



Wiskunde leren

- een kwestie van steeds gezonder verstand -

Kees Buijs
SLO, Enschede

In dit artikel vindt een bezinning plaats op de bijdrage aan de ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs die toegevoegd kan worden aan wat wel als Freudenthal's belangrijkste werk wordt gezien: het in 1991 verschenen 'Revisiting Mathematics Education'. In het eerste deel van het artikel wordt een overzicht gegeven van een aantal van de voorname denkbeelden betreffende wiskunde en wiskunde leren uit dit werk. Vervolgens wordt aan de hand van een drietal praktijkvoorbeelden van onderwijsleeractiviteiten stilgestaan bij de vraag in hoeverre deze denkbeelden in de achter ons liggende veertien jaar in theorie en praktijk van het reken-wiskundeonderwijs een nadere uitwerking en concretisering hebben gekregen. De aandacht gaat daarbij speciaal uit naar een van de centrale thema's in het denken van Freudenthal, te weten het niveaucharakter van het wiskundige leerproces. Betoogd zal worden dat er aan de ene kant, mede onder invloed van het werk van de TAL-groep, belangrijke vooruitgang is geboekt bij het streven om het niveaucharakter van het leerproces voor verschillende leerstofdomeinen nader te duiden. Aan de andere kant blijft er evenwel nog het nodige te wensen over, omdat het accent bij dit streven wellicht iets te sterk op het handelingsaspect en wat te weinig op het begripsaspect van de niveauverhoging heeft gelegen

1 Inleiding

Het is nu bijna veertien jaar geleden dat ik het voorrecht had de Panama-najaarsconferentie te openen met een lezing die gewijd was aan het laatste werk van professor Freudenthal 'Revisiting Mathematics Education', het boek dat destijds juist was uitgekomen en waarin hij een groot deel van z'n denkbeelden over wiskunde en wiskunde-onderwijs nog eens de revue liet passeren (Freudenthal, 1991). In de lezing werden een aantal van deze denkbeelden besproken en geïllustreerd aan de hand van praktijkvoorbeelden. Tevens werd ingegaan op de vraag op welke wijze deze ideeën in de praktijk van het onderwijs gerealiseerd zouden kunnen worden. Inmiddels zijn we zo'n anderhalf decennium verder en vierden we de honderdste geboortedag van Freudenthal. Dat moment biedt tevens een mooie gelegenheid om nog eens terug te komen op de in 'Revisiting Mathematics Education' ontvouwen ideeën. Hoe actueel zijn deze anno 2005 eigenlijk nog? In hoeverre zijn wij er de afgelopen jaren in geslaagd om deze ideeën gemeengoed te laten worden in de praktijk van het basisonderwijs? In deze bijdrage ga ik nader in op deze vragen. Ik beperk me daarbij tot een aantal van de belangrijkste denkbeelden uit de eerste twee hoofdstukken van het boek - de hoofdstukken waarin Freudenthal onder meer zijn opvattingen over wiskunde en over wiskunde leren beschrijft. Ik hoop enerzijds te laten zien dat er de nodige vooruitgang is geboekt bij het verder ontwikkelen en concretiseren van

de genoemde denkbeelden, maar dat er anderzijds nog wel het nodige te wensen overblijft. Ik ga daarbij speciaal in op een van de centrale thema's in het denken van Freudenthal: het niveaucharakter van het wiskundige leerproces.

2 Enkele kernideeën uit 'Revisiting Mathematics Education'

Hoewel Freudenthal zich in de inleiding van zijn boek al op voorhand verontschuldigt voor het feit dat dit eigenlijk weinig nieuws bevat en voornamelijk een aanscherping en heroverweging van reeds eerder geformuleerde ideeën betreft, is dat toch niet helemaal waar. Betrekkelijk nieuw was namelijk het idee van *wiskunde als gezond verstand*: het idee dat wiskundige activiteiten, zoals die door jonge kinderen spontaan bedreven worden, vooral een kwestie zijn van het gebruiken van gezond verstand. Ter toelichting omschrijft hij wiskunde in navolging van Simon Stevin als de kunde of kunst van wat 'wis en zeker' is, en hij merkt daarbij gezond verstand aan als de meest overvloedige en meest oorspronkelijke bron van zekerheid. Nu is gezond verstand weliswaar een rijke maar lang niet altijd even betrouwbare bron van zekerheid (aldus Freudenthal), en daarom dient het onderwijs erop gericht te zijn om datgene wat ingegeven wordt door het gezond verstand, ter discussie te stellen, in twijfel te trekken en zodanig te onderzoeken of te bewerken dat er een meer

beredeneerde, meer wiskundige vorm van zekerheid ontstaat. Kortom, het gezond verstand dient zich te ontwikkelen tot 'steeds gezonder verstand'.

Om het leerproces nader te karakteriseren, trekt Freudenthal een parallel met de historische ontwikkeling van wiskundige kennis zoals die door de mensheid is doorlopen. In het leerproces dat kinderen doormaken, dient zich deze historische ontwikkeling op hoofdlijnen, en dus zonder de talrijke dwaalwegen en vergissingen die zich hebben voorgedaan, opnieuw te voltrekken. Hieruit vloeit onmiddellijk de centrale rol van de alledaagse realiteit voort als bron van wiskundige activiteiten: het proces van 'steeds gezonder verstand' heeft als belangrijkste aangrijpingspunt de door kinderen beleefde alledaagse werkelijkheid en de wens om beter wijs te worden uit verschijnselen en situaties die zich in die werkelijkheid voordoen. Freudenthal gebruikt in dit verband de term 'mathematiseren' om aan te geven dat het in het leerproces gaat om het 'verwiskundigen' van de door kinderen beleefde realiteit.

Om het onderwijsleerproces waarbinnen het mathematiseren plaatsvindt, nader te karakteriseren gebruikt hij vervolgens de term *guided reinvention*, geleid heruitvinden. In samenhang met het voorgaande gaat het er, aldus Freudenthal, niet om de leerlingen wiskunde te leren als een verzameling vaststaande regels, procedures en eigenschappen waarvan de juistheid maar voor kennisgeving moet worden aangenomen, maar als iets dat door de leerlingen zelf heruitgevonden dient te worden en waarvan de juistheid door hen bewust beleefd en doordacht dient te worden. De term heruitvinden verwijst hierbij naar de eigen, constructieve stappen die een leerling in het leerproces doet, terwijl 'geleid' naar de onderwijsomgeving verwijst waarin dat proces plaatsvindt: onder begeleiding van de leraar en in samenspraak met medeleerlingen. Een groot voordeel van een dergelijke benadering van onderwijsleerprocessen (voegt Freudenthal eraan toe) is dat kennis die het resultaat is van de eigen constructieve activiteit van leerlingen, veel beter beklijft. Bovendien kunnen eigen 'uitvindingen' in de vorm van zelf ontwikkelde strategieën en zelf verworven inzichten het plezier in het leren aanmerkelijk vergroten.

Kenmerkend voor het leerproces waarin die wiskundige kennis door de leerlingen heruitgevonden wordt, is het 'niveaucharakter' ervan.¹ Bij niveaus moet dan niet aan absolute niveaus gedacht worden, maar aan relatieve waarbij de organiserende, structurerende activiteit van het lagere niveau object van denken wordt op het hogere niveau. Door stil te staan bij de eigen handelingen van dat lagere niveau, deze te overdenken en (zo mogelijk) in verband te brengen met de handelingen van medeleerlingen, kan het inzicht doorbreken om deze handelingen op een andere, verkorte of meer geavanceerde manier uit te voeren. Daarmee kan een niveauverhoging tot stand komen die cruciaal is voor de verdere ontwikkeling van het wiskundig denken en handelen. Over de specifieke

hoedanigheid van de verschillende niveaus die door leerlingen binnen allerlei leerstofdomeinen doorlopen kunnen worden, laat Freudenthal zich verder niet uit. Het belang van een nadere uitwerking van het niveaucharakter van het leerproces werd door hem echter nadrukkelijk onderkend. Zo presenteerde hij als een van de 'major problems of mathematics education' op de ICME in 1981 te Berkeley reeds de vraag 'hoe het wiskundig leerproces volgens niveaus gestructureerd kan worden en hoe deze structurering gebruikt kan worden voor differentiatie' (Freudenthal, 1981). Veel ontwikkelactiviteiten rond het reken-wiskundeonderwijs van de afgelopen jaren hebben zich dan ook gericht op het nader in kaart brengen en afbakenen van deze niveaus voor verschillende domeinen - verderop in dit artikel kom ik daar nog uitgebreid op terug.

Van cruciaal belang bij het bedrijven van wiskunde als gezond verstand acht Freudenthal verder wat hij noemt de 'banden met de realiteit'. Daarbij moet het begrip realiteit breed worden opgevat. Zoals hiervoor reeds is uiteengezet, spruiten wiskundige activiteiten van mensen historisch gezien weliswaar primair voort uit de alledaagse realiteit, dat wil zeggen uit de algemeen-menselijke behoefte om verschijnselen en situaties uit de alledaagse realiteit beter te begrijpen en hanteerbaar te maken. Maar naarmate de wiskundige kennis die het resultaat is van die mathematiserende activiteit gedifferentieerder wordt en uitgroeit tot een coherent geheel, wordt deze kennis zelf steeds meer punt van overdenking en reorganisatie. Daarmee gaat ook de mentale realiteit van de reeds verworven wiskundige kennis deel uitmaken van het werkveld waarop de wiskundige activiteit betrekking heeft. In de woorden van Freudenthal: realiteit omvat al datgene dat het gezond verstand in een zeker stadium als reëel ervaart.

Zou men nu kunnen zeggen dat de hierboven kort getypeerde ideeën in de afgelopen vijftien jaar geleidelijk aan steeds verder ingeburgerd zijn geraakt in de praktijk van ons basisonderwijs? En dat deze ideeën gaandeweg een steeds nadere uitwerking in theorie en praktijk van het realistisch reken-wiskundeonderwijs hebben gekregen? Of blijft er wat dat betreft nog veel te wensen over?

3 Het voorbeeld van Marleen

Het handelings- en begripsaspect van niveauverhoging

Om over deze vragen iets meer te kunnen zeggen, ga ik om te beginnen nog even terug naar een van de praktijkvoorbeelden die in bovengenoemde lezing ten tonele werden gevoerd. Het gaat om het voorbeeld van Marleen, die werd opgevoerd als een voorbeeld van hoe kinderen op basis van het gebruiken van hun gezond verstand een cruciale stap verder kunnen komen in het leerproces rond

het optellen en aftrekken tot 10 (Buijs, 1992). Het betrof hier een interactieve onderwijssituatie in groep 3, waarbij de kinderen een op dat moment nog tamelijk complexe opgave kregen voorgelegd:

Er hangen 8 appels aan de boom.
Iemand plukt er 5.
Hoeveel appels zijn er nog over?

Vertrekpunt voor deze opgave vormde een bordtekening van een appelboom waar duidelijk zichtbaar acht appels aanhingen. Nadat de leerkracht de opgave had gelanceerd, klapte zij het bord dicht, zodat de appels niet langer zichtbaar waren. Hoe kwam Marleen tot een oplossing? Zij gaf de situatie in eerste instantie symbolisch op haar vingers weer door van elke hand vier vingers op te steken en door te proberen daar een voor een vijf vingers vanaf te halen. Dit ging, ook om motorische redeneren, nogal moeizaam. Plotseling drong een andere mogelijkheid tot haar door. Zij veranderde het beeld van de opgestoken vingers door van de ene hand alle vingers op te steken en van de andere hand nog drie. In een beweging haalde ze vervolgens de volle hand weg en constateerde triomfantelijk: drie over! (fig.1)



figuur 1

In de nabespreking kreeg Marleen van de leerkracht gelegenheid haar ontdekking te demonstreren. De leerkracht wees hierbij nadrukkelijk op de handige oplossing van Marleen en liet de overige kinderen deze zelf ook even uitproberen. Met als gevolg, dat nogal wat kinderen zich eveneens begonnen te realiseren hoe goed deze oplossingswijze 'werkt'. Ze hadden deze dan weliswaar niet zelf uitgevonden, maar ze hadden toch een ervaring opgedaan in de sfeer van: 'Dit is zo duidelijk, ik had het zelf kunnen ontdekken'.

In het voorbeeld tekent zich een belangrijke niveauovergang af, namelijk die van het tellende rekenen naar het structurerende rekenen. Althans, zo is deze overgang naderhand betiteld in het kader van het TAL-project. Voor het domein van het rekenen tot 20 werd daarbij een onderscheid gemaakt tussen drie niveaus van handelen (Treffers e.a., 1999):

- het niveau van het tellende rekenen, waarbij één voor één de telrij wordt afgelopen of vingers één voor één worden toegevoegd of weggedaan;
- het niveau van het structurerende rekenen, waarbij een leerling de vijfstructuur van de hele hand of van het rekenrek gebruikt om tot een oplossing te komen;
- het niveau van het formele rekenen, waarbij op basis van getalrelaties die in het structurerende rekenen besloten liggen, een oplossing wordt gevonden.

In de overgang van het tellende via het structurerende naar het formele rekenen voltrekt zich, aldus de TAL-visie, een essentieel element van niveauverhoging dat kenmerkend is voor het leerproces dat leerlingen binnen dit leerstofdomein kunnen doorlopen. De geschetste driedeling kan overigens beschouwd worden als een domeinspecifieke toevoeging aan het meer algemene idee van informeel-contextgebonden, modelondersteund en formeel handelen zoals dat door Treffers en anderen is onderscheiden (Treffers, 1987; Streefland, 1988).

Is de niveauverhoging die binnen het genoemde domein wordt nagestreefd, via de driedeling van tellend, structurerend en formeel rekenen adequaat getypeerd, of gaat het om meer? Aan het voorbeeld van Marleen is te zien dat het onderscheid tussen tellend en structurerend rekenen inderdaad van belang is om de overgang naar het hogere niveau te duiden. Maar dit aspect van het handelen is niet het enige relevante aspect. Het gaat bij de overgang naar het hogere niveau vooral ook om een hoger niveau van denken, een beter begrijpen van de leerstof. Van dit beter begrijpen laat Marleen eveneens een voor dit domein kenmerkend aspect zien: zij beeldt de besproken situatie van de appelboom symbolisch uit door een aantal vingers op te steken en aan deze symbolische voorstelling die handelingen te voltrekken die overeenkomen met wat in de werkelijke situatie gedaan zou kunnen worden. En ze doorziet dat het resultaat van de aldus uitgevoerde handelingen overeen moet komen met het resultaat dat in de daadwerkelijke situatie verkregen zou worden. Het is dit idee van het creëren van een symbolische, modelmatige voorstelling (kortweg: het *symboliseren*) dat eveneens als een belangrijk aspect van de niveauverhoging kan worden aangemerkt. Naast het handelingsaspect is het dan ook wellicht relevant een begripaspect aan de niveauverhoging te onderscheiden, een aspect dat in TAL-publicaties misschien niet altijd even prominent is aangeduid (hoewel het in de voorbeelden wel duidelijk tot uitdrukking is gebracht). Hoe dan ook, de typering van het onderwijsleerproces in termen van tellend, structurerend en formeel rekenen kan beschouwd worden als een waardevolle poging om Freudenthals idee van het niveaukarakter van leerprocessen, gericht op het steeds verder ontwikkelen van gezond wiskunde-verstand, een voor onderwijsgevend concrete uitwerking te geven. Hoe zit dat binnen andere domeinen?

4 Het voorbeeld van Taner en anderen

Beter begrijpen van aftrekhandelingen tot 1000

Het gebied van het optellen en aftrekken tot 1000 vormt in zekere zin een soort overgangsdomein. Net als bij het rekenen tot 100 wordt er in het onderwijs in eerste instantie veel aandacht besteed aan het verwerven van

inzichtelijke hoofdrekenstrategieën voor eenvoudigere typen opgaven. Naderhand, als de getallen complexer worden, vindt een uitbreiding plaats in de richting van het werken met standaardprocedures - in eerste instantie die van het kolomsgewijs rekenen, later die van het cijferend rekenen. Daarnaast blijft hoofdrekenen van belang en dienen de leerlingen steeds meer onderscheid te gaan maken tussen de meer elementaire opgaven die zich bij uitstek lenen voor het gebruik van hoofdrekenstrategieën, en de meer complexe opgaven die vooral in aanmerking komen om via standaardprocedures te worden opgelost. Het is juist in dit onderscheid leren maken en in het blijvend leren inzetten van hoofdrekenstrategieën in passende situaties, dat een aspect van 'steeds gezonder verstand' tot uitdrukking komt. Het langdurig en eenzijdig inoefenen van de cijferprocedures voor optellen en aftrekken is in dat opzicht waarschijnlijk minder bevorderlijk voor het blijvend inzetten van gezond verstand.

Om iets meer over de ontwikkeling van 'steeds gezonder verstand' binnen dit domein te zeggen, neem ik een voorbeeld van drie leerlingen uit groep 6 die problemen hebben met elementaire hoofdrekenopgaven als $178 + 40 =$ en $437 - 50 =$ (Buijs, 2003). In een serie remediërende activiteiten probeert een interne begeleider op de school van deze kinderen de nodige ondersteuning op het gebied van hoofdrekenen te geven. In eerste instantie is daarbij veel aandacht besteed aan de getallen als zodanig, aan de structuur van de telrij tot 1000 en aan het tellen met sprongen van tien. Vervolgens hebben de leerlingen zich nogmaals bezonnen op het gebruik van handige hoofdrekenstrategieën, waarbij de leraar de binnen TAL ontwikkelde driedeling van rijgend, splitsend en variarekenen (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001) als referentiekader hanteerde. Betaalsituaties die soms ook daadwerkelijk werden nagespeeld, hebben hierbij een rol gespeeld. In de activiteit hieronder zijn de leerlingen bezig om de kale opgave $437 - 50$ op te lossen.

Taner: Dan doe ik die 7 even apart, dan heb je 430 ...; en dan eerst 30 eraf is 400; nog 20 eraf is ... 380 (de leraar noteert dit op het bord; fig.2).

$$437 - 50 =$$

$$\textcircled{7}$$

$$430 - 30 = 400$$

$$400 - 20 = 380$$

figuur 2

Leraar (zich tot de andere twee leerlingen Samantha en Sharon wendend): is dat goed, 380?
 Sharon: Eehh, ja. Want voor de 100 zit altijd de 90 en dan komt de 80 (Samantha bevestigt dit).
 Taner: En dan nog die 7 eraf, dat is ... Nee, wacht eens, moet die er nou af?
 Sharon: Ik dacht het wel; het is toch min? Of...?

Samantha: Ja, dat heb ik soms nou ook, dan weet ik niet meer of het er nog af moet, of erbij...
 Leraar: Zouden wij een manier kunnen bedenken om uit te vinden of die 7 er nu nog af moet, of juist erbij?
 Taner (naar de berekening op het bord kijkend): Nee, ik denk toch dat 'ie erbij moet ...
 Leraar: Maar zou je kunnen uitleggen waaróm dat zo is?
 Taner: (...)
 Sharon: Als het nu eens betalen is?
 Leraar: Hoe bedoel je?
 Sharon: Nou (pakt de 'portemonnee' die in voorgaande activiteiten gebruikt is om situaties na te spelen), als je 437 euro hebt en je moet iets betalen van 50 euro ... En dan zegt Taner: ik leg die 7 euro even apart ...
 Leraar: En dan?
 Samantha en Sharon: Dan haal je die 30 eraf, en daarna die 20; maar dan moet je die 7 er niet ook nog eens afhaken, want dan haal je er teveel af!
 Taner: Ja, die 7 zit gewoon nog in de portemonnee! Dus die komt er weer bij ...

De situatie wordt nog even nagespeeld, met geopende portemonnee. Duidelijk blijkt nu dat de 7 apart gelegde euro's inderdaad gewoon bij de resterende 380 opgeteld moeten worden. Het antwoord is dus $380 + 7 = 387$ (leraar noteert dit op het bord).

In voorgaande activiteiten had de leraar het accent nogal op de rijgaanpak gelegd, dat wil zeggen de aanpak waarbij het eerste getal in de opgave heel gehouden wordt. Maar de leerlingen begonnen van lieverlee ook steeds meer de splitsaanpak te gebruiken. Daarbij traden nog wel regelmatig fouten op. Ook ontstond er, zoals in de hierboven beschreven situatie, soms verwarring over de vraag wat er nog met de afgesplitste delen van een getal moest gebeuren. De leraar besloot daarop zo'n situatie aan te grijpen om de leerlingen te laten nadenken over het eigen handelen, en met name te laten onderzoeken of ze een manier konden bedenken om 'uit te vinden of die 7 er nu nog af moet, of juist erbij'.

Waarin manifesteert zich in deze situatie nu het gezonde wiskundeverstand? En hoe wordt ernaar gestreefd om dit tot 'steeds gezonder verstand' te laten uitgroeien? Een belangrijk moment doet zich voor als de kinderen een eigen oplossingswijze in twijfel trekken en zich afvragen of een bepaalde handeling wel correct is. De leraar haakt hier op in door deze twijfel enigszins te voeden en tot een soort onderzoeksvraag te promoveren. Het idee om de kale opgave te verbinden met een passende contextsituatie (in casu een betaalsituatie, zoals die een aantal keren is nagespeeld), komt vervolgens uit de kinderen zelf. Dit idee blijkt een goede greep te zijn: via de betaalsituatie kan beredeneerd worden waarom de apart gezette 7 er naderhand weer bijgedaan moet worden, en niet eraf. Kortom, door de verbinding van de opgave met de alledaagse realiteit te leggen en door de daarin uitgevoerde

handelingen als criterium voor de juistheid van de formele rekenhandeling te hanteren, kan beredeneerd worden wat de juiste oplossing is. Hiermee komt de splitsstrategie voor deze leerlingen in een duidelijker, begripsmatig beter onderbouwd daglicht te staan, hetgeen als een flinke sprong voorwaarts beschouwd mag worden.

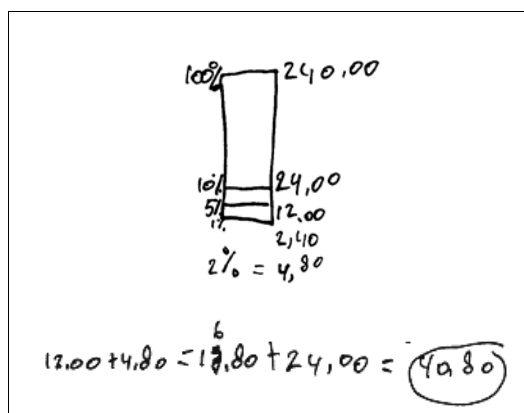
In TAL-publicaties is voor het domein van het hoofdrekenen (waarvan het gebied tot 1000 als een belangrijk onderdeel beschouwd kan worden) een onderscheid gemaakt in drie niveaus van handelen die de beoogde progressie van leerlingen in grote lijnen weerspiegelen: rijgen, splitsen en varia-rekenen. Ook deze driedeling kan als een domeinspecifieke toevoeging beschouwd worden aan de hierboven genoemde meer algemene indeling van informeel-contextgebonden, modelondersteund en formeel-vakmatig handelen. Anders dan bij de driedeling die voor het gebied van het rekenen tot 20 is gemaakt, geldt hier overigens dat het splitsen niet komt in de plaats van het rijgen, maar in aanvulling daarop. De leerlingen worden dus verondersteld geleidelijk aan een steeds breder repertoire aan hoofdrekenstrategieën te verwerven. De indeling van rijgen, splitsen en variastrategieën geeft daarbij een belangrijke indicatie voor de beoogde niveauverhoging. Ook hier kan men zich afvragen in hoeverre deze driedeling het proces van voortgaande niveauverhoging adequaat typeert. Is het niet vooral het handelingsaspect van de niveauverhoging, waarnaar verwezen wordt? En blijft het begripsaspect, dat in het voorbeeld naar voren komt in de gerichtheid op het beter begrijpen van de splitsstrategie en op het met behulp van een passende context onderbouwen van een bepaalde rekenhandeling (kortweg: *contextualiseren*), niet wat onderbelicht?

5 Daan en de procenten

Beter begrijpen hoe je een verhouding kwantificeert

We gaan nog een stapje verder, naar groep 8. Daan is een leerling die in een apart rekengroepje werkt. Dat is al zo vanaf groep 6, toen zijn leraar het niet langer verantwoord achtte om hem gelijk op met de rest van de klas verder te laten gaan. In zijn aparte groepje is hij in groep 6 en 7 vooral met automatiseren en cijferen bezig geweest. Domeinen als breuken en kommagetallen zijn in deze leerjaren vrijwel buiten schot gebleven. Een nieuwe interne begeleider heeft, mede na overleg met de ouders, verandering in de situatie gebracht. Zij heeft het roer flink omgegooid en het accent in de lessen aan het aparte rekengroepje veel meer gelegd op elementair hoofdrekenen, meten en op een verkenning van (vooral) kommagetallen en procenten.

Met name van dit laatste onderwerp bleek Daan toch wel het een en ander af te weten. Bijvoorbeeld, dat procenten gebruikt worden om aan te geven dat er wat van de prijs afgaat (zoveel procent korting) of dat er bepaalde stoffen in een product in de winkel zitten (zuivelproducten met zoveel procent vet). In samenhang hiermee bleek Daan ook in staat te zijn om bepaalde elementaire percentages als breuk te interpreteren: 50 procent als de helft, 25 procent als een kwart, en 10 procent als $\frac{1}{10}$ deel. Geleidelijk aan werden deze ankerpercentages tijdens de hulpactiviteiten nu uitgebreid met nieuwe: 20 procent als het dubbele van 10 procent, 5 procent als de helft van 10 procent, 1 procent als ' $\frac{1}{10}$ deel van $\frac{1}{10}$ deel', en zo meer. Het rekenen met procenten beperkte zich in eerste instantie tot elementaire opgaven van het type 20 procent van € 360,- is. Gebruikmakend van zijn ankerpuntenkennis en met hulp van de strook als ondersteunend model bleek Daan na verloop van tijd met dergelijke opgaven redelijk goed uit de voeten te kunnen. Zie het voorbeeld in figuur 3, waarbij Daan de opgave 17 procent van € 240,- oplost.



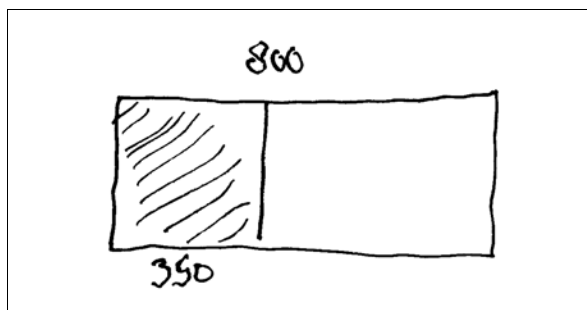
figuur 3

Vervolgens werd een nieuw type opgaven onder de loep genomen, namelijk het type waarbij een verhouding in een percentage moet worden omgezet. Bijvoorbeeld: 35 van de 120 kinderen komt met de fiets naar school, hoeveel procent is dat? En: van de 500 gecontroleerde auto's reden er 98 te hard, hoeveel procent is dat? Het bleek Daan grote moeite te kosten om zich dergelijke situaties goed voor ogen te stellen. Hij leek de bedoeling niet goed te begrijpen en het lukte hem in eerste instantie nauwelijks om er greep op te krijgen. In het voorbeeld hieronder, waarin met Daan apart wordt gewerkt, gooit de leraar het daarom over een iets andere boeg.²

- Leraar: We gaan het vandaag anders doen, Daan. En jij moet mij helpen om het uit te leggen. (...) Ze zijn bezig met een nieuw voetbalstadion hier in de buurt (Daan: dat klopt), en daar komt ook een groot parkeerterrein voor 800 auto's bij. Stel nu eens dat er van die 800 parkeerplaatsen 350 bezet zijn ...
- Daan: Dus 800 plaatsen, en er zijn er 350 bezet?

Leraar: Ja. Is dat veel, als er 350 auto's op staan?
 Daan: Nou, best wel; 350 auto's, dat is heel wat.
 Leraar: Zou jij dat kunnen tekenen?
 Daan: Al die auto's?
 Leraar: Nee, ik bedoel dat parkeerterrein. En dan laat je op dat terrein zien hoeveel 350 plaatsen ongeveer is.
 Daan: (aarzelend) Dus ..., gewoon zo iets tekenen (tekent een flinke rechthoek)?
 Leraar: Ja, precies. En nu staan al die 350 auto's netjes aan één kant van het terrein; de rest is leeg. Zou je dat kunnen tekenen?
 Daan: Nou (arceert ongeveer driekwart van de rechthoek) zo iets?
 Leraar: Op het hele terrein kunnen er 800 weet je nog (wijst het oppervlak van de hele rechthoek aan)? En nu zijn er 350 plaatsen bezet. Zou dat kunnen?

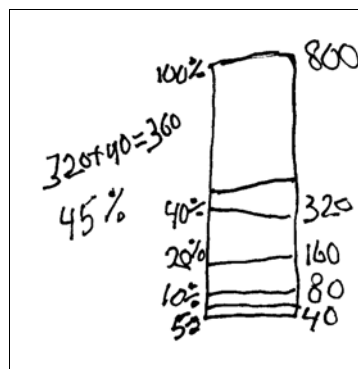
Daan realiseert zich nu dat er iets niet klopt. Hij tekent een nieuwe rechthoek, en arceert daarvan iets minder dan de helft. In overleg met de leraar noteert hij de aantallen erbij: 800 voor het aantal plaatsen op de hele parkeerplaats, 350 voor het aantal bezette plaatsen (fig.4).



figuur 4

Leraar: Waarom heb je het veranderd?
 Daan: Het was te veel. Als dit 800 is (wijst de hele rechthoek aan), dan is dit ongeveer 350, denk ik. Minder dan de helft.
 Leraar: Oké. Zou jij nu ook kunnen zeggen hoeveel procent dat ongeveer is: 350 van de 800 plaatsen? Zou je dat kunnen schatten?
 Daan: Geen idee. Of nou..., ik denk 48%.
 Leraar: Hoe dat zo?
 Daan: Want het is een beetje minder dan de helft; en 50% is de helft (wijst dit in de tekening aan).
 Leraar: Niet zo gek, hè? Jij zegt: 50% dat is de helft ...
 Daan: Ja, dat zou 400 zijn; maar er staan geen 400 auto's. Dus ik denk iets minder, 48%.
 Leraar: Schrijf het maar op. Zouden we het nu ook nog wat preciezer kunnen uitrekenen?
 Daan: Zal ik een strook tekenen? (doet dit) Dan is 10% hier ongeveer, dat is 80 auto's. Dat is veel minder. En dan 20%, dat is 80 en 80, dus 160. Doe ik weer het dubbele, 320 auto's; dat is dan 40%.
 Leraar: Dus, wat is je conclusie?
 Daan: Het zijn er 350, dus het is meer dan 40%. Maar geen 50%. Misschien 45%?

Daan komt nu op het idee om eerst eens 5 procent uit te rekenen. Hij noteert dit weer in de strook. Naast de strook bepaalt hij nu hoeveel 45% is: $320+40$ is 360 auto's (fig.5).



figuur 5

Daan: Net geen 45%. Maar het scheelt niet veel.
 Leraar: Zullen we maar zeggen: bijna 45%? Het zit er zo dicht bij ... Knap hoor!

Wat zien we hier nu? In voorgaande activiteiten leek Daan totaal geen vat te krijgen op dit soort verhoudingsopgaven. Hij leek eigenlijk niet goed te begrijpen wat er van hem gevraagd werd, en hoe hij het kon aanpakken. In de hierboven beschreven activiteit volgt dan een wending. Van cruciaal belang daarbij lijkt het moment waarop de leraar vraagt om de situatie van een parkeerterrein met 800 plaatsen waarvan er 350 bezet zijn, schematisch weer te geven. In die schematische voorstelling moet de verhouding 'bezet-onbezet' zichtbaar gemaakt worden. Het laat zich aanzien dat juist deze opdracht goed appelleert aan het gezond wiskundeverstand van Daan. Deze doorziet nu dat het lijntje waarmee het bezette deel van het terrein wordt afgebakend, een afspiegeling moet zijn van het aantal bezette plaatsen ten opzichte van het aantal onbezette plaatsen. Kortom, dat het om de verhouding tussen deze beide aantallen gaat. Vervolgens weet hij deze verhouding met het hem bekende hulpmiddel van de strook redelijk accuraat in een percentage uit te drukken. Het is juist het creëren van de schematische voorstelling van de situatie als zodanig (kortweg: het *schematiseren*) die de kern van de wiskundige activiteit vormt en die de sleutel tot het beter begrijpen en oplossen van het probleem oplevert.

In de 'Proeve van een nationaal programma' (Treffers e.a., 1996) wordt voor het domein van breuken en kommagetallen een driedeling van niveaus van handelen onderscheiden zoals die hierboven al is aangeduid: het informele, contextgebonden niveau, het modelondersteunde niveau en het formele, vakmatige niveau. Grave-meijer (2003) heeft in deze driedeling nog een verfijning aangebracht door voor het middelste niveau een onderscheid te maken tussen een verwijzende niveau (het niveau waarop een model ontwikkeld wordt als afspiege-

ling van eigen, informele strategieën van leerlingen) en een algemeen niveau (het niveau waarop dat model in allerlei andere situaties wordt toegepast. Hiermee wordt een globale drie- dan wel vierdeling gegeven waarmee een essentieel aspect van de binnen deze domeinen beoogde niveauverhoging wordt beschreven. Ook voor het domein van de procenten lijkt deze driedeling van waarde, gegeven het feit dat oplossingswijzen voor de voornaamste typen opgaven binnen dit gebied aan de hand van deze driedeling qua oplossingsniveau van elkaar onderscheiden kunnen worden. Van cruciaal belang daarbij is de vraag hoe een model (en dus de overgang naar modelondersteund handelen) tot stand komt.

De hierboven beschreven activiteit laat hiervan iets wezenlijks zien. Het creëren van de schematische voorstelling van de situatie van het parkeerterrein vormt in feite de opmaat tot het beter begrijpen van het verhoudingsaspect van de situatie, en daarmee tot het op modelniveau oplossen van het probleem. Ook hier lijkt te gelden dat de beschrijving via informeel-contextgebonden, modelondersteund en formeel handelen een wezenlijk aspect van de beoogde niveauverhoging weerspiegelt. Dit betreft dan vooral het handelingsaspect. Het begripsaspect wordt wellicht beter getypeerd door de activiteit van het schematiseren waarmee de modelmatige afspiegeling gecreëerd wordt.

6 Besluit

Meer aandacht voor het begripsaspect van niveauverhoging?

In het voorgaande werden enkele voorbeelden gegeven van kinderlijke wiskundige activiteiten met de bedoeling iets te laten zien van de manier waarop leerprocessen die gericht zijn op het tot stand doen komen van 'steeds gezonder wiskunde-verstand', kunnen verlopen.

Daarbij werd speciaal ingegaan op het niveaukarakter van zulke leerprocessen, met name voor wat betreft de vraag hoe de niveauverhoging het beste geduid kan worden. In hoeverre zijn wij daarover in de jaren die verstreken zijn sinds het verschijnen van 'Revisiting Mathematics Education', volgens de inleider van dat boek de 'definitieve Freudenthal', het nodige aan de weet gekomen? Aan de orde werd gesteld hoe in de loop der jaren een aantal lokale theorieën over het niveaukarakter van het leerproces binnen verschillende domeinen zijn ontwikkeld. Deze theorieën zijn, tot op zekere hoogte, te beschouwen als uitwerkingen van het in 'Revisiting Mathematics Education' ontvouwen idee van het niveau-gewijs verlopen van leerprocessen.

In samenhang daarmee is de vraag besproken in hoeverre een beschrijving van niveaus in termen van typerende handelingen, adequaat is om het beoogde leerproces en

de overgang naar hogere niveaus daarbinnen, te karakteriseren. Betoogd werd dat deze beschrijving wel degelijk een essentieel element van de niveauverhoging aanduidt. Zo is het oplossen van een elementaire aftrekepgave als '8 appels aan de boom, iemand plukt er 5' via tellend rekenen van een wezenlijk lager niveau dan via het structurerend rekenen zoals dat door Marleen werd gedemonstreerd. Evenzo is het uitrekenen van een hoofdrekepgave als $437 - 50 =$ via een rijgaanpak (al dan niet ondersteund met de lege getallenlijn) van een essentieel lager niveau dan via een splitsaanpak. Het is echter de vraag in hoeverre de beoogde niveauverhoging ook voldoende wordt getypeerd door dit handelingsaspect. Wellicht zou het aanbeveling verdienen daarnaast een meer begripsmatig oftewel conceptueel aspect aan de niveauverhoging te onderscheiden. Het gaat er immers niet louter om dat de leerling op een hoger niveau tot een oplossing leert te komen, maar ook dat dit gebeurt op basis van een steeds beter begrip van de betreffende operatie, van de te gebruiken getalrelaties, en dergelijke. Het is juist in dit beter begrijpen dat iets wezenlijks van het 'steeds gezonder wiskunde-verstand' tot uitdrukking komt.

In de drie voorbeelden werd geprobeerd dit begripsaspect van de beoogde niveauverhoging op te sporen en aan te wijzen. Dat gebeurde in termen van wiskundige activiteiten die als kenmerkend voor het streven naar een beter begrip beschouwd kunnen worden.

In het voorbeeld van Marleen betrof dit het symboliseren: het symbolisch uitbeelden van de situatie om daarmee een voorgestelde, modelmatige realiteit te creëren als afspiegeling van de 'echte' realiteit. In het voorbeeld van Taner en anderen ging het om het contextualiseren: het 'terugvertalen' van een formele rekensituatie naar een reële situatie om daarmee de juistheid van een bepaalde rekenhandeling beter te kunnen onderbouwen.

En in het voorbeeld van Daan betrof dit het schematiseren: het zodanig schematisch weergeven van de situatie dat daarmee het verhoudingsaspect beter gevat kon worden. Wellicht dat bij toekomstige pogingen om het niveaukarakter van leerprocessen nader te duiden, juist dit begripsaspect van de beoogde niveauverhoging naast het handelingsaspect meer onder de aandacht zou moeten komen. Het zou de moeite waard zijn om de fundamentele ideeën van 'Revisiting Mathematics Education' daar over vijftien jaar nog eens op na te slaan.

Noot

- 1 In zijn beschrijving van dit niveaukarakter borduurt Freudenthal overigens nadrukkelijk voort op wat Van Hiele en diens echtgenote Van Hiele-Geldof in de jaren vijftig daarover geschreven hebben (Van Hiele, 1973).
- 2 Het idee voor deze schematiserende activiteit is ontleend aan het werk van Streefland, Van den Heuvel-Panhuizen e.a. Zie bijvoorbeeld: Van den Heuvel-Panhuizen (2003).

Literatuur

- Buijs, K. (1992). Het wiskundeonderwijs nogmaals bezien. In: M. Dolk (ed.). *Rekenen onder en boven de tien*. Utrecht: Freudenthal Instituut, 9-19.
- Buijs, K. (2003): Hoofdrekenen met inzicht: ook voor zwakkere leerlingen? *Jeugd in School en Wereld* 88(2), Baarn: Bekadidact, 6-11.
- Freudenthal, H. (1981). Major Problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 133-150
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gravemeijer, K. (2003). Didactisch gebruik van de lege getallenlijn. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 21(2), 11-23.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den, K. Buijs & A. Treffers (red.) (2001). *Kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen Hele Getallen Bovenbouw Basisschool*. Groningen: Wolters Noordhoff.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9-35.
- Hiele, P.M. van (1973). *Begrip en inzicht*. Purmerend: Muusses.
- Streefland, L. (1988). *Realistisch breukenonderwijs*. Utrecht: Vakgroep OW&OC (proefschrift).
- Treffers, A., M. van den Heuvel-Panhuizen & K. Buijs (red.) (1999). *Jonge kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen Hele Getallen Onderbouw Basisschool*. Groningen: Wolters Noordhoff.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel.
- Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1996). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 3B: Kommagetallen*. Tilburg: Zwijsen.

The intention of this article is to reflect upon the contribution to the development of realistic mathematics education that can be ascribed to what is generally seen as one of Freudenthal's major works: Revisiting Mathematics Education (1991). In the first part of the article, a survey will be given of a number of the fundamental ideas about mathematics and mathematics education that are presented in this work. Subsequently, the question is raised to what extent these ideas have been elaborated in theory and practice of mathematics education in the last fourteen years in the Netherlands, especially for one of the most central themes in Freudenthal's thinking: the level raising aspect of the learning process. As a starting point, some paradigmatic examples of mathematical activities are given. It will be argued that on the one hand progress has unmistakably been made, inasmuch as domain specific elaborations of the levelraising aspect for various mathematical domains have been pointed out. On the other hand, it appears there is still a lot of work to be done, since the focus in these elaborations has been mainly on the acting element, whereas the conceptual side of the process of level raising has perhaps been a little underexposed.

