De (on)navolgbare Freudenthal

Adri Treffers
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Freudenthal wordt de laatste tijd een welhaast mythische grootheid toegedicht. Daarmee doet men hem echter schromelijk tekort. Zijn onmiskenbare statuur op het gebied van het reken-wiskundeonderwijs kent een menselijke maat. Aan de hand van vijf kernvragen wordt gepoogd een reëel beeld van die maat te tekenen. Met name de (impliciete) onderwijstheorie van de veelsporige aanpak die in zijn blauwdruk van de breukenleergang tot uitdrukking komt, krijgt veel aandacht. Ook de twijfels die Freudenthal had over zijn eigen betekenis voor de ontwikkeling en het onderzoek van reken-wiskundeonderwijs worden belicht.
In een reflectieve terugblik komt tevens de impact van Freudenthals gedachtegoed aan de orde. Ik eindig met een persoonlijke noot.

1 Inleiding

Heeft Freudenthal wel echt bestaan? Soms twijfel ik daar aan. Hebben we hier niet met een creatie à la Bourbaki van doen? Je zou het haast geloven als je over hem hoort en leest de laatste tijd. Op het symposium ‘15 jaar Onderwijskunde Utrecht’ in 1980 sprak Hans Freudenthal de volgende gedenkwaardige woorden.

> … De mode van de dag zijn leertheorieën. ‘Welke leertheorie hangt gij aan?’ - een vraag waarop je als onderwijskundige met een antwoord moet klaarstaan zoals vroeger op een vraag naar je belijdenis. Als auteur van een proefles of een leerboekenreeks of een curriculum strekt het je in elk geval tot aanbeveling als je vermeldt of betoogt dat het werkstuk is opgezet volgens de leertheorie van, zeg, Gagné of Gal’perin - om je dan tot die goden te beperken die in de dictionaire het dichtst bij ‘God’ staan … (1982, pag.8)

Thans heeft hijzelf die status bereikt: zijn initialen *H.F.* omsluiten de *G*. Hoe is anders te verklaren dat men hem nu ook al in de kring van het Nieuwe Leren en het nog nieuwere Natuurlijke Leren begint te citeren?

> ... Hoe zal het wiskundeonderwijs er in 2000 uitzien? Er is een simpel antwoord. Er is geen wiskundeonderwijs meer in 2000, het is verdwenen. Er is geen vak meer wiskunde geheten, geen wiskundeles op het rooster, geen wiskundeonderwijs om te onderwijzen. (…) Het is er om beleefd en uitgeleefd te worden, net als lezen, schrijven, knutselen, tekenen, zingen, ademhalen, in een geïntegreerd onderwijs ... (1977, pag.294)

Met deze hyperbool wist de wiskundige Hans Freudenthal nadrukkelijk de aandacht op een fundamenteel onderdeel van zijn onderwijsvisie te vestigen: wiskunde leren door mathematiseren in een rijke context.

Het was Freudenthal die bij de oprichting van het IOWO in 1971 de Wiskobas-afdeling van het basisonderwijs op het spoor van het realistische reken-wiskundeonderwijs zette, weg van het verschraalde traditionele rekenonderwijs en weg ook van de opkomende ‘New Math’. Dat rekenen op de realiteit en de werkelijkheid van kinderen betrokken kan worden, was in het traditionele onderwijs steeds meer uit zicht geraakt, om over the ‘New Math’ die vanaf het midden van de jaren zestig opgang maakte maar te zwijgen: verzamelingen, relaties, transformaties, talstelsels, redeneren met logiblokken …
Kenmerkend voor Freudenthals basisopvatting was niet alleen dat hij de ‘beleefde’ werkelijkheid van kinderen binnen het reken-wiskundeonderwijs wilde halen, maar vooral dat hij die rijke context van de realiteit niet alleen als toepassingsgebied doch ook als bron van het leren liet fungeren. Het citaat over geïntegreerd onderwijs dient dan ook primair vanuit dit standpunt te worden begrepen.

Stond Freudenthal destijds alleen met zijn visie? Was hij een eenzame tamboer, een trommelaar voor dovemansoren, zoals in ‘Schrijf dat op Hans’ staat (1987, pag.362)? Welke specifieke bijdrage heeft Freudenthal aan de praktische ontwikkeling en theorievorming van het realistisch reken-wiskundeonderwijs geleverd? In hoeverre zijn Freudenthals ideeën en voorstellen door zijn medewerkers gevolgd? Omgekeerd: op welke punten is Freudenthal beïnvloed? Hoe heeft Freudenthals gedachtegoed na 1990 doorgewerkt?
Dit zijn de kernvragen die hier aan de orde worden gesteld.

In de beantwoording daarvan zal een menselijker beeld van Freudenthal naar voren komen dan het mythische imago dat hij thans vaak krijgt toebedeeld en waaruit mijn gevoel van vervreemding uit de aanhef ontspruit.

2 Voorgeschiedenis

De onstuitbare opmars van de abstracte 'New Math' begon op het fameuze Royaumont-congres in 1959. Veel landen uit de westerse wereld hadden regeringsvertegenwoordigers naar dit Oeso-seminar gestuurd. De structuralistische onderwijsvisie die daar werd uitgedragen, kreeg snel aanhang onder wiskundigen uit het Bourbaki-kamp, steun van onderwijsonderzoekers, ontwikkelaars, uitgevers, lerarenorganisaties, en bijval van befaamde psychologen als Piaget en Bruner. In 1962 publiceerden de tegenstrevers van de 'New Math', waaronder de vermaarde mathematen Ahlfors, Birkhoff, Courant, Coxeter, Polya, Weil en tientallen anderen, een geruchtmakend memorandum. Daarin komen uitspraken voor als:

> ... Therefore, to introduce new concepts without a sufficient background of concrete facts, to introduce unifying concepts where there is no experience to unify, or to harp on the introduced concepts without concrete applications which would challenge the students, is worse than useless: premature formalization may lead to sterility.
> The best way to guide the mental development of the individual is to let him retrace the mental development of the race - retrace its great lines, of course, and not the thousand errors of detail ... (1962, pag.192)

Deze citaten zouden zo uit de koker van Freudenthal kunnen komen: de realiteit als bron en toepassingsgebied bij het mathematiseren volgens de productieve methode van de geleide heruitvinding. De tegenbeweging slaagde er echter niet in om een dam tegen de aanzwellende golfstroom van de 'New Math' op te werpen. Als door een wonder werd vrijwel alleen het Nederlandse basisonderwijs er niet door overspoeld. Hoe was dat mogelijk?
Het geheim van deze vrijwaring schuilt in de onderwijsontwikkeling die vanaf 1967 door de Wiskobasbeweging alhier onder de inspirerende leiding van Goffree en Wijdeveld werd gerealiseerd. Wiskobas slaagde er met behulp van de onderwijsinspectie in de invoering van nieuwe reken-wiskundemethoden af te remmen, en later zelfs tot staan te brengen - internationaal bezien een unieke prestatie.
Freudenthal stond hier aanvankelijk volledig buiten. Sterker: in 1968 werd hij adviseur bij de vertaling en bewerking van een (milde) 'New Math'-methode (Eichholz e.a., 1970). Hiermee volgde hij zijn gewoonte zich niet afzijdig te houden maar mee te werken om te kunnen bijsturen onder het motto: 'if you can't beat them, join them.' Kennelijk was hij toentertijd door drukke werkzaamheden niet goed op de hoogte van de actuele ontwikkelingen in het rekenonderwijs op de basisschool en de rekendidactiek van de Pedagogische Academie.
Nadat Freudenthal in september 1969 Van der Blij als voorzitter Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) opvolgde - en per 1 januari 1970 'de facto' als zodanig ging functioneren - bezocht hij in februari 1970 voor het eerst een Wiskobasconferentie. Getroffen door het enthousiasme van de deelnemers - inspecteurs van het basisonderwijs - zal hij zich daar gerealiseerd hebben dat er grote mogelijkheden lagen om los van de 'New Math' tot een radicale vernieuwing van het rekenonderwijs en de rekendidactiek te kunnen komen. Maar dan was het wel noodzakelijk dat die landelijk en regionaal georganiseerde Wiskobasbeweging een institutionele basis zou krijgen. Freudenthal was al sinds de start van de CMLW in 1961 voorstander van een instituut voor ontwikkeling van het wiskundeonderwijs (IOWO). Dáárvoor ging hij zich nu samen met de Wiskobasstaf inzetten.
Begin 1971 werd door staatssecretaris Grosheide inderdaad toestemming verleend om zo'n instituut op te richten. En in de lente van dat jaar besloot Freudenthal als hoogleraar-directeur van het IOWO in dienst te treden. Wiskobas werd een afdeling van dit instituut, maar de band met de Wiskobasbeweging in het onderwijsveld bleef uiteraard bewaard. En zo kwam het idee van de integrale, ruim opgezette onderwijsontwikkeling tegelijk met Wiskobas het IOWO binnen.

Dit concept om de vernieuwing van het wiskundeonderwijs op een breed front aan te pakken door middel van de opleiding van onderwijsgevenden, via nascholing en kadervorming, door onderzoekend ontwikkelen op een ontwerpschool, door middel van beïnvloeding van methoden en leerplannen, met steun van de onderwijsinspectie en in samenwerking met geëigende instanties en organisaties, sprak Freudenthal bijzonder aan.
Tien jaar later, in een plenaire lezing op de ICMI in Berkeley over 'Major Problems of Mathematical Education' sprak hij terugblikkend op de hem bekende wijze:

> Curriculum development viewed as a strategy for change is a wrong perspective. My own view, now shared by many people is educational development.' (1981, pag.149)

Terug naar de start van het IOWO: Freudenthal kon nu beginnen om zijn visie op mathematiseren via het ontwikkelen van onderwijs proberen te realiseren.

3 IOWO-periode (1971-'81)

Wat was Freudenthals specifieke bijdrage aan het ontwikkelen van thema's en leergangen gedurende de integratiefase (1971-'75) en de fase van de voortgezette opbouw (1976-' 81)?
In 'Mathematics as an Educational Task' (1973, pag.132) schrijft hij:

> ... The globally structuring force, as we called it, should be lived through reality. Only this way can we teach mathematics fraught with relations, can we be sure that the students integrate the mathematics be learned, and can we guarantee the applicability of mathematics ...

Het is zonneklaar dat de geïntegreerde, thematische benadering van het reken-wiskundeonderwijs zeer wel bij deze grondgedachte over mathematiseren past, of sterker, er zelfs door gestimuleerd wordt.
De 'IOWO-snapshots' die in 'Educational Studies in Mathematics' ter gelegenheid van Freudenthals afscheid als hoogleraar-directeur (1976) werden gepubliceerd, getuigen daarvan: Waterland, een eiland van meten en meetkunde; Schip Ahoy; Onze Aarde; Gulliver; Breukelerdam … Daarin komt tot uitdrukking dat realistisch reken-wiskundeonderwijs op geïntegreerde kennis, vaardigheden en kundigheden mikt, zowel ten aanzien van de puur vakmatige leerstof als voor de verbindingen daarvan met toepassingssituaties in de realiteit. De geïntegreerde thema's vervullen zogezegd een specifiek horizontale functie, wat wil zeggen dat ze primair mikken op het toepassen, beoefenen en verbinden van geleerde kennis en vaardigheden in de betreffende contextsituaties. Als zodanig onderscheiden ze zich van (deel)leergangen die vooral ook een verticale mathematiseringsfunctie vervullen en gericht zijn op formaliseren en structureren binnen het vaksysteem.

Dit onderscheid in horizontaal en verticaal mathematiseren (Treffers, 1975) diende er mede toe om het belang van het geïntegreerde onderwijs dat in de eerste fase tot 1975 zoveel aandacht kreeg, tot de juiste proporties terug te brengen: thema's zijn belangrijk, maar overaccentuering ervan leidt tot empiristisch wiskundeonderwijs met te weinig aandacht voor verticaal mathematiseren (zie ook De Lange, 1979). De genoemde nadruk was trouwens alleszins begrijpelijk. Ten eerste ging van dit onderwijs een grote innovatieve werfkracht uit. Ten tweede paste de geïntegreerde benadering perfect bij de nieuwe leerstofdomeinen van meten en meetkunde. En ten derde vroeg het ontwikkelen van thema's veel minder tijd dan het uitlijnen van nieuwe leergangen. Met name het laatstgenoemde punt was, gelet op het feit dat in 1975 een nieuw voorbeeld van een schoolwerkplan beschikbaar moest zijn, van grote praktische betekenis.
Al met al kan men concluderen dat Freudenthals integratieve opvatting ten aanzien van het mathematiseren, die mede geïnspireerd is op het werk van Decroly, een stempel op het werk van Wiskobas drukte in de eerste fase tot 1975. Zijn magistrale fenomenologische analyse van 'Verhoudingen', die in 1973 intern werd gepubliceerd, doet hieraan niets af. Want via dit onderwerp werden speciaal verbindingen binnen en tussen de onderdelen van rekenen, meten en meetkunde gelegd, en als zodanig stond ook hier de integratieve functie voorop.

In de periode 1976-'79 schreef Freudenthal fenomenologische beschouwingen over lengte meten, oppervlakte, natuurlijke getallen en breuken. Die analyses bevatten geen theorie van het onderwijs op de genoemde terreinen, doch geven gedetailleerde beschrijvingen van de betreffende wiskundebronnen in de werkelijkheid, de reële verschijningsvormen van wiskundige begrippen en structuren. Ze hadden tot doel de leergangontwikkeling bij de genoemde onderwerpen te ondersteunen. En inderdaad: bij meten, en eerder al bij verhoudingen en aanvankelijk rekenen, vervulden ze de beoogde functie - onderwerpen die volgens hun specifieke aard een hechte band met de realiteit onderhouden.
Maar hoe staat het met de fenomenologische analyse van breuken; fungeerde die eveneens als baken voor de leergangconstructie?
Deze vraag kan eenvoudig worden beantwoord omdat Freudenthal zelf zo'n 'rijke didactische sequentie voor het breukrekenen' (1984) heeft geschreven - de enige blauwdruk van een leergang die hij ooit ontwierp! We zullen hier wat langer bij stilstaan, omdat daarin niet alleen zijn algemene visie op reken-wiskundeonderwijs, maar ook de contouren van zijn (impliciete) onderwijsleertheorie zichtbaar worden. En dat nog wel voor een leerlijn die als de meest complexe van het totale rekenwiskundeonderwijs bekend staat! Zijn verzuchting dienaangaande spreekt wat dat betreft voor zich:

> ... Het hoofdstuk Breuken heb ik al enkele keren binnenstebuiten gekeerd. Het is de overvloed aan fenomenen, door breuken en bewerkingen met breuken vertolkt, die het me zo moeilijk maakt (…) Mijn opzet is dus de breuken in hun volle fenomenologische weelde te presenteren, en ik kan slechts hopen, dat ik zelf niet in die overvloed verdrink …'
> (1984, pag.146)

Dan volgt een diepgaande ontleding van het verschijnsel breuk: de breukoperatie en de breukrelatie beide werkend op objecten, hoeveelheden en grootheden; de breuk als deel van een geheel dan wel in een verhouding; de breuk als maat en als rationaal getal …
Bij eerste kennisname valt op dat de leergang sterk afwijkt van de traditionele aanpak: eerst komen, na het eerlijk verdelen, vergroten en verkleinen met een hele factor aan bod, vervolgens het vermenigvuldigen en delen, en pas dan verschijnen het vergelijken, aftrekken en optellen van breuken. Ook worden geen handelingsrecepten verstrekt of rekenregels voorgeschreven. Voorts springt de veelvormige visuele ondersteuning in het oog: (dubbele) getallenlijnen, boomdiagrammen, stroomdiagrammen, roosters en rechthoeken.
Al met al een veelsporige benadering:

> ... Bij het natuurlijk getal is de veelsporigheid van de instap traditionele regel. Bij de breuken veronderstelt men de leerlingen ver genoeg gevorderd, om ze met één instap vanuit de realiteit genoegen te laten nemen. Voor mij is dit de oorzaak waarom breuken slechter functioneren dan natuurlijke getallen, waarom er zo velen zijn, die nooit breuken leren ...
> (1984, pag.146)

Eerder al verwoordde Freudenthal (1968) zijn bezwaren tegen de gangbare aanpak van het breukenonderwijs en gaf hij aan hoe de breukendidactiek naar zijn idee gestalte moest krijgen: startend vanuit de realiteit als bron, in gevarieerde contexten met een brede begripsinbedding en veelsporig optrekkend - net als bij het aanvankelijk rekenen.
Hoe pakte dit radicaal vernieuwde breukenonderwijs van Freudenthal uit? Dat weten we niet, om de simpele reden dat zijn opzet van de breukenleergang nooit in de onderwijspraktijk werd beproefd! Waarom is dit nooit gebeurd? Om deze intrigerende vraag bevredigend te kunnen beantwoorden, moeten we eerst een onderwijstheoretisch uitstapje maken.

4 Ontwikkeling, onderzoek en theorievorming (1981-'91)

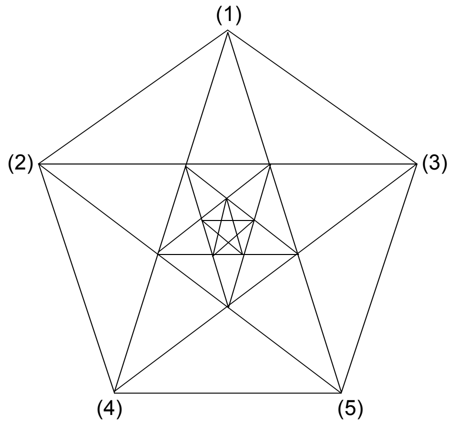
Freudenthals reserve ten aanzien van algemene onderwijsleertheorieën als die van Gagné en Gal'perin is genoegzaam bekend. Toch heeft met name de onderwijstheorie van Gal'perin invloed op Wiskobas uitgeoefend bij de leergangontwikkeling van kolomsgewijs, cijferend rekenen (Van Bruggen, 1975; De Jong, 1977). Tevens heeft zijn onderwijstheorie van de trapsgewijze ontwikkeling van mentale handelingen mede het denken over onderwijsleerniveaus gestimuleerd.
De specifieke niveautheorie van Van Hiele betreffende het meetkundeonderwijs, waar Freudenthal veel waardering voor had, is door hem nooit prominent aan de orde gesteld. Kennelijk zag hij niet hoe een generalisatie van deze theorie op het reken-wiskundeonderwijs betrokken kon worden. In de eerdergenoemde ICMI-rede 'Major Problems of Mathematics Education' poneert hij dan ook:

> ... My seventh major problem of mathematics education is: How is mathematics learning structured according to levels and can this structure be used in attempts at differentiation?… (1981, pag.145)

In elk geval is zijn ontwerp van de breukenleergang niet volgens een niveau-indeling opgezet. En ook in de leergangen die Wiskobas in de IOWO-periode ontwikkelde, was zo'n structurering nog niet duidelijk te onderkennen, al waren daartoe bij het memoriseren en automatiseren wel aanzetten zichtbaar. Zo was de onderwijstheoretische stand van zaken omstreeks 1980 bij de opheffing van het IOWO.

In de jaren die volgen, in de post-Wiskobasperiode tot 1990, had Freudenthal geen directe bemoeienis meer met het ontwikkelingsonderzoek dat zich toespitste op de domeinen van het aanvankelijk rekenen, het leren van de tafels van vermenigvuldiging, het cijferende vermenigvuldigen en delen, en het breukrekenen (Van den Brink, 1989; Ter Heege, 1985; Dekker e.a. 1982; Streefland, 1988). In 1985 waren deze studies zo ver gevorderd dat hun gemeenschappelijke opzet zichtbaar werd en in een theoretisch raamwerk van vijf onderwijsprincipes kon worden geplaatst die in steeds kleinere vijfhoekkaders van leergangen, lessenseries en lessen doorwerken (Treffers & Goffree, 1985, pag.110).

> ... Realistic curricula are distinguished from non-realistic ones on the following points (fig.1):
> (1) the dominating place occupied by contextproblems, serving both as source and as field of application of mathematical concepts;
> (2) the broad attention paid to (the development of) situation models, schemas and symbolising;
> (3) the large contribution children make to the course by their own productions and constructions, which lead them from the informal to the formal methods;
> (4) the interactive character of the learning process;
> (5) the firm intertwining of (related) learning strands ...



figuur 1

De eerste drie principes bevatten een niveautheoretische triade die in alle genoemde leergangen wordt gevolgd (Treffers, 1987):
1 vanaf informeel, contextgebonden werken,
2 via semi-formeel, modelondersteund handelen,
3 naar formeel, vakmatig opereren.
De specifieke handelingen op deze formele niveaus worden per domein inhoudelijk gevuld met de betreffende wiskundige structuren en toepassingen daarvan.
Met behulp van dit onderwijstheoretische kader, waarin ook Freudenthal zich goed kon vinden, kan duidelijk worden gemaakt waarom zijn breukenleergang niet nader werd beproefd en waarin zijn voorstel verschilt van de leergangen die Wiskobas toentertijd ontwikkelde, in het bijzonder de breukenleergang van Streefland (1988).
Daartoe moeten we eerst enkele opmerkingen maken over de wijze waarop de betreffende Wiskobasleergangen op basis van een fenomenologische en een conceptuele analyse werden ontworpen en via ontwikkelingsonderzoek in een definitieve vorm gezet.

De fenomenologische analyse dient ertoe om de brede

begripsvulling te waarborgen en de toepasbaarheid van het geleerde hecht te funderen.
De conceptuele analyse identificeert de sleutelbegrippen, zet de bakens van de leergang uit en zoekt de passende modelcontexten die in de trapsgewijze opbouw als contextmodellen kunnen gaan fungeren. Deze analyse is onderwijstheoretisch geladen. Daarin wordt mede bepaald of en hoe bij het verticale mathematiseren de concrete oriënteringsbasis door één, twee dan wel meerdere modelcontexten wordt gevormd.
In de genoemde Wiskobasleergangen is voor een brede *toe*gang, een smalle *op*gang en een brede *voort*gang gekozen - een praktisch uitvoerbare aanpak.
Een voorbeeld: in de breukenleergang van Streefland fungeert, na een eerste verkenning, het gevarieerde eerlijk verdelen bij gelijkwaardige tafelschikkingen als modelcontext om het begrip equivalentie te verwerven dat bij het vergelijken, aftrekken en optellen van ongelijknamige breuken een sleutelfunctie vervult. De betreffende tafelschikking wordt met een pictogram uitgebeeld, waarin de verbinding tussen de modelcontext en de breuk duidelijk tot uitdrukking komt. De modelcontext *van* de verdelingssituatie gaat al doende als contextmodel *voor* het formele opereren fungeren in casu het vergelijken, aftrekken en optellen van ongelijknamige breuken, en wordt daarbij visueel ondersteund door de getallenlijn en het genoemde metonymische symbool in relatie tot de breuknotatie.[1] Kinderen krijgen een productieve inbreng in het interactieve onderwijsleerproces, wat wil zeggen dat ze een cruciale bijdrage aan de inhoud en inrichting van het onderwijsleerproces leveren: ze verwerken de aangeboden leerstof op hun eigen, specifieke manier en ontwerpen ook zelf opgaven die ze vervolgens alleen of met elkaar oplossen. Daarbij kan, waar nodig, de genoemde modelcontext van het gelijkwaardige eerlijk verdelen als concrete oriënteringsbasis fungeren.

Terug nu naar de vraag waarom Freudenthals ontwerp niet verder voor de onderwijspraktijk is uitgewerkt. Verschilt zijn aanpak essentieel van het Wiskobasontwerp? Dat is inderdaad het geval, althans essentieel verschillend binnen hetzelfde vijfhoekige onderwijstheoretische kader. En dan niet omdat Freudenthal het vergroten en verkleinen, en vervolgens vermenigvuldigen en delen, in plaats van het vergelijken, aftrekken en optellen vooropstelt. Nee, het gaat erom dat Freudenthals leertraject in drieledige zin veelsporig is, wat wil zeggen dat hij niet alleen voor een brede toegang kiest maar ook voor een brede opgang en voortgang opteert.
Terwijl, als gezegd, bij de Wiskobasleergangen betreffende het memoriseren, het automatiseren en algemeen het opereren, na de brede begripsinbedding, een één- à tweesporige verticale mathematisering volgt en daarna weer een brede voortgang ten behoeve van de toepasbaarheid - dit is het eerste verschil met Freudenthals concept. Het tweede belangrijke onderscheid, dat daarmee samenhangt, heeft betrekking op de modelcontext die bij Streefland een dominante plaats krijgt toebedeeld, terwijl zo'n krachtig paradigma bij Freudenthal ontbreekt. Zoals gezegd, is het laatstgenoemde nadrukkelijk niet het gevolg van het feit dat hij vergroten en verkleinen vooropstelt. Want ook bij zo'n aanpak zou een trapsgewijze opbouw met één richtinggevende modelcontext passen - bijvoorbeeld die van de tafelschikkingen waarin het aantal pizza's of het aantal personen multiplicatief wordt gewijzigd waardoor de uitkomsten met een bepaalde factor worden vergroot dan wel verkleind; samenstelling van een en ander kan zowel naar equivalentie als naar vermenigvuldigen van breuken leiden.

Heeft Freudenthal deze smalle opgang over het hoofd gezien? Of stond hij niet achter dit concept van het verticale mathematiseren? In ieder geval heeft hij in het aanvankelijk rekenen voor dezelfde benaderingswijze als bij breuken gekozen, of beter, omgekeerd. Vermenigvuldigen van hele getallen bijvoorbeeld benaderde hij eveneens veelsporig via herhaald bijvoegen, springen, maatverandering, vergroten, combineren, kruisen, oppervlakte bepalen en zo meer (1984). Terwijl deze brede begripsinbedding bij Wiskobas in de jaren tachtig bij het leren van de tafels wordt doorbroken met een smalle opgang van herhaald bijvoegen, dat met behulp van de getallenlijn en de rechthoek wordt gevisualiseerd, waarna vervolgens weer een uitbreiding van de toepassingen plaatsvindt. Overigens hebben de genoemde verschillen in opvatting geen betrekking op meten en meetkunde. De specifieke aard van deze wiskundedomeinen vragen een didactiek die zich niet zonder meer met het kernbegrip veelsporigheid laat beschrijven (zie De Moor, 1999; Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 2004). Is zijn (impliciete) onderwijstheorie van het driezijdig veelsporige mathematiseren bij het *rekenen* later nog ter discussie gesteld of bijgesteld?
In dit verband is het gesprek dat op 11 augustus 1989 plaatsvond wellicht van belang.

We zouden even een artikel van A. Bishop bespreken over internationale aspecten van onderwijsresearch, die gedenkwaardige vrijdag in augustus 1989. Maar het gesprek pakte totaal anders uit. Volkomen onverwacht bracht Freudenthal zijn rol en invloed op de ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs ter tafel. In het bijzonder de taken die hij, naar zijn mening, niet goed genoeg had uitgevoerd: 'Je twijfelt wel eens: heb ik het wel goed gedaan?'
Als eerste kritische punt noemde hij de grote nadruk die het Wiskobasteam en ook hijzelf in de jaren zeventig op geïntegreerd, thematisch onderwijs hadden gelegd: 'We moesten veel leren.' Voorts vond hij dat hij te laat op de noodzaak had aangedrongen om nieuwe leergangen te ontwikkelen. En in zoverre hij zich daar zelf mee had ingelaten - bij breuken bijvoorbeeld - dat de ideeën daarover soms een te zware wissel op ontwikkelaars en onderwijsgevenden hadden getrokken: 'Was ik niet te onprak-

tisch, te idealistisch? Heb ik de ontwikkeling niet opgehouden?'
Mijn reactie liet zich raden: ik achtte zijn twijfels niet gerechtvaardigd. En voorzover ze dat wel waren, betroffen die het Wiskobasteam als geheel en zeker niet hem alleen. Daar kwam nog bij dat we zijn ideeën soms op een andere wijze vormgaven (bij breuken bijvoorbeeld) of in enkele gevallen zelfs terzijde schoven (tafels, cijferend vermenigvuldigen). En ook bij de theorievorming hadden we onze eigen weg gevolgd. Wel bouwden we tot vandaag voort op de fundering die hij vanaf het begin van de IOWO-periode had gelegd. Met zijn realistische onderwijsvisie, zijn aanwijzing over het observeren van leerprocessen (ook van jezelf) als didactisch middel, zijn fenomenologische beschouwingen over het aanvankelijk rekenen, verhoudingen en meten, zijn aandacht voor probleemoplossen, zijn kritische kijk op algemene onderwijsleertheorieën en zo meer.
Maar we waren hem niet in alle opzichten gevolgd en dat was ook niet wat hij zonder meer wilde. Ik herinnerde Freudenthal aan een gesprek in het voorjaar van 1973 tijdens een Wiskobasbijeenkomst in Noordwijkerhout waarin hij mij op het hart drukte dat het Wiskobasteam hem niet als een onaantastbare grootheid moest beschouwen, maar dat ook zijn ideeën kritisch bezien dienden te worden. Dat is, met alle respect, precies wat we deden en waarvoor hij ons alle ruimte had gegeven: praktisch haalbare ontwerpen maken.
Om half één verliet Freudenthal zichtbaar opgelucht mijn kamer, waar ik, beduusd, nog even bij moest komen van de wonderlijke wisseling van rollen die zich onverwacht in dit tweegesprek had voorgedaan.
De vroegere en wellicht deels nog bestaande verschillen van inzicht over het memoriseren, het automatiseren en de leergangontwikkeling waren op die dag nog eens ter tafel gekomen. Maar de cruciale kwestie over de veelsporige benaderingswijze van leergangen bleef verder onbesproken. Hoe dacht Freudenthal daar anno 1989 eigenlijk over?

5 China Lectures (1991)

Biedt 'Revisiting Mathematics Education. China Lectures.', Freudenthals monumentale laatste werk wellicht wat meer duidelijkheid over de kwesties die hier zijn aangestipt?
Dat is inderdaad het geval. Om te beginnen over de structuur van leergangen, speciaal de één- dan wel veelsporige opgang daarin, met de breuken als paradigma:

> ... Streefland's approach towards fractions, within one single but deeply excavated context, is promising, although it has not been continued as far as to reach formal fractions ... (1991, pag.72)

Een voorzichtig positief oordeel dus over een didactische aanpak die hij vroeger zelf niet volgde, of sterker, over een onderwijstheoretische uitwerking die hij tot nu toe niet onderschreef of althans anders gestalte gaf. Over het belang van het éénsporige algoritmiseren laat hij overigens geen enkele twijfel bestaan, maar dat is niet nieuw; net zomin als zijn waardering voor de nieuwe ontwikkelingen op onderwijstheoretisch terrein (1987).
Wel nieuw is zijn opvatting over leerniveaus.

> ... I always knew that my levels differed from those of the Van Hieles and at many opportunities I stressed this and at many occasions; my levels were relative rather than absolute ones, I said, although I gave Pierre Van Hiele the full credit for the level idea as such. I should confess that never before have I as consciously considered that difference as I am doing now. (…) When I hit on reflection as the thing responsible for the jumps in the learning process, the road was prepared for as many discontinuities and levels in a multitude of learning processes as there are significant occurrences of reflection ... (1991, pag.101)[2]

In deze beschouwingen over reflectie en niveaus ballen zich vrijwel alle *major problems* samen die Freudenthal tien jaar eerder op het ICMI-congres formuleerde. Wat is reflectie? Hoe manifesteert reflectie zich? Hoe kan het onderwijs reflectie bij leerlingen en de leraar zelf stimuleren?
Maar de eerste vraag die zich na lezing van Freudenthals diepgaande betoog over leerniveaus opdringt, is toch wel - om mijn eigen terminologie te hanteren - hoe het progressieve mathematiseren per domein concreet kan worden ontleed. Want het is duidelijk dat we met een algemene beschouwing over microniveaus geen didactisch voordeel kunnen behalen indien ons niet duidelijk voor ogen staat op welke componenten van de wiskundige handelingen die sprongen in het leerproces betrekking hebben.

6 Intermezzo: reflectieve terugblik op niveau

Op welke componenten van de rekenhandelingen in bijvoorbeeld het getallengebied tot 100 kan de (sprongsgewijze) voortgang in het leren zich manifesteren? Dit kernprobleem van Freudenthal heeft velen (Menne, 2001; Buys, 2005; en anderen) aan het denken gezet. De uitkomst daarvan komt, wat mijzelf betreft, kort gezegd hierop neer dat drie basiscomponenten in de rekenhandelingen worden onderscheiden:
- de abstractiegraad;
- de aard;
- de algemeenheid van de betreffende handelingen.

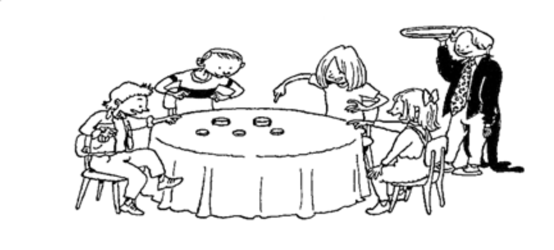
Deze hebben betrekking op het toenemende formaliseren, structureren en toepassen in dit getallendomein.
De progressie in het *formaliseren* beweegt zich binnen en langs de eerdergenoemde stadia van het informele, contextgebonden handelen via het semi-formele, modelon-

dersteunde rekenen naar het formele, vakmatige opereren. Naast en met de contextopgaven vervullen bij optellen en aftrekken bijvoorbeeld met name fysieke bewegingen, tel- en positiematerialen, het visuele model van de (lege) getallenlijn plus een notatieschema als het pijldiagram, een cruciale intermediaire functie. Anders gezegd: de brugfunctie van het modelleren kan op verschillende wijzen gestalte krijgen via contextualiseren, schematiseren en symboliseren, waarbij de leerlingen een belangrijke productieve inbreng hebben.

De voortgang in het structureren vertoont zich bij het (verkort) tellende rekenen, het (decimaal) splitsende rekenen en het (handige) flexibele rekenen en de overgangen daartussen. Het tellende rekenen sluit aan bij het elementaire opzeggen van de telrij, het synchrone bewegen daarbij op een (denkbeeldige) getallenlijn, en het resultatieve tellen van hoeveelheden en grootheden; het is gebaseerd op kennis van de structuur van de telrij en van elementaire rekenfeiten. Bij het splitsende rekenen wordt de tientallige positionele schrijfwijze handig benut; het berust op begrip van het positiesysteem en op kennis van elementaire rekenfeiten. En het flexibele rekenen kenmerkt zich door het inzichtelijke gebruik van de eigenschappen van de basisbewerkingen en de relaties ertussen. Deze drie structuren laten een toenemende complexiteit van de betreffende rekenhandelingen zien: tellen is elementairder dan bijvoorbeeld het doorzien van de relatie tussen aftrekken en (aanvullend) optellen. Ieder van de genoemde handelingsstructuren kan met de onderscheiden formaliseringsniveaus gecombineerd worden. En ze zijn er ook ieder op gericht om via progressief mathematiseren het derde niveau van het formele, vakmatige opereren te bereiken. Daarbij vervult, zoals gezegd, het modelleren in verschillende vormen een belangrijke brugfunctie.
De toename van de toepasbaarheid manifesteert zich in de steeds grotere verscheidenheid van de reële verschijningsvormen waarop de rekenvaardigheden kunnen worden toegepast doordat men in staat is in de betreffende contextopgaven de essentieel wiskundige structuur te onderkennen. De didactische fenomenologie van Freudenthal, maar ook de Wiskobasmaterialen en de realistische reken-wiskundemethoden bevatten een rijke bron aan voorbeelden waarmee de begripsvorming kan worden verbreed en de toepasbaarheid vergroot. Ook in de reikwijdte en complexiteit van de contextopgaven kan per operatie globaal een ordening worden aangebracht: in herhaald optellen bijvoorbeeld wordt makkelijker een vermenigvuldiging ontdekt dan in een combinatieopgave. Net zoals voor probleemoplossen geldt, namelijk dat je dat leert door problemen op te lossen, kun je van het vergroten van de toepasbaarheid beweren dat je dit bereikt door toepassingen te maken en de oplossing ervan samen te bespreken. Daarbij dient dan uiteraard de mate van complexiteit bij de didactische ordening in het oog te worden gehouden.

Toen deze drie parameters met hun onderverdelingen, die ieder ook weer verder verfijnd kunnen worden, waren geïdentificeerd en voor de ontwikkeling van het onderwijs benut konden worden, was het mogelijk om de potentiële voortgang van het leren bij de genoemde componenten en hun samenstel in macroniveaus aan te geven. Aanvankelijk gebeurde dit tamelijk onbekommerd, om niet te zeggen ondoorzichtig, door elementen uit verschillende componenten binnen één niveau-indeling te mengen. Pas recent (zie Menne, 2001) wordt mede aan de hand van voorbeelden helder aangegeven hoe in het formaliseren, het structureren en het toepassen verschillende niveaus kunnen worden onderscheiden, dus hoe het progressieve mathematiseren in het getallendomein tot 100 concreet gestalte krijgt. Daardoor wordt het gericht observeren van leerprocessen en het benutten van die observaties voor het didactisch handelen bevorderd.
Algemeen gesteld, dus los van het rekenen tot 100, is het aan te bevelen om binnen een bepaald leerdomein, via een fenomenologisch-conceptuele analyse, eerst de belangrijkste handelingscomponenten te identificeren. Voor het rekenen als geheel zijn dit globaal dezelfde drie componenten als hiervoor werden genoemd. Maar die dienen dan uiteraard per domein nader gespecificeerd te worden. (Voor het automatiseren en memoriseren kan het wenselijk zijn om daar componenten als de mate van verkorting en beheersing aan toe te voegen.)
Voor meten zullen deze drie parameters maar ten dele gebruikt kunnen worden. Ook voor meetkunde - het ervaren, verklaren en verbinden van ruimtelijke verschijnselen - zullen andere componenten nodig zijn om de significante leerprocessen te kunnen signaleren (De Moor, 1999; Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 2004).

Terugblikkend op het voorgaande zou ik overigens willen voorstellen om de term ‘niveau’ spaarzaam en op niet mis te verstane wijze te hanteren, en niet allerlei gedragscomponenten in één niveau-indeling te mengen. Tot zover over de fundamentele niveaukwestie die Freudenthal opwierp. Over hoe het reflectieve denken, dat volgens Freudenthal een cruciale niveauverhogende functie vervult, in het onderwijs gestimuleerd kan worden, valt in algemene zin het volgende op te merken. Er zijn verschillende didactische middelen bedacht om kinderen via anderen en zichzelf over hun eigen handelen te laten nadenken: kinderen zelf opgaven laten ontwerpen en de oplossingen daarvan samen bespreken (Van den Brink, 1986) of verschillende oplossingsmethoden van één opgave te presenteren en te bespreken. Dit vindt steeds plaats in een interactieve onderwijssetting binnen de jaargroep als geheel of in kleine groepjes. Daarbij is ruimte voor uitwisseling van ideeën tussen de leerlingen onderling, de horizontale interactie, en tussen de leerlingen en de leraar, de verticale interactie (Nelissen, 1995). De reflectieve terugblik via de nabespreking en de evaluatie van de verschillende oplossingsmethoden, waaronder die van de eigen aanpak, zijn kenmerkend voor deze didactische organisatie die ook in de lijn van Freudenthals denken ligt. We zullen het voorgaande illustreren met een voorbeeld uit het aanvankelijk rekenen tot 20, naar aanleiding van een videofragment uit het TAL-project - een les van A. Veltman (fig.2).



Kinderen van de speelleerklas (eind groep 2 en 3) werken aan het thema 'restaurant': ze schrijven menukaarten, bestellen eten en drinken, en betalen vastgestelde prijzen. Bij de menukaart ligt een portemonnee met briefjes van 5 euro en munten van 1 euro.
Maureen kiest een coupe ijs voor de waarde van 6 euro en een pannenkoek voor 7 euro. Hoeveel moet ze bij elkaar betalen? De kinderen krijgen even gelegenheid om er over na te denken. Om te beginnen mag Maureen laten zien hoe ze heeft gerekend. En dan komen andere kinderen aan bod.

– Maureen telt eerst 6 munten af en daarna nog 7. Vervolgens telt ze alle munten: 13'.
– Luuk merkt op dat je 3 euro bij 7 euro kunt leggen en dan blijft er bij die andere groep nog 3 euro liggen: '10 en 3 is 13'.
– Thijs wisselt 5 euromunten in voor een briefje van vijf en legt 6 euro's met '5' en '1', en '7' met '5' en '1' en '1'. Hij schuift vervolgens de briefjes van vijf en de euromunten bij elkaar. '10 en 3 is 13'.
– Nick doet hetzelfde, maar hij legt de briefjes en de munten al doende netjes op een rij: '5', '5', '1', '1', '1', is '10, 11, 12, 13.'
– Hannah maakt geen gebruik van het geld: '6 en 6 is 12, en 1 is 13'.
– Er wordt nog een soortgelijke oplossing aangedragen: '7 en 7 is 14, en 1 eraf is 13'.

figuur 2

In bovenstaande oplossingen zijn verschillende graden van abstractie en van rekenstructuren plus combinaties daarvan zichtbaar die in de voorgaande beschouwing werden besproken. Opmerkelijk is dat in deze dwarsdoorsnede van de les, in de onderscheiden oplossingen van de kinderen, de lengte van de leerlijn enigszins zichtbaar wordt. Daardoor krijgt men ook globaal zicht op de sprongen die de kinderen kunnen maken in het leerproces. De leerkracht stimuleert de kinderen om zoveel mogelijk handige oplossingen te vinden. Ze herhaalt nog eens de gevolgde werkwijze die de kinderen lieten zien en verwoordt deze. Vervolgens benadrukt ze kernachtig de handigheid ervan. In een volgende les komt ze op verschillende strategieën terug als er andere opgaven op het onderwijsmenu komen te staan.
Terug nu naar Freudenthal.

7 'Ich bin kein ausgeklügelt Buch ...'

De ruime aandacht die in het Wiskobasproject aan probleemoplossen werd besteed, is mede door Freudenthal aangezet - ik zeg mede, omdat Wiskobasmedewerkers daar eveneens aandacht voor hadden. De rubrieken van H. Jansen en D. Oort in het 'Wiskobas-Bulletin' getuigen daarvan, evenals de inhoudelijke bijdragen in het schoolwerkplan van de ontwerpschool door Van den Brink, Ter Heege, Van Bruggen en Streefland - zie in dit verband ook De Moor (1980). In de laatste publicatie van Freudenthal (1991) komt zijn gerichtheid op probleemoplossen - die vooral ook bleek uit het veelvuldig verspreiden van problemen, puzzels en interessante knipsels - nog wat duidelijker tot uiting dan in zijn voorgaande boeken. De volgende verwijzing naar Polya (2002) spreekt in dit opzicht duidelijke taal:

> ... Polya's repeatedly mentioned work, whose tendency, rather than whose details, can be a source of inspiration - though less of subject matter - for didacticians of mathematics ... (1991, pag.122)

Had Freudenthal voldoende oog voor onderzoek binnen het formele rekensysteem? Uiteraard was dat het geval. Een voorbeeld: het eerste en enige practicum dat hij ooit voor een Wiskobasconferentie (1970) ontwierp, had betrekking op figurale getallen - een puur getaltheoretisch onderwerp waaraan door Wiskobas en later in het TAL-project (Van den Heuvel-Panhuizen, Treffers & Buys, 2001) onder meer ruime aandacht werd geschonken.
Hoe vallen deze formeel gerichte activiteiten te rijmen met de nadruk die in het realistische reken-wiskundeonderwijs op rijke contexten wordt gelegd?
De uitdijende realiteit van de kinderlijke ervaringen gaat geleidelijk aan steeds meer elementen van het formeel reken-wiskundige systeem bevatten. Formele contexten kunnen op termijn dus ook reële contexten worden waarbinnen kinderen betekenisvol wiskundig kunnen opereren en redeneren. Deze interpretatie van 'realistisch' houdt in dat dit onderwijs niet gelijkgesteld mag worden aan dat van de empiristische richting (Freudenthal, 1987). In zijn laatste boek (1991) besteedt Freudenthal nogmaals veel aandacht aan deze kwestie via een diepgaande beschouwing over 'gezond verstand' dat steeds hoger reikt. Overigens is in de reken-wiskundemethoden van de basisschool, enkele uitzonderingen daargelaten, tot nu toe niet een dergelijk 'platte' uitwerking aan het concept van het realistische onderwijs gegeven. Onder invloed echter van nieuwe onderwijsstromingen, lijkt de meer empiristische interpretatie van het realistische reken-wiskundeonderwijs in rap tempo terrein te winnen. Daarbij wordt nota bene Freudenthal als medestander aangehaald - ten onrechte. Al moet gezegd, zoals we eerder zagen, dat sommige van zijn uitspraken daar ook aanleiding toe kunnen geven.

In ‘Schrijf dat op, Hans’ zegt Freudenthal over zichzelf: ‘Ich bin kein ausgeklügelt Buch, aber ein Mensch mit seinem Widerspruch’.

Degene die de moeite neemt om grondig kennis te nemen van zijn gedachtegoed, en dan speciaal van zijn laatste boek (1991) zal echter niet anders dan tot de slotsom kunnen komen, dat Freudenthal dé promotor is van het rijke realistische reken-wiskundeonderwijs waarin uiteraard ook het formele aspect een passende plaats krijgt toegewezen. Passend houdt in dit verband dan in dat formeel niet formalistisch mag zijn, of positief geformuleerd, dat formeel voor de kinderen betekenisvol dient te zijn. Een recent voorbeeld van hoezeer kinderen plezier aan puur rekenen kunnen beleven, is beschreven door De Goeij e.a. (2004) - een paradigma van formeel-realistisch rekenen binnen een magische context op het niveau van het aanvankelijk rekenen, geheel volgens de onderwijsstijl die Freudenthal voorstaat en waarvan hij in zijn laatste boek enkele prachtige voorbeelden laat zien.

8 Slot

Freudenthals invloed op de ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs is van beslissende betekenis geweest: hij is de grondlegger van het zogenoemde realistische reken-wiskundeonderwijs (Goffree, 1993). Zijn betekenis als bouwmeester is minder eenduidig bepaald. Freudenthals ideeën over het aanvankelijk rekenen in de allereerste fase (van groep 1 tot groep 3) hebben veel bijval gekregen. Maar zijn rol op het gebied van basisvaardigheden, hoofdrekenen, schattend rekenen en cijferen is klein. Bij meten en meetkunde is zijn invloed weliswaar aanzienlijk te noemen, maar minder direct aanwijsbaar dan men wellicht zou verwachten.
Algemeen geldt dat zijn scherpe kijk op de fenomenologische rijkdom van de wiskundige structuren en op de persoonlijke uniciteit van leerprocessen, hem er kennelijk van heeft weerhouden om globaal uitgelijnde leergangen uit te stippelen. Op één uitzondering na: de leergang voor breuken. Maar juist dit voorbeeld laat zien dat Freudenthals (aanvankelijke?) denkbeelden over het veelsporige leren, of algemener zijn (impliciete) onderwijsleertheorie van rekenen met betrekking tot het verticale mathematiseren, afwijken van de ideeën die de Wiskobasmedewerkers daarover hadden. Wel zijn er aanwijzingen dat Freudenthal zijn opvattingen in dit opzicht later wellicht heeft bijgesteld.

Over Freudenthals theoretische invloed kan grofweg hetzelfde worden opgemerkt als over zijn praktische betekenis: de basis daarvan is door hem met de introductie van talrijke theoretische begrippen gelegd, maar bij het ontwerpen van het onderwijsleertheoretische kader en de specifieke uitwerking daarvan voor langlopende leerprocessen in leergangen heeft hij geen sleutelrol vervuld; net zo min trouwens als bij de introductie en de concrete uitvoering van de concepten van onderwijsontwikkeling en ontwikkelingsonderzoek, en bij probleemoplossen.

Veel over Freudenthal bleef hier onderbelicht: zijn visie op het specifieke karakter van de wiskunde, zijn standpunt over de toetsproblematiek, zijn voorkeur voor bepaalde didactische groeperingsvormen en zo meer, maar het meest nog zijn persoonlijke uitstraling ook buiten de werksituatie (informele contacten, feestjes, de vrijdagmiddagborrel), zijn intrigerende korte opmerkingen, zijn uitweidingen over schijnbaar futiele observaties van leerprocessen, zijn passie, zijn vermogen om met kleine voorbeelden te verduidelijken dat wiskunde overal aanwezig is, zijn aandacht voor zowel de ‘lagere’ als de ‘hogere’ vormen van wiskunde, zijn respect voor mensen uit de praktijk van het onderwijs, zijn bewondering voor degenen die een helder betoog kunnen houden, zijn scherpe schrijfstijl, zijn onverholen misprijzen voor ontwikkelaars en onderzoekers die geen recht doen aan de wiskunde en aan het kind, geen recht doen aan wiskunde als menselijke activiteit en aan ‘mathematics as an educational task’.

Heeft Freudenthal wel echt bestaan - vroeg ik me in de inleiding af. Zijn didactisch buigzame *one-liners* als ‘wiskunde als menselijke activiteit’, ‘wiskunde leren door geleide (her)uitvinding’, ‘wiskunde leren in een rijke context’ en zo meer, laten zich makkelijk naar eigen goeddunken invullen. Zo kan het gebeuren dat diametraal tegenover elkaar staande onderwijsvernieuwingen toch alle Freudenthal als medestander aanhalen. Freudenthal als ideoloog, de vlag die blijkbaar iedere lading dekt - een positie die hij nu juist zo verfoeide.

Freudenthals initialen *HF* omsluiten de *G*, de *G* van Geleerde, van Gids of hoe men hem passend wil kwalificeren, maar niet de *G* van een hogere macht: Hans Freudenthal was een mens van vlees en bloed - een groot man, (on)navolgbaar.

Noten

1 Het onderscheid tussen model-van als nabeeld en model-voor als voorbeeld is afkomstig van Freudenthal. In ‘Weeding and Sowing’ (1978) besteedt hij er een aparte paragraaf aan. Maar hij gebruikte het onderscheid toen niet in de didactische zin als later door Streefland (1985) werd gedaan. In Treffers en Goffree (1985) en Treffers (1987) werd dit onderscheid niet nadrukkelijk gemaakt omdat de brugfunctie van een model dit verschil impliceert: de verbinding van de modelbrug met de eerste laag wordt door de ‘van-zijde’ gemarkeerd en met de derde laag door de ‘voor-zijde’.
Gravemeijer (1994; 2003) heeft Streeflands onderscheid in ‘van en voor’ overgenomen en als twee gescheiden lagen gepresenteerd en geherformuleerd.

2 Dat Freudenthal de Van Hiele-niveaus als absolute niveaus kwalificeert, is naar mijn mening niet terecht. Van Hiele (1973) spreekt immers uitdrukkelijk over niveaureductie: het rekensysteem bijvoorbeeld dat aanvankelijk als hoogste niveau fungeert, kan vervolgens als basisniveau voor het algebra-onderwijs gaan dienen. Overigens moet ik met betrekking tot Van Hiele ook de hand in eigen boezem steken: ik ben er in de loop van de tijd verschillende keren terecht op gewezen dat de niveaus van de didactische drieslag minder een afspiegeling zijn van de Van Hiele-niveaus dan ik in ‘Three Dimensions’ (1987) suggereer. In ieder geval ben ik bij de niveau-indeling die toen nader werd uitgewerkt wel sterk door Van Hiele geïnspireerd - laat ik het zo zeggen.

Literatuur

Ahlfors, L.V. e.a. (1962). On the Mathematics Curriculum of the High School. *The Mathematics Teacher*, *55*(3), 191-195.

Brink, F.J. van den (1986). Kinderen als rekenboekauteurs. *Het Jonge Kind*, *13,* 258-260.

Brink, F.J. van den (1989). *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen*. Utrecht: OW&OC (proefschrift).

Bruggen, J. van (1975). *Leren cijferen bekeken door een leerpsychologische bril* (interne IOWO-publicatie).

Buijs, K. (2005). Wiskunde leren, een kwestie van steeds gezonderder verstand. In: H. ter Heege, T. Goris, R. Keijzer & L. Wesker (red.). *Freudenthal 100. (Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 24*(3) / *Nieuwe Wiskrant*, *25*(1)*)*. Utrecht: Freudenthal Instituut, 98-105.

Dekker, A., H. ter Heege & A. Treffers (1982). *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas*. Utrecht: OW&OC.

Eicholz, E., e.a. (1970). *Elementair Wiskundig Rekenen*. Assen: Van Gorkum.

Freudenthal, H. (1968). Why to Teach Mathematics so as to be useful? *Educational Studies in Mathematics, 1,* 3-8.

Freudenthal, H. (1977). Wiskunde-Onderwijs anno 2000. *Euclides, 52, 290-295.*

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1981). Major Problems of Mathematical Education. *Educational Studies in Mathematics*, *12,* 133-150.

Freudenthal, H. (1982). Een visie op ons onderwijskundig bezig zijn. *Utrechtse Pedagogische Verhandelingen*, *5*(3), 5-13.

Freudenthal, H. (1984). *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren (1)*. Utrecht: OW&OC.

Freudenthal, H. (1987). Theorievorming bij het wiskundeonderwijs - geraamte en gereedschap. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 5*, 4-15.

Freudenthal, H. (1987). *Schrijf dat op, Hans. Knipsels uit een leven*. Amsterdam: Meulenhoff.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer.

Goeij, E. de & A. Treffers (2004). De magische krachten van getallenvierkanten in groep 4. *Willem Bartjens*, *23*(3), 28-34.

Goffree, F. (1993). HF: Working on Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics, 25*(1/2), 21-51.

Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD-ß Press (proefschrift).

Gravemeijer, K.P.E. (2003). Didactisch gebruik van de lege getallenlijn. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 21*(2), 11-23.

Heege, H. ter (1985). The acquisition of basic multiplication skills. *Educational Studies in Mathematics*, *16*, 375-389.

Heuvel-Panhuizen, M. van den, K. Buys & A. Treffers (red.) (2001). *Kinderen leren rekenen*. Groningen: Wolters Noordhoff.

Heuvel-Panhuizen, M. van den & K. Buys (red.) (2004). *Jonge kinderen leren meten en meetkunde*. Groningen: Wolters Noordhoff.

Hiele, P.M. van (1973). *Begrip en inzicht*. Purmerend: Muusses.

Jong, R. de (red.) (1977). De abakus. *Wiskobas-Bulletin, leerplanpublikatie 6*.

Lange, J. de (1979). Contextuele problemen. *Euclides*, *55*(2), 50-60.

Menne, J.J.M. (2001). *Met sprongen vooruit*. Utrecht: CD-ß Press (proefschrift).

Moor, E. de (1980). Gevarieerd rekenen. *Wiskobas-Bulletin, leerplanpublikatie 11*.

Moor, E. de (1999). *Van vormleer naar realistische meetkunde*. Utrecht: CD-ß Press (proefschrift).

Nelissen, J. (1987). *Kinderen leren wiskunde*. Gorcum: De Ruiter (proefschrift).

Nelissen, J. (1995). Interactief reken-wiskundeonderwijs. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 14*(1), 35-44.

Polya, G. (2002). The goals of mathematical education (1) en (2). *Mathematics Teaching, 181*/*182*, 6-8 en 42-45.

Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron. *Nieuwe Wiskrant, 5*(1), 60-68.

Streefland, L. (1988). *Realistisch breukenonderwijs*. Utrecht: OW&OC (proefschrift).

Treffers, A. (1975). De kiekkas van Wiskobas. *Wiskobas-Bulletin, leerplanpublikatie 1*.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions*. Dordrecht: Reidel.

Treffers, A. & F. Goffree (1985). Rational Analyses of Realistic Mathematics Education - the Wiskobas Program. In: L. Streefland (ed.). *Proceedings of the ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 2,* Utrecht: OW&OC, 97-123.

Lately, Freudenthal has been assigned an almost mythical quality. This status falls far short of the mark though. His undeniable stature in the field of mathematics education has a human measure. Based on five core questions an attempt is made to realistically present that measure. Especially the (implicit) didactical theory of the multi-threaded approach, that finds its blueprint in the learning trajectory for fractions, is given much attention. The doubts Freudenthal had about his own significance for the development of and research into mathematics education are also highlighted. The impact of Freudenthal's legacy is examined in a reflective review. I will end on a personal note.