Een aanzienlijk deel van de problemen die leerlingen in HAVO en VWO hebben bij het werken met algebraïsche expressies wordt veroorzaakt door te geringe aandacht voor de breuken, betogen **Truus Dekker** en **Martin Kindt**. Het belang van een doorlopende leerlijn breuken, van basisonderwijs naar voortgezet onderwijs, wordt met een aantal voorbeelden toegelicht.

Wat doen we (niet) met breuken?

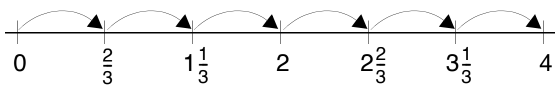
Tijdens een logeerpartij worden er twee pizza's gegeten. Paulien (9) zegt: 'Die meneer van de pizza's heeft ze in zessen gesneden. We hebben samen vijf zesden (of zei ze vijf 'zessen'?) van een pizza gegeten. Want, kijk maar, jij hebt een halve op en ik heb van de andere pizza twee stukken van de helft op. En die halve, dat zijn drie 'zessen' stukken.' Nee, Paulien heeft nog geen breuken geleerd op school: '*Dat kunnen wij nog niet, zegt de juf, dat leren we volgend jaar*.'
Paulien is bezig met echte breuken. Veel jonge kinderen gebruiken al 'breukentaal'; ik ben zes-en-een-half, ik wil nu een halve boterham, ik wil wel de helft van die halve appel, ... In sommige gezinnen moet de verdeler het laatste stukje nemen. De rest mag eerst kiezen. De verdeler zorgt dan wel voor redelijk gelijke stukken.
De breuken zijn deel van iets benoemds, op dezelfde manier als tellen begint met vijf knikkers, twee hapjes, drie jaar. Paulien kon nog geen $\frac{5}{6}$ schrijven, maar bedacht zelf wat vijf zesden zijn wanneer je vijf stukken van iets dat in zessen gedeeld is, opgegeten hebt. Informeel optellen van breuken deed ze ook, al heeft ze in de verste verte geen idee wat gelijknamige breuken zijn. Het op een natuurlijke manier ontwikkelen van een breukentaal geeft haar een basis om straks op voort te bouwen. Gebeurt het systematisch ontwikkelen van een breukentaal inderdaad op de basisschool? We weten dat niet zeker, maar het zou wel moeten.

Breuken bewerken op de basisschool

Wat gebeurt er op de basisschool bij het leren van eigenschappen van en bewerkingen met breuken?

In het pas verschenen boek *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen*[1], bestemd voor de bovenbouw van de basisschool, wordt 'met enige aarzeling' een globale leerlijn breuken voor de basisschool vermeld. Met enige aarzeling omdat breuken, decimale getallen, procenten en verhoudingen een grote onderlinge samenhang vertonen en de betreffende leerlijnen dus niet als op zichzelf staand moeten worden opgevat. Hiernaast volgt een samenvatting:

- Ontwikkelen van een breukentaal: een *half* brood, een *kwart* appel, een *zesde* deel van een banketstaaf; een strook die in vieren gevouwen is en waarvan *driekwart* gekleurd is.
- Beredeneerd verdelen; hoe verdelen we die in zessen verdeelde pizza onder drie personen; onderzoek van de relaties tussen delen in zessen, in drieën en halveren. Hoe vaak past een zesde deel van de banketstaaf op een halve?
- Operaties uitvoeren. Beredeneerd optellen en aftrekken bouwt voort op beredeneerd gelijknamig maken. Hoeveel van de pizza hebben we samen opgegeten?
- 'Deel van' relateren aan een vermenigvuldiging, $\frac{2}{3}$ deel van 4500 kun je schrijven als $\frac{2}{3} \times 4500$. (Die overgang van 'deel van' naar 'vermenigvuldigen met' blijkt een hele lastige, ook voor leerlingen in het voortgezet onderwijs!)
- Aanzetten tot het ontwikkelen van routinematige procedures. Bij 5 gedeeld door $\frac{1}{2}$ kun je denken aan vijf liter tomatensaus die je verdeelt over flesjes van een halve liter. Of bij 4 gedeeld door $\frac{2}{3}$ kun je aan sprongen van $\frac{2}{3}$ op een getallenlijn denken. Hoeveel sprongen is het tot 4?

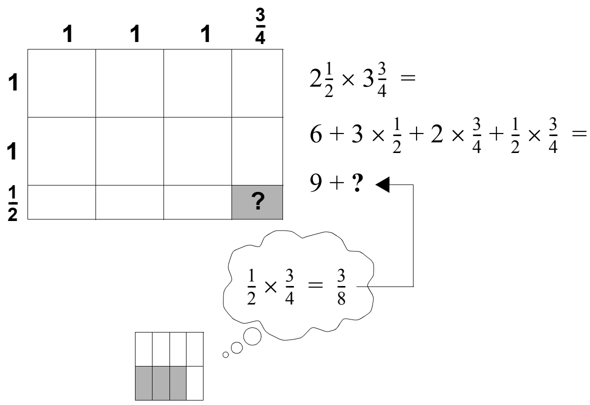


Veel breukenopgaven worden ingekleed gegeven; bij een niet ingeklede berekening kan een leerling zelf een context bedenken als hulp. Leerlingen gebruiken in het algemeen verschillende modellen zoals de cirkelschijf (naar smaak pizza of taart), de getallenlijn, een verhoudingstabel, het rechthoeksmodel. Ook wordt er wel 'handig' geredeneerd. Als voorbeeld van een reken-redeneeroplossing laat het genoemde boek zien hoe de opgave $2\frac{1}{2} \times 3\frac{3}{4}$ zou kunnen worden aangepakt: .

$2\frac{1}{2}$ is hetzelfde als $5 \times \frac{1}{2}$

$3\frac{3}{4}$ is hetzelfde als $15 \times \frac{1}{4}$

$$2\frac{1}{2} \times 3\frac{3}{4} = 5 \times \frac{1}{2} \times 15 \times \frac{1}{4} = 75 \times \frac{1}{8} = 9\frac{3}{8}$$



Het kan ook met de oppervlakte van een tegelvloertje met verfijning van de tegeltjes.

Overigens geldt wat hier over vermenigvuldigen van zulke 'gemengde' breuken wordt beschreven voor de betere rekenaars. Want, zo meldt het boek op bladzijde 135:

> Een som (bedoeld wordt natuurlijk 'opgave') als $2\frac{1}{2} \times 3\frac{3}{4}$ hoort wat ons betreft niet tot de kerndoelen van het rekenonderwijs op de basisschool, in ieder geval niet in zijn kale, formele vorm. Toch zijn er genoeg kinderen die dergelijke sommen ook op dat formele niveau aankunnen.

Vooral na groep zes van de basisschool zal er vaak een zekere differentiatie plaatsvinden; niet alle kinderen komen even ver in het vak rekenen. En wat er aan breuken 'gedaan' wordt, hangt natuurlijk ook af van de docent die voor een beperkte lestijd beslissingen moet nemen over het belang van allerlei onderwerpen uit het reken-wiskundeonderwijs. De kerndoelen voor het basisonderwijs laten wat de breuken betreft in ieder geval genoeg ruimte voor verschillende interpretaties, want daarin staat (kerndoel 26):

> de leerlingen leren structuur en samenhang van aantallen, kommagetallen, breuken, procenten en verhoudingen op hoofdlijnen te doorzien en er in praktische situaties mee te rekenen.

In de eindtoets voor de basisschool van Cito neemt het uitvoeren van operaties met breuken geen belangrijke plaats in. Een voorbeeld van een opgave die in die toets zou kunnen voorkomen, is:

Lisette is aan het sparen voor een computerspel. Ze heeft al $\frac{1}{4}$ van het bedrag gespaard. Drie maanden later heeft ze nog eens $\frac{3}{8}$ deel van het bedrag gespaard en haar vader zegt dat hij de rest betaalt. Welk deel is dat?

Delen en vermenigvuldigen met breuken zal waarschijnlijk maar door een beperkte groep leerlingen in de hoogste groep van de basisschool gedaan worden.

Een paar voorbeelden van opgaven die op de basisschool gebruikt worden, soms als extra stof voor goede leerlingen:

1. *Job en zijn vrienden maken een wandeltocht. De hele tocht duurt $4\frac{1}{2}$ uur. Ze zijn op de helft. Hoe lang hebben ze al gelopen?*

In het boek wordt aangestuurd op $\frac{1}{2} \times 4\frac{1}{2} = \ldots$, maar is het niet even logisch om aan $4\frac{1}{2} : 2$ te denken?

2. *Oppassen kost $2\frac{1}{2}$ euro per uur. Voor $1\frac{1}{2}$ uur oppassen moet ik dan ....betalen.*
3. *$\frac{3}{8}$ liter in $1\frac{1}{2}$ liter, hoe vaak zit het erin? Teken het.*

De vraag hoe vaak $\frac{3}{8}$ liter in 1 liter past, zou via een getallenlijn kunnen worden opgelost. In alledaagse situaties zul je je vermoedelijk eerder afvragen hoeveel flesjes met een inhoud van $\frac{3}{8}$ liter je kunt vullen uit een pan saus waar $1\frac{1}{2}$ liter in zit.

Aan het eind van de basisschool

Het is duidelijk, het breukenonderwijs is aan het eind van de basisschool nog niet 'af'. Voor sommige leerlingen, met name de leerlingen die naar het VMBO gaan, hoeft hun kennis uiteindelijk ook niet veel verder te gaan dan begrijpen wat breuken zijn en ze hoeven maar in heel beperkte mate met breuken te kunnen rekenen. De rekenmachine neemt een belangrijk deel van het werk over; begrip en inzicht zijn belangrijker dan het kunnen uitvoeren van standaardalgoritmes die toch weer snel vergeten worden. Om een idee te geven, in het vernieuwde examenprogramma voor de basisberoepsgerichte leerweg (BB) van het VMBO staat dat de leerlingen in betekenisvolle situaties gelijknamige breuken moeten kunnen optellen en aftrekken en eenvoudige breuken vermenigvuldigen met een geheel getal. Leerlingen in de theoretische richting (GL/TL) moeten aan het eind van hun opleiding ook nog eenvoudige breuken kunnen vermenigvuldigen en delen in betekenisvolle situaties. Uiteindelijk mag tijdens het gehele examen de rekenmachine worden gebruikt, dus wie het niet zelf kan, mag de berekeningen met de rekenmachine doen.

Voor HAVO- en VWO-leerlingen ligt dat anders; zij hebben de eigenschappen van breuken en de formele bewerkingen later ook nodig voor de algebra.

Van Hiele schreef al in 1973:

> Waarschijnlijk zullen langs deze weg de meeste algoritmen der breuken op de basisschool niet aan de orde komen. Voor het praktische leven zou dit niet hinderen: daar zijn die algoritmen niet van pas, in het praktische leven komt men alleen de aan materie gebonden breuken tegen. Vrijwel alle algoritmen der breuken functioneren pas voor het eerst in de algebra (Van Hiele, 1973).

Voor de rest van dit artikel zullen we ons voornamelijk tot het voortgezet onderwijs op het VWO beperken.

Naar het VWO

In de brugklas van het voortgezet onderwijs moeten de leerlingen hun rekenkennis van de basisschool onderhouden en uitbreiden. Handig kunnen rekenen in allerlei situaties, uitkomsten kunnen schatten en op een bij de situatie passende manier afronden, blijven belangrijk.

Kunnen redeneren *over* het getalsysteem in plaats van kennis hebben *van* het getalsysteem krijgt meer nadruk. En hoe zit het met de breuken?

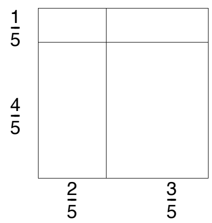
In de brugklasboeken wordt meestal één (deel van een) hoofdstuk aan de breuken besteed. Veel docenten in het voortgezet onderwijs gaan er nog steeds vanuit dat alle operaties met breuken op de basisschool aan de orde geweest zijn en dat ze dus alleen maar hoeven te herhalen wat op de basisschool geleerd is, wellicht in iets formelere vorm. Zo staat in een van de bekeken brugklasboeken:

> Voor 1 van de 8 schrijf je $\frac{1}{8}$.
>
> Het getal boven de breukstreep heet de **teller**, want je telt het aantal stukken dat je hebt. Het getal eronder heet de **noemer,** want elk stuk noem je één achtste.

Dan komen gelijknamige breuken aan de orde en het vereenvoudigen van breuken; soms ook nog het aangeven van de juiste plaats van breuken (ook ‘gemengde’ breuken) op een getallenlijn. Echter, redeneren over breuken en over de uitbreiding van het getalsysteem ontbreekt meestal. Je zou als docent toch willen dat een brugklasleerling kan aangeven waarom er geen kleinste breuk groter dan nul is, of dat hij/zij kan uitleggen hoe het kan dat je een getal kunt delen door iets waarna de uitkomst groter wordt, zoals bij $8 : \frac{3}{4}$. Vermenigvuldigen van breuken komt in het lesboek dat we als voorbeeld gebruiken even aan de orde via het rechthoeksmodel:

> Kleur eerst $\frac{3}{4}$ van een rechthoek en daarna $\frac{1}{2}$ van dit deel. Je hebt nu gezien dat $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$. Zo geldt ook $\frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$ en $\frac{5}{7} \times \frac{2}{9} = \frac{10}{63}$. Je ziet: bij het vermenigvuldigen van breuken moet je de tellers vermenigvuldigen en de noemers vermenigvuldigen.
>
> $$breuk \times breuk = \frac{teller \times teller}{noemer \times noemer}$$

Afgezien van de hybride notatie, dit is allemaal wel heel erg kort door de bocht. Met het rechthoeksmodel wordt verder niet geoefend, hoewel juist hier mogelijkheden liggen tot verdere verdieping en aansluiten bij wat later bij de algebra nodig is. Hier blijven veel kansen liggen, al kunnen docenten natuurlijk heel goed hun eigen koers varen, onafhankelijk van wat er in een methode staat. Een eenvoudige oefening die hier zou passen:



Het vierkant van 1 *bij* 1
is verdeeld in vier stukken.
Schrijf in elk van die stukken
de oppervlakte als breuk.
Tel de vier breuken op.

Vermenigvuldigen met gemengde breuken gaat volgens de meeste boeken met de rekenmachine en dat geldt ook voor het delen van breuken. Nee, dat alles sluit niet aan bij wat de leerlingen in het basisonderwijs hebben gedaan. Een doorlopende leerlijn van basisonderwijs naar voortgezet onderwijs zou, juist voor de VWO-leerlingen, bij dit toch eeuwig lastige onderwerp belangrijk zijn.
Er is in het voortgezet onderwijs (te?) weinig tijd beschikbaar voor rekenen in het algemeen en voor rekenen met breuken in het bijzonder, er moet nog zoveel meer. Zou er misschien toch op de basisschool door aanstaande HAVO- en VWO-leerlingen wat tijd kunnen worden besteed aan formalisering van rekenen met breuken, bijvoorbeeld in de periode na het afnemen van de Cito-eindtoets?
Misschien een idee voor uitgevers van lesmateriaal voor basisscholen? In ieder geval zouden er in dergelijk extra materiaal interessante ontdekkingen gedaan kunnen worden. Bijvoorbeeld dat als je de tellers én de noemers van twee breuken bij elkaar optelt, je een’ tussenbreuk’ krijgt, in plaats van de ‘som’ van de breuken.
Of dat als je bij een breuk (kleiner dan 1) bij teller en noemer hetzelfde getal optelt, de breuk niet gelijk blijft (zoals bij vermenigvuldiging met hetzelfde getal), maar groter wordt.

Breuken in de algebra

Het rekenen met breuken in de algebra komt het eerst naar voren bij lineaire vergelijkingen. Zo vonden we in een veelgebruikt schoolboek het voorbeeld:

> Los op $\quad \frac{2}{3}x = 11$
>
> $\quad\quad\quad \mathbf{:\frac{2}{3}} \quad \mathbf{:\frac{2}{3}}$
>
> $\quad\quad\quad x = 16\frac{1}{2}$

Met daarbij de uitleg hoe de deling $11 : \frac{2}{3}$ met de rekenmachine kan worden uitgevoerd (gebruik de ab/c knop). Daaraan voorafgaand is de balansmethode uitvoerig uitgelegd en beoefend, en daarom is het voor ons een raadsel waarom de leerling hier geen kans geboden wordt eerst eens zelf na te denken over een geschikte strategie; bijvoorbeeld eerst links en rechts delen door 2 en daarna vermenigvuldigen met 3 (of vice versa). En waarom niet aan de hand van dit voorbeeld het bekende ‘delen door een getal is vermenigvuldigen met het omgekeerde’ aangekaart? Links en rechts vermenigvuldigen met $\frac{3}{2}$ levert immers (net als delen door $\frac{2}{3}$) in één klap de oplossing. Vreemd is ook dat na het bijbehorende rijtje opgaven, de dwingende aanbeveling volgt om in een vergelijking eerst maar alle breuken weg te vermenigvuldigen:

> Bij $\frac{1}{4}x - 7 = \frac{2}{3}x$
> vermenigvuldig je alle termen
> met 12, want dan verdwijnen
> de breuken.

Daarmee is het oefenen met breuken sterk gereduceerd. Het valt trouwens op dat, voor zover er in de onderbouw aan rekenen met letters wordt gedaan, breuken zoveel mogelijk worden vermeden. Coëfficiënten in twee- en drietermen zijn bijna altijd geheel. En waarom wel uitwerkopgaven als $(x - 3)(x - 6)$ en niet $(x + \frac{1}{3})(x + \frac{1}{6})$?

Breukvormen met letters, waar vroeger uitgebreid mee werd geoefend, komen in de eerste twee leerjaren van

HAVO en VWO niet of nauwelijks voor. Niet dat wij terugverlangen naar de weelderige cultuur van ingewikkelde breukvormen van pakweg zo'n vijftig jaar geleden, maar door het volledig negeren ervan worden er toch kansen gemist om het inzicht in de breukrekening te verdiepen en latere misrekeningen te voorkomen.
Een bekende fout die in de bovenbouw van het VWO optreedt, is de vereenvoudiging van bijvoorbeeld $\frac{1+a}{2+a}$ tot $\frac{1}{2}$, het bekende 'wegstrepen'. Alleen maar vertellen aan leerlingen dat die vereenvoudiging fout is omdat *a* een *term* is en geen *factor,* heeft op zo'n moment weinig zin. Beter is het om uit te dagen tot wat onderzoek.

is $\frac{1+a}{2+a}$ *groter, gelijk of kleiner dan* $\frac{1}{2}$*?*
Teruggrijpen naar voorbeelden met hele getallen en dan veralgemeniseren. Een mooie oplossing is om het verschil met 1 te bekijken. En hoe zit het als a negatief is?

Of: hoe kan je de noemer een beetje veranderen zodat de breuk wél gelijk is aan $\frac{1}{2}$ *en wat kan je doen met de teller om te bereiken dat* $\frac{1}{2}$ *de goede uitkomst is?*

Waarom zou een dergelijk probleem niet in bijvoorbeeld al het tweede leerjaar van het VWO aan de orde kunnen komen? Flexibel kunnen omgaan met algebraïsche expressies is een belangrijk doel voor de betreffende groep leerlingen en daar kunnen we beter vroeg mee beginnen. En geloof het of niet, maar voor veel leerlingen in de bovenbouw is het beslist niet vanzelfsprekend dat $\frac{\pi}{2}$ gelijk is aan $\frac{1}{2}\pi$. Dit demonstreert dat er veel mankeert aan het aanleren, verankeren en onderhouden van elementaire algebra. Er zijn genoeg oefeningen te bedenken, waarmee jonge VWO'ers uit de voeten kunnen om dit soort gebreken te voorkomen (zie bijvoorbeeld *Wat a is, dat kun je niet weten*, hoofdstuk 7 (Drijvers, 2006)).

In een leerboek voor 5 VWO dat we bekeken, worden de leerlingen uitgedaagd te onderzoeken welke formule gelijkwaardig is met:

$$y = \frac{2}{x} + \frac{3}{x+1}$$

Dat is uiteraard een prima opgave. Echter, onmiddellijk daarna volgen de regels voor vereenvoudigen van breuken en hoe je ze moet (sic) optellen, vermenigvuldigen en delen. Die bewerkingen kun je natuurlijk met de (inmiddels grafische) rekenmachine uitvoeren, maar, zo staat er, als er letters staan in de breuken, kun je met de rekenmachine niet zoveel beginnen. En dus volgen nu (!) de formele regels voor de bewerkingen met breuken, toegepast op breuken waarin 'letters' voorkomen. Eerst een voorbeeld bij elke regel, zoals:

$$\frac{x+3}{2} : \frac{x-1}{5} = \frac{x+3}{2} \cdot \frac{5}{x-1} = \frac{5(x+3)}{2(x-1)}$$

gevolgd door een paar oefeningen. Het lijkt op een wat laat aangelegd noodverband en het mag nauwelijks verbazen dat veel leerlingen tot en met het examen problemen hebben bij het opereren met allerlei algebraïsche expressies, en zeker met breukvormen.
De sprong van informeel, dan wel met de rekenmachine, uitvoeren van operaties met breuken naar het hanteren van formele regels voor het rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen is wel erg groot.

Wat kunnen we doen in het voortgezet onderwijs?

Als we ernst willen maken met het onderhouden en uitbreiden van de breukenkennis van de basisschool, moet er een doorgaande leerlijn van primair naar voortgezet onderwijs zijn. We willen hier een schets geven van (het begin van) een leerlijn 'breuken' voor HAVO en VWO, aansluitend op de behandeling in het basisonderwijs.

- Breuken als uitbreiding van het getalsysteem eerst van de natuurlijke, daarna van de gehele getallen. Breuken op de getallenlijn, gelijkwaardigheid van breuken, het bestaan van negatieve breuken.
- Vereenvoudigen van letterbreuken, zoals:

  $$\frac{2n}{3n} = \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{m+1}{2m+2} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{5p}{20q} = \frac{p}{4q}$$

- Vergelijken van breuken (gelijke noemers of gelijke tellers maken), gebruik van de tekens < en >, ook met eenvoudige letterbreuken.
  Welke breuk is groter: $\frac{2}{n}$ *of* $\frac{4}{2n+1}$ *? Waarom?*
  (n staat voor een natuurlijk getal)
- Herhalen en formaliseren van de operaties optellen en aftrekken; het gelijknamig maken van breuken, ook weer met 'letterbreuken'

  $$\frac{2}{m} + \frac{3}{m} = \ldots \qquad \frac{m}{2} - \frac{m}{3} = \ldots \qquad \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \ldots$$

- Informele en preformele vormen van de operaties vermenigvuldigen en delen herhalen, oppervlaktemodel, sprongen op de getallenlijn.
- Vermenigvuldigen en delen als inverse operaties, ook met variabelen:

  $$\frac{n}{5} = \frac{1}{5} \times n \quad , \quad m : \frac{3}{4} = \frac{4m}{3} \quad , \quad \frac{p}{q} \times \frac{q}{p} = 1$$

- Onderzoeken en generaliseren van getalpatronen met breuken:

  $$4 + 1\tfrac{1}{3} = 4 \times 1\tfrac{1}{3}$$

  Kun je meer van zulke gelijkheden verzinnen?
  Welke formule hoort daarbij?
- Samengestelde breuken, bordjesmethode:

  $$\frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \ldots \qquad \frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}} = \ldots \qquad \frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}}} = \ldots$$

  $$\frac{15}{4+\frac{6}{1+x}} = 3 \longrightarrow \frac{6}{1+x} = 1 \longrightarrow x = 5$$

- Concrete toepassingen van breukrekenen, zoals: eenvoudige kansrekening, verschillende soorten gemiddelden (rekenkundig, gewogen, harmonisch), hellingsgetallen van rechte lijnen.

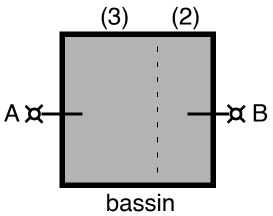
Ter toelichting van dit laatste punt kijken we naar een klassieke toepassing van breukrekenen die bijvoorbeeld te vinden is in het werk van Polya (Polya, 1962) en Freudenthal (Freudenthal, 1991)

---

* *Een bassin kan gevuld worden met twee kranen, zeg A en B. Alleen met kraan A duurt het 2 uur voor het bassin vol is, alleen met kraan B duurt het 3 uur. Hoelang duurt het voor het bassin vol is, als beide kranen openstaan?*

* *Vervang 2 door a en 3 door b en geef een formule voor de tijdsduur van vollopen.*

Dit probleem laat verschillende oplossingsstrategieën toe. De meest bekende aanpak is: als alleen kraan A loopt is het bassin na één uur voor de helft vol; loopt alleen B, dan is het na één uur voor een derde vol. Staan beide kranen open, dan is na één uur $\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ van het bassin gevuld. Stel t is het aantal uren nodig om het bassin te vullen, dan moet gelden $t \times \frac{5}{6} = 1$ dus $t = \frac{6}{5}$.
Conclusie: na 1 uur en 12 minuten is het bassin gevuld.
Freudenthal geeft in *Revisiting Mathematics Education* een mooie alternatieve oplossing: stel je tijdelijk een scheidingswand in het bassin voor die dit in delen met verhouding 3 : 2 verdeelt, zoals in de figuur.



Het deel van A is vol na $\frac{3}{5} \times 2 = \frac{6}{5}$ uur en B heeft dezelfde tijd nodig om zijn deel vol te krijgen!
De generalisatie van de twee oplossingsmethoden geeft aanleiding tot het vergelijken van de expressies:
$\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ en $\dfrac{b}{a+b} \cdot a$, die beide te herleiden zijn tot: $\dfrac{ab}{a+b}$

Onze lijst met punten van een leerlijn is ongetwijfeld uit te breiden met meer en andere relevante zaken en de gekozen voorbeelden kunnen met talloze andere worden aangevuld (zie bijvoorbeeld ook *Wat a is, dat kun je niet weten* en *Oefeningen in algebra*).

Dit artikel moet worden beschouwd als een eerste verkenning van de breukenproblematiek in het voortgezet onderwijs. We herhalen nog eens dat we hierbij exclusief de HAVO- en VWO-leerlingen voor ogen hebben. We zijn ervan overtuigd dat voor die leerlingen het werken met letterbreuken vanaf de beginfase in het voortgezet onderwijs nuttig is. De structuur van de operaties met breuken komt duidelijker naar voren als er met variabelen in teller en/of noemer wordt gewerkt . Het lijkt daarbij verstandig om het domein voor de variabelen in teller en noemer aanvankelijk te beperken tot de natuurlijke getallen.

In een later stadium, wanneer er sprake is van eenvoudige gebroken functies met hun grafieken, is uitbreiding van dit domein naar de rationale en de reële getallen gewenst. Reacties van lezers zijn vanzelfsprekend zeer welkom (T.Dekker@fi.uu.nl).

Truus Dekker, Martin Kindt,
Freudenthal Instituut

Literatuur

Galen, F. van, e.a. (2005). *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Hiele, P. van (1973). *Begrip en inzicht.* Purmerend: Muusses.
Drijvers, P. (red.) (2006). *Wat a is, dat kun je niet weten*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
Kindt, M. (2003). *Oefeningen in algebra*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery (volume I)*. John Wiley & Sons, Inc.
Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Noot

[1] Te bestellen via Wolters-Noordhoff