



# De verbeelding van het mathematisch-didactisch denken

Wil Oonk  
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

*Waarom en waardoor heeft Freudenthal zoveel invloed gehad op mijn professionele werk als leraar in het basis- en voortgezet onderwijs, in het HBO en - nu nog steeds - op mijn werk als onderzoeker? Hoe is die invloed te karakteriseren? Ik wil graag reageren op die vragen aan de hand van enkele voorbeelden. Hopelijk zijn het voor de lezer voorbeelden die hout snijden, want: 'Het kost veel minder moeite de lerende met een douche van talloze voorbeelden te overspoelen, dan naar het ene - paradigmatische - voorbeeld te zoeken dat het hem doet' (Freudenthal, 1984, pag.102). Met vier voorbeelden probeer ik te illustreren hoe Freudenthals verbeelding van het denken mijn eigen denken heeft gestimuleerd op verschillende niveaus.*

## 1 Isomorfie in 1971

Mijn eerste kennismaking met zijn ideeën was op de vijfdaagse(!) Wiskobasconferentie in Egmond in oktober 1971. Het was toen al een gewoonte om het werken in practica en korte presentaties af te wisselen met enkele plenaire lezingen, deze keer een lezing van Freudenthal met als thema 'verzamelingen'.

Hoewel de Wiskobasbeweging vooral ontstond als een reactie op het mechanistische rekenonderwijs, was op dat moment het realistisch reken-wiskundeonderwijs als zodanig nog niet in beeld. Met inmiddels een analyse van de (vier) stromingen in het Nederlandse primaire reken- en wiskundeonderwijs bij de hand (Treffers, 1978), kun je nu vermoeden dat er ten tijde van de conferentie in 1971 bewust of onbewust bij Freudenthal en zijn team van alles door het hoofd heeft gespeeld over mogelijke keuzes voor de ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs in Nederland.

Wellicht ging het toen nog om de afweging tussen twee stromingen die destijds in Europa opgeld deden: de structuralistische aanpak van Papy en anderen, in belangrijke mate gefundeerd door de logica en de verzamelingen-theorie en de empirische richting zoals die in het Nuffield-project tot uitdrukking kwam, met het accent op ervaringsgerichte activiteiten en de toepassing van veel materialen. Op de conferentie in 1971 was de invloed van die stromingen achteraf beschouwd duidelijk zichtbaar, onder andere door een practicum waarin de opdracht was een pagina te analyseren uit de methode 'Denken en rekenen', een methode uit het structuralistische kamp, en anderzijds een meetpracticum met voorbeelden uit het Nuffield-project.

Het college van Freudenthal was kennelijk bedoeld om

de conferentiegangers gedegen kennis mee te geven; mijn aantekeningen van die lezing (fig.1) zijn illustratief voor de inhoud ervan. Wat mij vooral opviel in de lezing, was de subtiële wijze waarop betekenis werd gegeven aan ingewikkelde wiskundige begrippen, nota bene voor een gezelschap dat behalve uit wiskundigen ook voor een groot deel bestond uit pedagogen. Het begrip isomorfie was een van de begrippen die aan de orde kwam; het was tot dan toe voor mij, die in de avonduren bezig was zijn wiskundestudie af te ronden, een abstract, formeel begrip uit de moderne algebra (Loonstra, 1963). Het wiskundig geworstel om de isomorfie van algebraïsche systemen te bewijzen vond ik zeker niet onaardig, maar Freudenthal leerde mij het denken over isomorfie te verbeelden aan de hand van 'kinderlijk' eenvoudige probleempjes als 'de muis en de kaas', de 'broeken en de truien' of het wegenprobleem (fig.1).


Pas daardoor werd me de kracht van het begrip 'isomorfie' werkelijk duidelijk, namelijk het feit dat ogenschijnlijk totaal verschillende systemen of probleemsituaties dezelfde wiskundige structuur kunnen hebben en daardoor ook dezelfde wiskundige eigenschappen gemeen hebben. Opeens zag ik in dat kinderen veel meer en diepgaander wiskunde zouden kunnen leren dan ik tot dan toe voor mogelijk hield; dat was voor mij - die zich nog niet geheel ontworsteld had aan het mechanistische systeem - op dat moment een openbaring.

Het inspireerde me om in de week na de conferentie een practicum voor mijn Pabo-studenten te ontwerpen, waarbij ze onder andere moesten uitzoeken en verwoorden welke van de volgende situaties dezelfde achtergrondstructuur hebben:

- Hoeveel verschillende getallen van drie cijfers kun je maken met de drie getallenkaartjes 5, 6 en 7?

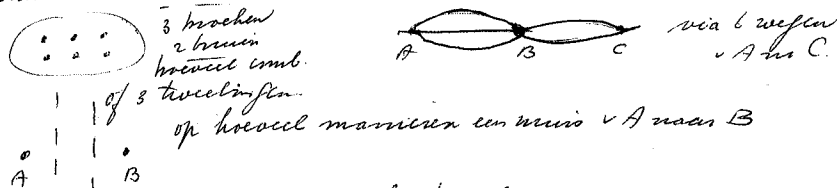
Verzamelingen.

Moeilijkheden liggen bij het concretiseren.  
w. gedachten.

- |                               |               |  |
|-------------------------------|---------------|--|
| 1. <u>woorden</u> (taal)      | betekent iets | gerchematiseerd<br>woorden als betekenis   |
| 2. <u>plaatjes</u> (beeldend) | stelt voor    |  danwende kni duren |
| 3. <u>maken</u> (wereldmak)   |               | „De kleine wereld“   |


„De kleine wereld“ is een gerchematiseerde rechte wereld.

Toepassing.  
kerndiaal aspect of totaal kl. kind overtuigt omw. 1282  
oudmaal „miniter primitief“



of 3 tweelingsen  
op hoeveel manieren een muus v A naar B  
isomorfe problemen  
herkennen en bewijzen van deze isomorfie is wiskunde  
niet het „proberen“.

Algemene patronen vormen is doel

model: 

figuur 1: aantekeningen van de lezing van Freudenthal in 1971

- Ik heb in de kast drie shirts, twee truien en één broek; hoeveel verschillende combinaties (shirt, broek, trui) kan ik maken om me te kleden?
- Hoeveel verschillende getallen van drie cijfers kun je maken met de cijfers 5, 6 en 7?
- Hoeveel verschillende routes zijn er van A via B en C naar D, als er drie wegen zijn van A naar B, twee wegen van B naar C en één weg van C naar D?
- Hoeveel getallen van drie cijfers kun je maken?

Overigens heeft de combinatoriek, bron voor het soort problemen die Freudenthal in zijn lezing aanboorde, nooit een hoge vlucht genomen op de basisschool, wellicht door het geïsoleerde karakter van dat leerstofgebied en de relatie met het meer op het voortgezet onderwijs gerichte kansrekenen. Gaandeweg ontstond er ‘netwerkbreed’ een heel andere opvatting over wiskunde leren door kinderen en Freudenthal zou de eerste zijn die zijn eigen bedenksels en schrijfsels uit die eerste tijd zou relativeren tot aan afwijzen toe.

In 1984 wijdde hij in ‘Didactische fenomenologie’ een heel hoofdstuk aan verzamelingen; daarin wordt de ‘verzamelingenleer’ in de schoolwiskunde - met de Venn-diagrammen en logiblokken - beschreven als puur taal-

verschijnsel en valse concretisering (Freudenthal, 1984, pag. 49).

## 2 Tekst, context en geïntegreerd leren

Freudenthal vertolkte in zijn rede, na het verlenen van het eredoctoraat aan hem op 10 juni 1977, kernachtig wat er bij mij en ik denk bij veel anderen in die tijd leefde. Ik citeer een alinea uit de tekst van die rede die ik zorgvuldig bewaard heb (Euclides, 52(9)).

... Het onderwijs dat wij ontwikkelen is door een ander mensbeeld bepaald en tevens door een andere kijk op de wiskunde - niet als leerstof, maar als menselijke activiteit. Ik heb het eerder driewerf gekenmerkt als:

- aan de realiteit gelieerd,
  - nabij de kinderen,
  - maatschappelijk relevant,
- en vat deze kenmerken thans samen in één dat alle overkoepelt: menswaardig, de mens als lerende, als onderwijsgevende, als begeleider van onderwijs en als schepper van onderwijs waardig.

Wiskunde is voor ons een menselijke activiteit, zei ik, een activiteit én menselijk. (...)

In de jaren hierna kreeg die visie een steeds verfijnder invulling en dat verschaftte veel stof tot nieuwe overpeining. Freudenthal droeg daar onder meer aan bij met zijn wiskundig didactische doordenkingen in Willem Bartjens. Enkele ervan zijn me tot op de dag van vandaag bijgebleven, zoals het artikeltje in het meinumner van 1982. Hij opent dat artikel met een selectie van ingeklede vraagstukjes uit Binets intelligentietesten, met de vragen van de onderzoeker en de antwoorden van een kind:

Als je voor 6 cent snoep in de winkel koopt en je betaalt met 10 cent, hoeveel krijg je dan terug?. Het kind antwoordt: 'Ik heb nog nooit 10 cent gehad en als ik het had zou ik geen snoep kopen, snoep maakt mijn moeder'.

De onderzoeker probeert een ander vraagstukje:

Als jullie met 10 kinderen op school zijn en 6 kinderen krijgen de mazelen, hoeveel komen dan op school? Het kind geeft nu als antwoord: 'Geen, want de anderen zouden bang zijn voor de mazelen en thuisblijven'.

Freudenthal vond dit verslag in een vermaard boek van Klineberg (1944) en zegt daarover onder meer:

Over het gemeten *I.Q.* van bovengenoemd negerjongetje of meisje ontbreken mij de gegevens. Als de andere Binet-vragen navenant werden beantwoord, zal het kind wel voor debiel zijn verklaard ...

Er valt uit deze reactie veel op te maken, ook over de mens Freudenthal, maar ik beperk me even tot de vakinhoud. Zo'n soort vraagstuk, dat in bovenstaand voorbeeld om een aftrekking  $10 - 6$  vraagt, noemt hij een tekst. Context is naar zijn opvatting veel meer, dat is wat er niet bij wordt verteld, wat voortvloeit uit de situatie of door de situatie wordt opgeroepen. Contexten bestaan in de verbeelding en in de realiteit. Hij onderscheidt in het artikel drie wereldjes van kinderen die als bron voor het wiskundeonderwijs kunnen gelden: de eigen wereld van het kind, de in het rollenspel getransformeerde wereld van de volwassene en de sprookjeswereld.

Ik herkende de wereldjes in het toenmalige ontwikkelwerk van het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO) in de jaren zeventig en liet studenten van de Pedagogische Academie onder andere de trits ervaren van 'Het kabouterdorp' (sprookjeswereld voor de kleuters), 'Bouwen met blokken' (getransformeerde wereld van de volwassene voor de middenbouw) en 'Belvia' (beeld van de echte wereld voor de brugklas). Het leerstofgebied - ruimtemeetkunde, bouwen met blokken - is hetzelfde, de context en de activiteiten zijn aangepast aan het ontwikkelingsniveau van de kinderen.

Tekenend voor hem is de twijfel die hij in het artikel uit over het gebruik van sprookjeswerelden in het wiskunde-

onderwijs: de echte wereld van het kind staat immers bol van wiskunde, als je er maar goed naar kijkt. Inderdaad geven de sprookjeswerelden de ontwerper van onderwijs meer armslag dan hij in de echte zou hebben, maar is het niet een teken van gemakzucht als de stof van de leerpakketten niet allereerst in de echte wereld wordt gezocht?

Tot op heden heb ik die vraag niet beantwoord en zal ook hier mezelf en anderen het antwoord schuldig blijven. Het was weer eens piekeren en daar bleef het bij. (Freudenthal, 1982, pag. 132)

Aanleiding voor Freudenthals gepieker over het al of niet sprookjeswerelden voor leerlingen creëren, blijkt een geïllustreerd boekje van enkele Berlijnse auteurs.<sup>1</sup> Aan de hand van het onderwerp 'Lunch' uit dat boekje maakt hij duidelijk hoezeer een dergelijk thema een diepe en rijke bron kan zijn voor het leren van wiskunde, maar ook van talloze andere vaardigheden: van inkoopplanning en omgaan met geld tot leren deelnemen aan het verkeer en het omgaan met elkaar en met volwassenen. Het valt op hoezeer Freudenthal geraakt is door die aanpak; hij zegt daarover:

Wat me trof, was de vanzelfsprekendheid waarmee hier 'de situatie' in het echte leven is gezocht.

Op mijn beurt werd ik als opleider aangenaam verrast door antwoorden op vragen waar ik al lange tijd mee rondliep, zoals de vraag naar hoe een wiskundeleerproces voor leerlingen van de basisschool, maar ook voor aanstaande leraren, zo natuurlijk mogelijk zou kunnen verlopen en ook: in welke zin geïntegreerd leren daaraan zou kunnen bijdragen.

In de eerste plaats sprak mij vooral het voorbeeld aan dat Freudenthal zelf voorleefde, in de zin dat hij het leren van kinderen tot in de kleinste details serieus nam. Internationaal befaamd door publicaties op het gebied van de hogere wiskunde zoals de topologie, zag hij de wiskunde en bijbehorende didactiek voor jonge kinderen absoluut niet als iets van een lagere orde.

Typerend voor zijn werk vind ik de nadruk die hij legt op de *vanzelfsprekendheid* die het wiskunde leren van kinderen zou moeten karakteriseren, een eenvoudig begrip dat ik in latere publicaties van hem ook aantref; anders dan het containerbegrip *natuurlijk leren* raakt het de kern van de zaak. Juist ook in die zin verschaftte het artikel mij nieuwe inzichten: geïntegreerd leren kan bijdragen aan vanzelfsprekend leren van wiskunde, voor kinderen en (aanstaande) leraren. Het inspireerde mij om te zoeken naar wiskunde in de krant, in kinderboeken, in de straat of op de markt en ik stimuleerde studenten hetzelfde te doen.

Mijn interesse voor geïntegreerd leren groeide en ik omarmde de voorspelling die Freudenthal deed ter gelegenheid van zijn afscheid als hoogleraar-directeur van het IOWO in 1976:

Er is geen wiskundeonderwijs meer in 2000, het is verdwenen. Er is geen vak meer, wiskunde geheten, geen wiskundeles op het rooster, geen wiskundeboekje om te onderwijzen. Zeg niet: 'De advocaat van de duivel.'

Ik ben de duivel zelf. Als ik terugkijk op mijn activiteit bij het IOWO en u vraagt me wat ik denk dat mijn belangrijkste bijdrage was, dan zeg ik: hun met mijn gezag als wiskundige garanderen dat hetgeen zij aan het ontwikkelen waren, echte wiskunde is, dat om jezelf als wiskundige waar te maken, je geen minderwaardigheidscomplexen bij anderen hoeft te kweken door middel van verzamelingenleer, propositie-calculus, groepentheorie, vectorruimten en andere hoogdravende onverteerde theorie, dat je wiskunde overal kunt ontdekken, met je blote oog en met het gezond verstand, dat het kenmerk van wiskunde is, zo voor zichzelf te spreken, dat je je niet hoeft uit te sloven om anderen ervan te overtuigen dat het waard is om te kennen, te leren, te onderwijzen. Dit is nu het soort wiskunde dat we in Wiskobas zijn begonnen en dat Wiskivon gaat voortzetten. Mijn bescheiden verdienste is het geweest het af te stempelen als echte wiskunde.

Als wiskunde is het zo echt en zo overtuigend dat ik er zeker van ben dat het in de toekomst wordt onderwezen. Maar tegelijkertijd en om dezelfde reden is het de soort die je niet als losstaand vak kunt onderwijzen. Het is er om beleefd en uitgeleefd te worden, net als lezen, schrijven, knutselen, tekenen, zingen, ademhalen, in een geïntegreerd onderwijs. In 't algemeen vormend onderwijs zal er in 2000 meer wiskunde worden opgedaan dan ooit tevoren, al zal het niet als afzonderlijk vak onderwezen worden - tenzij op hogere leeftijden, in gespecialiseerd onderwijs.  
(Freudenthal, 1976, pag. 294)

Door latere publicaties (Treffers, 1978; De Lange, 1979; Freudenthal, 1983; Gravemeijer, 1994) werd ik mij bewust van de eenzijdige component van het voorname-lijk horizontaal mathematiseren in geïntegreerd onderwijs; niettemin verschaft Freudenthal mij met zijn artikel in 'Willem Bartjens' in 1982 een waardevolle impuls op een geschikt moment. In de jaren daarna werden door de ontwikkelaars allengs meer doordachte pakketten ontworpen ten behoeve van rijke leeromgevingen voor kinderen, ik denk in het bijzonder aan de situaties die in samenspraak met kinderen werden ontwikkeld (Ter Heege, 1985; Van den Brink, 1989; Goffree, 1993). Juist de inbreng van de kinderen zelf geeft aanleiding voor vanzelfsprekend leren.

### 3 Observeren, reflecteren, mathematiseren en didactiseren

Met mijn keuze voor dit viertal als derde voorbeeld om de karakteristieke trekken te achterhalen van de invloed die Freudenthal op mij heeft gehad, maak ik een sprong in de tijd naar de jaren negentig en daarna. Laat ik beginnen met het onderwerp dat gaandeweg voor mij favoriet is geworden: reflecteren. In mijn beleving is de basis daar-

voor gelegd in de landelijk werkgroep OGLO.<sup>2</sup> Voor het eerst in mijn loopbaan proefde ik toen hoe het verder dóórdenken en schrijven over de discussies in de groep vruchten afwierp voor mijn eigen voortgang in het denken over de materie - de didactiek van de negatieve getallen - waarmee we bezig waren. Gesterkt door die eigen ervaring kon ik studenten daarna gemakkelijker warm maken voor het reflecteren, juist door het perspectief van het 'vooruit denken via het terugblikken'. Toch was ik aanvankelijk nog niet bij machte om alle studenten, maar ook collega's, voldoende te overtuigen van de cruciale rol van het reflecteren in het leren (en onderwijzen). Was het inderdaad niet de zoveelste modegril van - vooral - onderwijskundigen? Oude wijn in nieuwe zakken? Was reflecteren niet gewoon een synoniem voor 'nadenken'? Het waren juist die vragen en twijfels die ik herkende in de verhalen en publicaties van Freudenthal over zijn eigen denk- en leerproces met betrekking tot het fenomeen reflecteren. Zo reflecteert hij in 'China Lectures' over zijn worsteling met het concept reflecteren als hij terugdenkt aan het voorbereiden van een paper in 1979 over 'Bewijzen in het wiskundeonderwijs' voor een conferentie in Klagenfurt:

With a view on the evidence now available, I would describe my state of mind at the time I set out my paper as reflecting more consciously than ever before on the idea of reflecting, and more precisely, on how reflective thinking develops. At that time (1979), while wrestling with the problem of how proving arises, I felt for the first time the need for a more compact term for thinking about one's own (and other people's) thinking, and when I hit on 'reflection' I realised it was not as colourless as I had thought before. If I now use the term, there is an undertone of physics in it: reflecting as mirrors do, mirroring (...).

So from mirroring oneself in someone else follows - as the night the day - the mirroring of oneself in one's own person, that is introspection. It becomes reflecting on oneself, on what one did, felt, imagined, thought, on what one is doing, feeling, imagining, thinking. Reflecting, once started, is an activity we perform every moment, in order to determine our course of action, yet, as a mental exercise, it can become an aim itself. (Freudenthal, 1991, pag.104).

Sindsdien beschouwt Freudenthal het reflecteren als 'de krachtige motor van de wiskundige inventie' en geleid heruitvinden betekent dan dat de 'leider' reflectief denken uitlokt. Tijdens een gedachtenwisseling met hem over geleid heruitvinden, op een zonnig terras in Boedapest samen met H. Meijer en H. Jansen tijdens de ICME VI in 1988, illustreerde hij zijn opvatting nog eens met zijn uitgekende voorbeeld van de elkaar middendoor delende diagonalen van een parallellogram.

Ik vertel het enigszins door mij aangepaste verhaal in twee delen, om te laten zien hoe ik het nadien gebruikte om mijn studenten bewust te laten worden van drie zaken: wat geleid (her)ontdekken is, welke rol reflecteren

daarbij speelt en ten derde het belang van observatie en reflectie gekoppeld aan het stellen van kernvragen, als middel om in de hoofden van wiskunde lerende kinderen te kijken.

Het verhaal<sup>3</sup> begint met een vraag:

Waarom delen de diagonalen van een parallellogram elkaar middendoor? Natuurlijk kun je die eigenschap bewijzen met behulp van stellingen over congruentie van driehoeken, maar dat is niet het soort antwoord dat verwacht wordt. Vrijwel iedereen zal zich bewust zijn van deze eigenschap vóór hij of zij enig idee had van meetkunde. De vraag is *hoe* je het wist. Wat was de bron van die kennis?

Na zoveel jaren wiskunde(les) zul je er niet in slagen het op te roepen, 'tenzij je verandert en wordt als een jong kind'.

Hier onderbreek ik het verhaal van zo-even om de lezer uit te dagen het probleem 'als een jong kind' te benaderen. Schroom niet om er papier en een schaar bij te pakken, maar 'mentaal handelen' kan uiteraard ook die 'verheffing' tot kinderlijk handelen en denken verbeelden. Lees hierna hoe Freudenthal zijn verhaal vervolgt:

Zo'n verandering - 'worden als een jong kind' (wo) - vereist een grotere krachtsinspanning dan de meeste mensen er aan wensen te besteden; het is veel gemakkelijker om kleuters te observeren die aan het spelen zijn met bijvoorbeeld een verzameling mozaïektegels. Zij weten door het te draaien dat elk parallellogram weer in zijn eigen hol past en daarmee wordt 'de stelling bewezen'; inderdaad, door die draaiing worden beide diagonalen ook rondgedraaid, terwijl hun snijpunt gefixeerd blijft.

Probeer het experiment uit met een jong kind! Teken een parallellogram met zijn diagonalen. Laat het kind eigenschappen van de figuur ontdekken en maak als het noodzakelijk is de weg vrij voor de speciale eigenschap die je in gedachten hebt: de diagonalen delen elkaar middendoor. Vraag: 'Waarom denk je dat ze dat doen?' 'Omdat ik het kan zien.' 'Hoe zie je het?' Blijf aandringen op een antwoord. Afhankelijk van de leeftijd van het kind, zul je eventueel een antwoord krijgen dat op die leeftijd kan worden beschouwd als een valide bewijs, verkregen door 'idee-zoeken',<sup>4</sup> reflecteren dus.

Wat me treft in deze 'narrative' en vele andere verhalen van Freudenthal zijn de verbanden die hij legt tussen observeren, reflecteren, mathematiseren en didactiseren. Juist het beeld van deze samenhang heeft me geholpen meer grip te krijgen op de relatie tussen de theorie en de praktijk van het reken-wiskundeonderwijs.

## 4 De verbeelding van het denken

### Het huwelijk tussen theorie en praktijk

Al in mijn eigen 'kweekschooltijd' (1957-1960) kreeg ik belangstelling voor de theorie-praktijk problematiek in

het onderwijs. In het bijzonder waren het de ideeën van de pedagoog en filosoof Dewey (1859-1952) die tot mijn verbeelding spraken en wel zodanig dat ik zijn werk tot afstudeeronderwerp van de 'akte volledig bevoegd onderwijzer' (voorheen hoofdakte) maakte. Zijn gedachten over samenwerken, sociale interactie en integratie van theorie en praktijk zag ik als cruciale tegenhangers van het - zeker in die tijd - overheersende 'éénrichtingsverkeer' tussen leraar en leerlingen. In zekere zin zie ik Dewey's ideeën als wegbereiders van de leer- en onderwijsprincipes van het realistisch reken-wiskundeonderwijs. Opvoeden gebeurt volgens Dewey (1933) door het creëren van een juiste omgeving die uitlokt tot handelen. In school kunnen kinderen, door samen te werken met andere kinderen en met volwassenen, leren hoe zich de cultuur heeft ontwikkeld, hoe uitvindingen tot stand zijn gekomen en zo meer. In kort bestek kunnen kinderen deze ontwikkelingsgang zelf nog eens doormaken. Het is een idee dat gelijkenis vertoont met Freudenthals *guided reinvention*-principe; juist door die gelijkenis heb ik het werk van Freudenthal en zijn team waarschijnlijk ook ervaren als een geschenk uit de hemel op het goede moment en kregen de ideeën die Dewey aandroeg voor mij handen en voeten. Freudenthal zag de theorie-praktijk relatie vooral vanuit de niveautheorie<sup>5</sup> van Van Hiele; hij noemt het echtpaar Van Hiele-Geldof, met wie hij bevriend was, zelfs de belichaming van het huwelijk tussen theorie en praktijk. Hij formuleerde zijn eigen, meer uitgebreide interpretatie van de niveautheorie, zowel wat betreft de leerstofgebieden als de concepten (leerniveaus, praktijk, theorie). Zoals ik zijn werk nu begrijp, interpreteer ik zijn opvatting van het begrip 'praktijk' als ingevuld door horizontaal mathematiseren en didactiseren, het begrip 'theorie' - of liever 'theoretiseren' - kan dan worden geduid met verticaal mathematiseren en didactiseren. Als geen ander is Freudenthal het voorbeeld van iemand bij wie theorievormingsprocessen werden gevoed door de praktijk en omgekeerd. Met verhalen uit de praktijk probeert hij essentiële elementen uit de theorie onder de aandacht te brengen; zoals ik in de paragraaf hiervoor schets, komt de relatie tussen theorie en praktijk tot uitdrukking in de samenhang tussen observeren, reflecteren, mathematiseren en didactiseren. Freudenthal vond dat je theorieën niet kunt doorzien aan de hypothesen en stellingen, maar aan concrete voorbeelden: de verbeelding van het denken over wiskunde leren, daar gaat het bij hem om.

De vier voorbeelden die ik heb uitgekozen om wat gewaar te worden van de invloed die Freudenthal heeft gehad op mijn professionele werk, tonen het bewust worden van die verbeelding op verschillende niveaus. Het eerste voorbeeld 'isomorfie in 1971', laat zien dat het denken over tot dan toe voor mij abstracte wiskundige begrippen als 'isomorfie', uit zijn geïsoleerde formele vorm werd verdreven door het verbeelden van dat begrip in voor zelfs kinderen bevattelijke contexten, schema's

en modellen. Die verbeelding van het denken vindt vooral plaats door een uitgekiend spel van 'weglaten' (decontextualiseren) en 'toevoegen' (schema's en modellen) van zaken.

Het tweede voorbeeld gaat dieper in op het leren van kinderen. Het voorbeeld toont de invloed die Freudenthals ideeën over vanzelfsprekend, geïntegreerd leren van wiskunde hebben gehad op mijn denken, ideeën die onder andere zijn uitgewerkt in de 'wereldjes van Wiskobas'.

Met het derde en vierde voorbeeld probeer ik te illustreren hoe Freudenthals verbeelding van het denken over de samenhang tussen observeren, reflecteren, mathematiseren en didactiseren, mij op het spoor heeft gezet van betekenisvol denken over de theorie-praktijk problematiek van het reken-wiskundeonderwijs. Waar zich de invloed in de twee eerste voorbeelden vooral manifesteert als het - vrijwel direct - toepassen van ideeën, gaat het in de twee laatste voorbeelden veel meer om een verandering van houding en wijze van denken.

Ongetwijfeld zal Freudenthal nog veel meer met me gaan doen ...

## Noten

- 1 De titel van het boekje luidt: *Aktionslässe situationsorientierte Lernangebote für Fünfjährige (2)*.
- 2 OGLO staat voor Ontwikkelgroep Leraren Opleiding; deelnemende ontwikkelaars waren opleiders van VO, Pabo, NLO, ULO en MO-opleidingen. De groep stond onder leiding van F. Goffree, eindproduct was het boek 'Tegengesteld, wiskundendidactiek op de grens van basis- en voortgezet onderwijs, toegespitst op negatieve getallen.'
- 3 Zie: Freudenthal (1991), pag.100.
- 4 Ik ben er niet zeker van of 'idee-zoeken' een goede vertaling is van *thought-searching* (Freudenthal 1991, pag.100).
- 5 De niveautheorie beschrijft niveaus in het leerproces van leerlingen (Van Hiele, 1973; Freudenthal, 1991).

*Why and how was my professional work so strongly influenced by Freudenthal, as teacher in elementary, secondary and higher education and now still in my work as a researcher? How to characterise that influence? I would like to respond to those questions with some examples. Hopefully these will wash, because: 'It needs less efforts to provide the learner with innumerable examples than to search the one and only - paradigmatic - example that makes the difference'. (Freudenthal, 1984. p. 102).*

*With four examples I will try to illustrate how Freudenthal's imaginative thinking stimulated my own thinking on several levels.*

### ***Walking with Bastiaan***

Bastiaan is 5 years and 4 months old (5,4). Walking along a river. He found a beautiful thin wooden plank. All of a sudden he asks: 'If I throw it into the water, will it tilt?' I let him try it on the path, but before announcing the conclusion he throws the plank into the water and states that it is floating on its flat side. Numerous queries on floating and sinking follow: why some tree was covered by the water, why iron ships are better than wooden ones, why a bottle will sink.

*(Educational Studies in Mathematics, 8, 1977, 4)*

## Literatuur

- Brink, F.J. van den (1989). *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen*. Utrecht: OW&OC, Universiteit Utrecht (proefschrift).
- Dewey, J. (1933). *How we think*. Buffalo/New York: Prometheus books.
- Freudenthal, H. (1976). Wiskunde-onderwijs anno 2000. *Euclides*, 52(8), 294.
- Freudenthal, H. & F. Oort (1977). Erepromotie. Rede uitgesproken ter gelegenheid van het verlenen van een eredoctoraat aan Prof. Dr. H. Freudenthal, 10 januari 1977. *Euclides*, 52(9).
- Freudenthal, H. (1982). Wiskundig didactische doordenkingen. *Willem Bartjens*, 1(3), 132.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1984). *Appels en Peren. Wiskunde en Psychologie*. Apeldoorn: Walraven.
- Freudenthal, H. (1987). Theorievorming bij het wiskundeonderwijs. Geraamte en gereedschap. *Tijdschrift voor nascholung en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 5(3).
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.
- Goffree, F. & K. Buys (red.). (1989). *Tegengesteld*. Baarn: Bekadidact.
- Goffree, F. (1993). *Kleuterwiskunde*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht, Freudenthal Instituut (proefschrift).
- Heege, H. ter (1985). Tweemaal twee voorbeelden van 'realiteit'. *Willem Bartjens*, 5(1), 12-15.
- Lange, J. de (1979). Contextuele problemen. *Euclides*, 55, 50-60.
- Loonstra, F. (1963). *Inleiding tot de Algebra*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht*. Utrecht: IOWO (proefschrift).