *Tafels* (cursistenboek en handleiding). 's-Hertogenbosch: KPC.

Treffers, A. (ed.) (1979). Cijferend vermenigvuldigen en delen (1). Overzicht en achtergronden. *Leerplanpublikatie 10,* Utrecht: IOWO.

Treffers, A. & E. de Moor (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2: basisvaardigheden en cijferen.* Tilburg: Zwijsen.

In the early seventies Freudenthal and his colleagues of the Wiskobas-project seemed to be not particularly interested in processes of automatization of mathematical procedures and of memorization of factual knowledge. The accent in the developmental work was on problem solving. In this article the development of thinking on the learning and teaching of the multiplication facts is described. It is interesting to realise how the scope changed as a result of educational research. Freudenthal advocated the research findings of the Wiskobas-group which say that memorizing the tables is not purely a result of rote learning, but is influenced by strategies children develop.