Hoe kinderen kommagetallen kennen
- enige reflecties op de 'Proeve ...', deel 3B -

W. Vermeulen
Bekadidact, Utrecht

1 Inleiding

Een van de kernvragen waarop de 'Proeve... , deel 3B Kommagetallen' ingaat, is hoe het inzicht in betekenis en gebruik van kommagetallen bij kinderen te ontwikkelen. De onderwijsontwikkeling die in de 'Proeve...' wordt beschreven, spitst zich toe op schattend rekenen en hoofdrekenen met kommagetallen, ter ondersteuning van vermenigvuldig- en deelproblemen aan de hand van prijsstickers. Uiteraard benadrukken de auteurs dat ontwikkeling van het (komma)getalbegrip hieraan voorafgaat. Daarbij wordt zowel verwezen naar praktijksituaties als naar de aanpakken in moderne realistische reken-wiskundemethoden.
In deze methoden vindt de eerste kennismaking met kommagetallen plaats door situaties uit het dagelijks leven te bespreken, zoals geld, prijsaanduidingen, lengtematen, gewichten, temperatuur, afrondingen bij het werken met grote getallen (15,6 miljoen inwoners).
De overeenkomst van deze situaties is hun verschijningsvorm als kommagetal, maar er zijn ook wel degelijk verschillen, waaraan niet zonder meer voorbij moet worden gegaan.

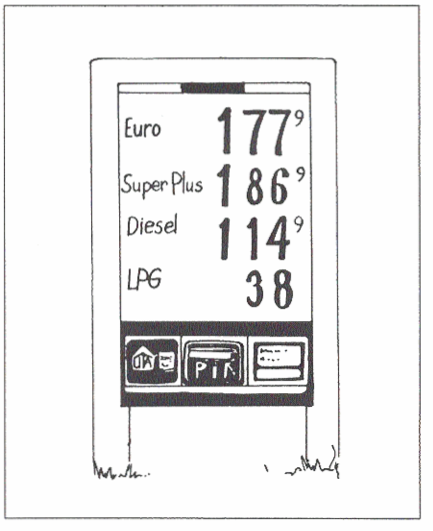
2 Geld als invalshoek

Geld is een veelgebruikte invalshoek, omdat geldnotaties bekend zijn van het geldrekenen en omdat het in de dagelijkse praktijk veel voorkomt. Kinderen brengen de kommanotatie gemakkelijk met geld in verband.

> Ik vraag Evert (tien jaar, groep 6), of hij weleens getallen met een komma erin ziet. Na enig nadenken komt hij met het voorbeeld van prijsaanduidingen. 'Maar', zegt hij, 'daar staat ook vaak een punt.'
> Op mijn vraag wat die komma, of punt betekent, zegt hij: 'voor de komma staan de guldens, en daarachter de dubbeltjes en centen.'

Hiermee geeft Evert het specifieke karakter van de geldnotatie aan: de komma staat altijd op een vaste plaats. Hij scheidt de guldens van de dubbeltjes en centen, en dit blokkeert het redeneren met de keuze van maateenheid. Bovendien staan er altijd twee cijfers achter de komma; de keuze van mate van verfijning blijft buiten beeld. Men kan zich afvragen of hier van een echt kommagetal sprake is.
Toch zijn er mogelijkheden om vanuit de voor de kinderen zo bekende geldnotatie door te dringen tot wezenlijke aspecten van de kommagetallen: de keuze van de eenheid en de wijze en mate van verfijning.

> Ik laat Evert een plaatje zien van prijsaanduidingen bij een benzinestation (fig.1).
> Hij herkent het plaatje onmiddellijk als prijzenbord bij benzinestations, maar heeft nooit zo nauwkeurig op de notatiewijze gelet. Wel weet hij: 'als je tankt, gaat er een metertje op de benzinepomp ronddraaien. Daarop kun je zien hoeveel liter je al getankt hebt, en voor hoeveel geld.'



figuur 1: uit: 'Proeve ...', 3B, 133

Dit verschijnsel moeten kinderen gezien hebben, om de liter-prijsverhouding zinvol te kunnen bespreken. Uiteraard biedt het interessante mogelijkheden bij het redeneren met maten. In de klas zou de situatie nagebootst kunnen worden door middel van het gebruik van de constante factor op de zakrekenmachine: één leerling houdt de benzinetoename bij, de ander parallel daarmee de prijstoename; steeds drukken beide tegelijkertijd op de '='-toets. Ter reflectie kan de relatie in een grafiek worden uitgezet. Hiermee worden verschillende aspecten van kommagetal, verhouding en verandering aan de orde gesteld.

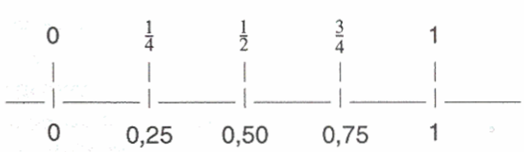
Ik wijs Evert nog eens op het bord met de prijsaanduiding: 'Wat zou dat betekenen?'
Zijn eerste reactie: 'Honderdzevenenzeventig gulden en negen dubbeltjes.'
Ik: 'Vind je dat niet duur voor één liter benzine?'
Hij reageert: 'Oh, zijn het liters!'
Na enig nadenken: 'Honderdzevenenzeventig cent. Maar die kleine negen snap ik niet.'
Ik: 'Als je de volgende dag weer langs het bord komt, staat er (ik noteer): 178^1. Wat zou er gebeurd zijn?'
Evert: 'Het is een cent duurder geworden.'
Ik: 'Maar waarom staat die kleine één er dan?'
Hierop moet Evert het antwoord schuldig blijven.

Het beeld van de vaste posities van dubbeltjes en centen is blijkbaar zo dominant, dat het moeilijk voorstelbaar is dat je de maat zou kunnen verfijnen naar tienden van centen. Dit kan wel achteraf, zoals in de 'Proeve...' gebeurt, nadat met andere maten de mogelijkheden van voortgaande verfijning zijn verkend. Geld vormt hiervoor niet zo'n geschikte ingang.
Toch kan het redeneren met de geldnotatie wel een aanknopingspunt bieden voor het denken over de betekenis van het getal achter de komma.

Ik laat Evert een rijksdaalder zien.
Hij herkent het geldstuk onmiddellijk: 'Dat is twee gulden vijftig, krijg ik elke week als zakgeld.'
Ik vraag hem vervolgens het muntstuk goed te bekijken. Wat staat er op? Niet lang daarna heeft hij aan de muntzijde de volgende notatie gezien:

$$2\frac{1}{2}$$

Als naar de betekenis van de '$\frac{1}{2}$' wordt gevraagd, constateert Evert vlot dat het twee gulden en nog een halve gulden is. Het omzetten van een halve gulden naar vijftig cent is geen probleem, en daardoor kost het geen moeite om de gelijkwaardigheid van $2\frac{1}{2}$ en 2,50 te laten constateren.
Of, zoals Evert het verwoordt: 'Het zit precies tussen twee en drie gulden in.'
Een stapje verder gaat vervolgens het verklaren van de term: 'kwartje': 'Waarom heet dat zo?'
Met enige hulp wordt gevonden dat het een 'kwart gulden', of éénvierde gulden is, er gaan immers vier kwartjes in één gulden. De notatie van het kwartje als 0,25 wordt vervolgens gevisualiseerd met behulp van de getallenlijn (fig.2).



figuur 2

Het redeneren met geld helpt om de eenvoudige breuken te verbinden met kommagetallen, door te redeneren met 'kwartjes' en 'centen'. Maar nog steeds geldt hier dat de vaste positie van de munteenheden bij de geldnotatie kan hinderen bij het leggen van flexibeler relaties tussen breuk en kommagetal.

3 Redeneren met maten

Voor een goed begrip van de betekenis van de komma, is het redeneren in een ander matenstelsel bevorderlijk. Denk aan de lengtematen, waarbij je een verschillend standpunt kunt innemen bij de keuze van de meeteenheid. Bijvoorbeeld: grote afstanden weergeven in kilometers, en wanneer het op precisie in een klein vlak aankomt, overstappen naar millimeters. Zulke ervaringen moeten kinderen wel opdoen. Ook dan moeten redeneringen bewust worden gemaakt.

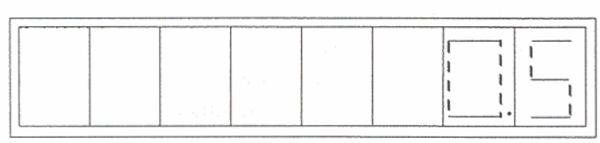
Vader Marc heeft voor zijn verjaardag een fietskilometerteller gekregen. Als hij van een tocht terug keert, kijkt zoon Joep mee op de teller:

12.45

Vader: 'Hoe ver heb ik nu gefietst?'
Joep: 'Twaalf kilometer en vijfenveertig meter.'

Het omzetten van de getallen achter de komma (of punt) naar tienden en honderdsten van de gekozen eenheid gaat niet vanzelf. De interferentie met de gehele getallen kan een belangrijke rol spelen. De betekenis van de posities na de komma, en de nulproblematiek moeten nadrukkelijk onder de aandacht worden gebracht. Dat laatste kan gebeuren in het kader van het werken met de zakrekenmachine.

Evert telt op de rekenmachine 'twee kwartjes' bij elkaar op (0.25 + 0.25 =). Hij is verrast bij het zien van het resultaat (fig.3).
'Er is een nul weg', constateert hij, 'het moet zijn: nul punt vijftig cent.' Hij toetst dat bedrag rechtstreeks in op de rekenmachine. Nu lukt het wel!
Daarop probeert hij het nog eens via 0.25 + 0.25, maar de rekenmachine is hardnekkig en geeft wederom: 0.5 in het venster.
'Waarom doet hij dat?', vraagt Evert.



figuur 3

Bij geldbedragen is de toevoeging van de laatste nul functioneel; het geeft aan dat er geen centen in het bedrag zijn, maar de positie blijft voor die eenheid gereserveerd. De eenvoudige rekenmachine laat alle achterste nullen in kommagetallen (op de rekenmachine spreken we overigen van puntgetallen) weg, en dit vraagt om een nadere verklaring. Dit kan in het kader van geldbedragen worden gegeven door de posities te benoemen: guldens, dubbeltjes en centen. Als er geen centen zijn, volstaat de rekenmachine als het ware met: vijf dubbeltjes. Evert knikt dat hij dit begrijpt, maar merkwaardig blijft het volgens hem wel. En dat is het natuurlijk ook. De rekenmachine vraagt in feite om af te zien van zo'n concrete situatie als het denken in geldbedragen, en de getallen op zich te beschouwen. Dit vereist een hoger niveau van beschouwing van getallen in een relatienetwerk.

4 Overdenken van kommaverschijnselen

Men kan zich afvragen of kinderen in de basisschool zich een beeld kunnen vormen van de betekenis van de voortgaande verfijning en de relatie met de posities achter de komma. Het idee van 'voortgaande verfijning' is doorgaans niet zo moeilijk op te roepen, en het lijkt de kinderen ook te fascineren:

> Ik vraag Evert welke getallen er tussen nul en één passen. Eerst zegt hij: 'Geen', maar na even denken komt hij los: 'een half, een kwart, één derde, één zesde, één achtste...' Al gauw merkt Evert op dat je zo maar door kunt gaan, want je kunt steeds fijner verdelen.

Bij deze situatie zijn de kinderen in eerste instantie geneigd om in termen van breuken te denken. Deze hebben een concreet aanknopingspunt in het steeds fijner verdelen. Bij de kommagetallen is dat niet zo eenvoudig voor te stellen. Het gebruik van de zakrekenmachine kan kinderen als het ware dwingen om in die getalsoort te gaan redeneren. Het 'Rekenmachinespel: steeds dichter bij elkaar' van Van den Brink, dat in de 'Proeve...' deel 3B uitgebreid wordt beschreven, biedt een mogelijkheid om kinderen zich de voortgaande verfijning te doen realiseren. Bij dit spel hebben twee kinderen elk een rekenmachine. Het ene kind begint bij tien, en mag van daaruit alleen optellen, het andere kind start bij twintig, en mag alleen aftrekken. Maar ze mogen elkaar niet ontmoeten of passeren; wie dat het eerste doet, heeft verloren. Op een gegeven moment komt het probleem dat je nog maar één van elkaar verwijderd bent. Kan het spel toch verder? Als de kinderen eenmaal op het idee zijn gekomen om met halven, kwarten, enzovoort te gaan werken, en weten dat je dit op de rekenmachine als puntgetal intoetst, dan volgt al snel het inzicht dat het almaar door kan gaan (hoewel het op de rekenmachine met zijn zeven posities na de punt, toch tot een einde komt). Maar ook kunnen kinderen meer spontaan tot de ontdekking van de voortgaande verfijning van kommagetallen komen.

> Marc (negen jaar) maakt sommen met de rekenmachine. Op een gegeven moment ontdekt hij het deelteken. Zoals veel kinderen toetst hij eerst opgaven in, die hij al kent, zoals $8 \div 2 =$, of $9 \div 3 =$. Op zeker moment toetst hij per ongeluk $5 \div 15 =$ in, in plaats van de beoogde $15 \div 5 =$ Hij is zeer verrast bij het zien van het venstergetal (fig.4).
> 'Moet je kijken, wat een gek getal!', is zijn commentaar. Op mijn vraag wat er is gebeurd, antwoordt hij dat hij vijftien gedeeld door drie uit wilde rekenen, maar de machine kwam met het bovenstaande antwoord. 'Dat is toch veel te groot', zegt hij. Pas als ik vraag het getal eens over te schrijven ontdekt hij dat het met een nul en een punt begint. Dat maakt het raadsel groter. Op mijn vraag of hij weleens getallen met een nul en een punt heeft gezien, komt het bekende antwoord: 'geld', maar, voegt Marc toe, 'daar staan altijd twee getallen (bedoeld wordt: cijfers) achter.'
> In samenspraak komen we uiteindelijk op het idee om na de tweede 3 van cent hele kleine centen, en nog kleinere centen te bedenken. Maar het is moeilijk om aan het waarom van die verfijning een goede reden te geven.

0.	3	3	3	3	3	3	3

De machine komt in dit domein pas goed tot zijn recht als kinderen meer vertrouwd zijn met breuken, andere maten en de 'vertaling' in kommagetallen. Zo leidt de vraag om één derde op de rekenmachine te zetten in eerste instantie tot verwondering. Er staan immers geen breuken op de rekenmachine-knopjes. Wanneer de breuk als deling kan worden opgevat en ingetoetst, ziet men de herkenning ontstaan: $\frac{1}{2}$ via $1 \div 2 =$ op de rekenmachine naar 0.5. Dan gaan kinderen ook verder zoeken. Verschijnselen op de rekenmachine kunnen pas verklaard worden, als de kinderen al een netwerk van relaties hebben ontwikkeld.

5 Slotbeschouwing

Aan het werken met kommagetallen zijn veel aspecten te onderkennen; de 'Proeve... deel 3B' geeft een uitgebreid overzicht. Het goed plaatsen van en redeneren met kommagetallen veronderstelt een gedegen begripsvorming, die steunt op:

- inzicht in het maatstelsel, de keuze van eenheid en de verfijning daarvan;
- betekenis geven aan opeenvolgende posities in een getal;
- een idee van de relatie tussen breuk en kommagetal.

In dit artikel is een aantal bronnen voor deze aspecten aan de orde gekomen. Het blijkt dat geld als bron een dominante plaats heeft, maar tevens dat dit de voortgaande ontwikkeling van het kommagetal-begrip kan bemoeilijken. Het kan daarom nuttig zijn om op andere verschijnselen in te gaan die tot verwondering leiden, en om een nadere verklaring vragen. De zakrekenmachine kan als didactisch middel een functie hebben, maar moet beslist niet in een vroegtijdig stadium worden ingezet. De rekenmachine toont wel verschijnselen, maar niet de verklaring ervan. Juist bij een gebied als de kommagetallen veronderstelt het gebruik van de rekenmachine een stevig verankerd inzicht.