

J.A. van Maanen,

*De koeiennon.*

*Hoe rekenen en wiskunde te leren, en van wie*

ISBN 978-90-70786-03-8

(oratie in het vakgebied

“Didactiek van het wiskundeonderwijs”,

Universiteit Utrecht, 21 maart 2007, 16:15 uur)

## **De koeiennon**

*Hoe rekenen en wiskunde te leren,  
en van wie?*



# De koeiennon

*Hoe rekenen en wiskunde te leren,  
en van wie?*

Rede  
uitgesproken bij de aanvaarding  
van het ambt van gewoon hoogleraar  
in de Didactiek van het Wiskundeonderwijs  
aan de Faculteit Bètawetenschappen  
van de Universiteit Utrecht

door

**Johannes Arnoldus van Maanen**

op woensdag 21 maart 2007

Universiteit Utrecht



ISBN 978-90-70786-03-8

### **Uitgave**

Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en  
Natuurwetenschappen (Flsme), Utrecht

© 2007 J.A. van Maanen

### **Vormgeving en productie**

Koos Vierkant, Groningen

### **Druk**

Wilco, Amersfoort

### **Omslag en de illustratie op de achterzijde**

Ontleend aan een rekenhandschrift door Willem Claesz.  
van Assendelft, ca. 1620; afgebeeld op 70% van de ware  
grootte.

Op de achterzijde staan twee berekeningen met behulp van  
de regel van drieën. Een hoeveelheid van een bepaalde stof is  
gewogen en kost een bepaald bedrag (het gewicht “8 ponden  
5 engelsen” kost “9 pond 8 grooten”). Gevraagd wordt hoe-  
veel een ander gewicht van die stof kost (“hoe veel cost 378  
pond 5 onc”). De onderverdeling staat genoteerd: 1 pond  
gewicht bevat 16 ons, en elk ons 20 engelsen; 1 pond geld  
bevat 20 schellingen en elke schelling heeft 12 grooten.  
Verder valt de notatie van de deling op. Dit is geen staart-  
deling, ook geen kolomsgewijze deling, maar de sinds de  
middeleeuwen veel gebruikte galei-methode, zo genoemd  
omdat de berekening na afloop de vorm van een schip heeft.  
Zie Marjolein Kool, *die conste vanden getale*, Hilversum:  
Verloren, 1999 voor gedetailleerde achtergrondinformatie.

Mijnheer de Rector,  
waarde collega's, lieve familie en vrienden,

Onderwijs in rekenen en wiskunde<sup>1</sup> staat en valt met de docent. Een kleine enquête in mijn omgeving hierover levert op<sup>2</sup>:

*Bij 'didactiek van het wiskundeonderwijs' moest ik direct denken aan de roomskatholieke non van wie ik op de middelbare school wiskunde kreeg. Zij gaf die wiskunde altijd op een manier dat iedereen (dom of slim) het begreep en dat gaf haar de bijnaam de koeiennon, omdat zij volgens alle ouders en leerlingen, in staat was om een koe wiskunde te leren. We hebben het nooit in een weiland uitgeprobeerd, maar iedereen in onze klas haalde minimaal een voldoende op het eindexamen.*

Na deze herinnering nu de indruk van een leerling uit vwo-4<sup>3</sup>:

*We hebben bijvoorbeeld 6 hoofdstukken in een jaar, en dan kan het goed dat je voor het eerste hoofdstuk gemiddeld een 8 staat, en dan het volgende een 5/6. Bij talen bijvoorbeeld; daar ben je goed in of niet en verschillen de cijfers minder dan van bijvoorbeeld wiskunde.*

*Verder is het zo, (...) dat (...) of je wiskunde snapt, ook erg van je leraar af hangt. Alle leraren geven op een andere manier les, en bij wiskunde is het wel belangrijk "hoe".*

*Want ik heb 4 docenten wiskunde gehad en bij sommige snap ik iets gewoon sneller dan bij de andere, maar dat verschilt ook weer per persoon. Het ligt er gewoon aan hoe jij op iets kijkt en als dat van de leraar ongeveer hetzelfde is snap je een som/vraag sneller.*

De inzet van de leraar is belangrijk, maar het is de vraag of wiskundeleraren er met inzet komen. Rafaël zegt van niet, het hangt ook van de persoon af.

Ik herken daar veel van uit mijn eigen tijd als leraar.<sup>4</sup> Soms deed een hele klas het goed, maar de parallelklas niet, terwijl ik me daar misschien wel meer voor inzet- te. En soms ‘klikte’ het niet met een groep als geheel. Ik denk hier even aan het uiterst ongemakkelijke jaar in een vierde klas, waarvan ik ook klassenleraar was. Geen land mee te bezeilen, inzet of niet. En ik heb ook Francisca nog helder voor ogen. Ik zal vast een keer iets verkeerd gedaan hebben, of een keer iets niet gedaan hebben, toen ze het nodig had. Hoe het ook zij, haar ouders wilden dat ze na de vijfde een andere wiskunde- docent zou krijgen.

Ook de opvattingen van de leraar, over opvoeden en over het vak, spelen mee. Ik laat een ouder van een basisschoolleerling aan het woord<sup>5</sup>:

*Als een groep-drie-leerkracht aan de ouders van de leerlingen mee- deelt “... dat we behalve aan lezen en schrijven helaas ook tijd moeten besteden aan rekenen” is er nog veel werk aan de reken- winkel.*

In deze groep drie wordt ongetwijfeld gerekend, maar de kinderen zullen de voorkeur van de leerkracht wel merken. Je moet als kind van zes sterk in je schoenen staan, als je eerder klaar bent dan de andere kinderen en je zou nog wat moeilijker rekensommen willen heb- ben.

Dit begin staat model voor hoe ik vandaag het leren van rekenen en wiskunde zal benaderen. Ik zal me veelal baseren op eigen waarnemingen en inzichten, en hier niet systematisch ingaan op de stand van de wiskunde- didactiek als wetenschap.

## Hoe rekenen en wiskunde te leren?

Over deze vraag is de laatste tijd veel te doen, over leren is veel te doen, en over de resultaten van het reken- en wiskundeonderwijs niet minder. Als een onderwerp in de cartoons van Fokke en Sukke aan de orde komt, dan heeft het òf zelf al iets lachwekkends òf het is 'een geval van niet in orde'. De opschudding vanaf voorjaar 2006 over de rekenvaardigheid van instromende pabo-studenten volgden Fokke en Sukke in de *NRC* als volgt:



Deze cartoon<sup>6</sup>, van 10 oktober 2006, werd twee dagen later nog eens dunnetjes overgedaan. Op 11 oktober had het Nederlandse voetbalelftal met 2-1 gewonnen van Albanië (dat valt onder de dingen die op zichzelf al iets lachwekkends hebben) en dat leidde een dag later tot de volgende cartoon.

## FOKKE & SUKKE

HEBBEN MET HUN HELE PABOKLAS GEKEKEN

GEWONNEN  
VAN ALBANIË



RGNTVB

MET ZES  
DOELPUNTEN  
VERSCHIL!!



Het probleem waarop Fokke en Sukke reageerden, was niet nieuw, en anders dan de ophef doet denken was het al lang bekend. Het merendeel van de pabo-studenten heeft een havo-opleiding met profiel Cultuur en Maatschappij (C&M) achter de rug, of de mbo-opleiding tot onderwijsassistent. Studenten met havo-C&M hebben een wiskundevak gedaan<sup>7</sup> waarin getallen een rol spelen, maar veel rekenwerk komt daar niet bij kijken. Bovendien wordt het via een schoolexamen afgesloten, en op veel scholen stopt het al voor het examenjaar. Zo gaat het sinds de invoering van de profielen, en die traden in werking op 1 augustus 1998, hoewel de scholen er ook voor konden kiezen om de profielen in 1999 in te voeren.<sup>8</sup> In deze structuur zit vooraf ingebakken dat

de rekenkennis van havo-leerlingen die naar de pabo gaan, niet veel verder kan reiken dan het niveau van een leerling uit groep 8 van de basisschool. De instromers vanuit het mbo, ze vormen 30% tot 40% van de totale instroom, blijken bij binnenkomst op de pabo zelfs het niveau van groep 8 niet te halen. Ook dat hoeft niet te verbazen. De meeste van hen hebben eerst vmbo gedaan, en hadden aan het eind van de basisschool geen havo-vwo advies. Het waren toen al geen sterke rekenaars. Op het vmbo zijn ze gestopt met leren rekenen toen ze 14 waren.

De pabo's hebben al jaren programma's om de rekenvaardigheid van hun studenten tijdens de opleiding naar een hoger niveau te brengen. De situatie is zeker zorgelijk, maar de plotselinge verontwaardiging in 2006 over het rekenniveau van de studenten die aan de pabo beginnen, zegt niet zozeer iets over de pabo als wel over havo en mbo; en natuurlijk zegt het iets over over de klagers. De wet is uit 1998, de opschudding ontstond in de eerste dagen van 2006 door een studie naar de rekenvaardigheid van pabo-studenten van twee medewerkers van het Cito<sup>9</sup> en werd verder gevoed door Kamervragen en in mei 2006 door een rapport van het Kohnstamm Instituut over de instroom op de pabo's.<sup>10</sup> Ruim voor de invoering van de profielen speelden er al discussies over de toelatingseisen van de pabo. In 1988 werd ingevoerd dat pabo-instromers havo-wiskunde A in hun examenpakket moesten hebben, maar in 1990 werd die maatregel alweer ingetrokken, waarschijnlijk omdat de pabo's anders niet genoeg studenten zouden trekken. Het fenomeen dat door druk van de vervolgoledingen de instroomeisen verlaagd werden, zullen we nog terugzien.

## Meer en beter leren

Kinderen leren rekenen en wiskunde. Hoe gaat dat in zijn werk? Voor de basisschool in Nederland doet het informatieve en zeer gedetailleerde rapport over de in 2004 gehouden Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau (kortweg PPO<sup>n</sup>)<sup>11</sup> de volgende observaties:

- De invoering van de Euro op 1 januari 2002 maakte dat 80% van de basisscholen in 2004, toen de peiling gehouden werd, een nieuwe reken-wiskunde methode had aangeschaft. Driekwart van de scholen gebruikte één van de drie grote methoden (40% *Pluspunt*, 20% *Wereld in getallen* en 15% *Rekenrijk*). Daarnaast gebruiken twee van de drie leerkrachten materiaal voor remedial teaching.
- Rekenen-wiskunde doen de basisscholen gemiddeld 5 uur per week; een half uur extra op scholen die in de bovenbouw veel allochtone leerlingen hebben. Voor zwakke leerlingen trekt ongeveer de helft van de leerkrachten per week gemiddeld een half uur extra uit.
- De werkvormen zijn sinds 1992 meer gedifferentieerd geworden. Voor groep 8 gaf in 1992 de helft van de leraren aan dat ze alle leerlingen dezelfde instructie gaven, terwijl ze bij het oefenen differentieerden naar niveau en tempo. In 2004 werkte 64% van de docenten op deze wijze. Het deel van de leraren dat in groep 8 zowel bij instructie als bij oefenen differentieerde, nam van 1992 tot 2004 toe van 15% tot 25%. Voor de groepen 6 en 7 is hetzelfde beeld zichtbaar.
- Een kwart van de scholen had in 2004 een rekencoördinator, en 55% had de beschikking over een remedial teacher; dit komt overeen met de situatie in 1997.

- De zakrekenmachine wordt in de groepen 7 en 8 in bijna alle basisscholen gebruikt. In groep 6 is het gebruik van de rekenmachine sinds 1997 toegenomen, van 15% naar 40% van de leraren. De overwegende reden om de rekenmachine niet te gebruiken, is dat hij niet in de rekenmethode voorkomt.
- De meeste leraren onderwijzen het rekenen eerst kolomsgewijs. Een optelling als  $247+368$  wordt daarbij eerst gesplitst in het optellen van de honderdtallen ( $200+300=500$ ), de tientallen ( $40+60=100$ ) en de eenheden ( $7+8=15$ ), die daarna weer samengenomen worden ( $500+100+15=615$ ). Uit oefensessies met Hannah, die in groep 8 zit, weet ik dat de kolomsgewijze methode goed is voor het begrip, maar meer tijd kost dan het klassieke cijferalgoritme. Voor optellen en aftrekken stappen de meeste leraren in groep 6 over naar het klassieke cijferen, voor vermenigvuldigen in groep 7, maar voor delen handhaaft ongeveer 60% het kolomsgewijze algoritme; zo ook in de groep van Hannah. 40% van de leraren stapt voor het eind van de basisschool nog net over op de klassieke staartdeling.
- De aandacht voor hoofdrekenen en voor het kiezen van slimme rekenstrategieën was in 1997 toegenomen vergeleken met 1992, en de toename heeft zich in 2004 voortgezet. De toegenomen aandacht voor hoofdrekenen en rekenstrategieën heeft een keerzijde, als het gaat om het uitvoeren van meer ingewikkelde bewerkingen. Het lijkt wel, zegt het rapport, alsof veel leerlingen zo gespitst zijn op het vinden van een slimme manier om een probleem ‘uit het hoofd’ op te lossen dat ze het niet op papier uitvoeren, en de opgaven dus niet goed maken.

Over het voortgezet onderwijs zal ik beknopter zijn. Wie de krant leest, weet dat de beelden van de situatie uiteenlopen; vaak gaat dat gepaard met de moraal die de schrijver eraan wil verbinden. Er zijn over wiskunde op havo en vwo sinds de invoering van de profielen en het studiehuis veel zorgwekkende observaties. Bij diagnostische toetsen aan de poort van de universiteiten kunnen de verse eerstejaars veel vragen niet meer goed beantwoorden, terwijl de eerstejaars van tien jaar geleden die stof wel in hun bagage hadden, althans in hun bagage hoorden te hebben, want ook toen waren niet alle eerstejaars even goed toegerust. Het aantal contacturen op havo en vwo is afgenomen, de resultaten van de examens worden kunstmatig op een zelfde peil gehouden, want de kennis neemt af. Let wel, dit zijn de geluiden die je hoort en leest. Zaken die eindexamenkandidaten vroeger uit het hoofd kenden, zoeken ze nu op een formulekaart op, en voor de meest eenvoudige berekeningen gebruiken ze de rekenmachine; zeggen de geluiden. De Onderwijsraad, die eind 2006 onderzoek deed naar het kennisniveau in het voorgezet onderwijs<sup>12</sup>, komt tot vergelijkbare conclusies, zowel voor de beheersing van de Nederlandse taal als voor rekenen en wiskunde. Ik bewaar mijn reactie op deze geluiden en zorgen nog even, want de grote aandacht voor havo en vwo zou bijna doen vergeten dat de meeste leerlingen naar het beroepsonderwijs gaan (de lijn vmbo—mbo—hbo). De voorlopige aantallen voor het schooljaar 2005/2006<sup>13</sup> zijn:

<i>leerlingenaantal 2005/2006 (voorlopig; bron: CBS)</i>			
havo 3/4/5	137.440	vwo 3/4/5/6	149.760
vmbo 3/4	226.790	mbo	481.650

Ook als je met de helft van het aantal mbo-leerlingen rekent om vergelijkbare leeftijdsgroepen te hebben, spreken de aantallen voor zich.

De invoering van de beroepscompetenties als sturing voor de programma's heeft in het beroepsonderwijs een veel fundamentele omslag bewerkstelligd dan de basisvorming en profielen in havo en vwo hebben gedaan. De wiskunde, vroeger in de meeste sectoren van het beroepsonderwijs een zelfstandig vak, komt op de meeste scholen alleen terug als het van belang is voor de beroepspraktijk. Dit leidt tot ernstige problemen bij de aansluiting tussen mbo en hbo. Heeft een leerling die mbo-techniek achter de rug heeft, kennis van exponenten en logaritmen? Het zou kunnen, maar zekerheid heeft de hbo-opleiding waar deze leerling zich meldt, niet. Eerder zagen we al de problemen met de rekenvaardigheid bij de aansluiting tussen mbo en pabo. Een aantal instellingen<sup>14</sup> werkt op dit moment onder aanvoering van de mbo-raad aan een raamwerk, dat richting moet geven aan de programma's van de mbo-opleidingen. Ook moet het bij toelating van mbo naar hbo houvast bieden aan de hbo-opleidingen; het proces heeft veel weg van mosterd maken terwijl de maaltijd al gevorderd is. De vraag is of de huidige problemen 'kinderziekten' zijn, die vanzelf of door lichte interventies overgaan, zoals dat bijvoorbeeld met het probleemgestuurde onderwijs aan de Medische Faculteit in Maastricht gebeurd is, of dat een totaal andere koers nodig is. Ik ben voorstander van een aantal stevige interventies.

*Meer frequente interactie tussen leerling en vakdeskundige leraar doet de leerling beter en meer op niveau leren dan de afgelopen jaren vaak het geval was.*

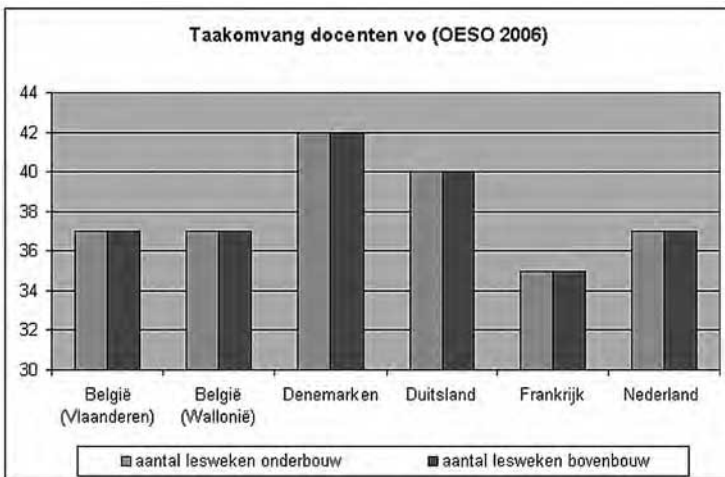
Moet er wat gebeuren? Zeker, er moeten diverse dingen gebeuren:

1. Het contact tussen leerling en leraar moet voor de leerling veel meer opleveren.
2. De leraar moet meer tijd ter beschikking hebben, zowel voor de leerling als voor zichzelf.

Wat het eerste punt betreft: op havo en vwo heerst in de wiskundeles sterk de cultuur van het zelf werken door leerlingen. Dat is niet zo zeer het effect van het Studiehuis, het is sinds jaar en dag de meest gehanteerde werkvorm. Dat zou niet bezwaarlijk zijn, als de leerlingen in de zelfwerkijd het onderste uit de kan zouden halen, maar dat gebeurt te weinig. Leerlingen krijgen te laat weerwerk op hun uitwerkingen, als er al een reactie op komt van de leraar. De wiskunde wordt dan een voortkabbelende stroom van niet geïntegreerde ditjes en datjes. Veel leerlingen doen erg hun best, maar de samenhang kunnen ze zelf niet aanbrengen. Daar hebben ze de leraar bij nodig, en als die niet voor gerichte en geregelde feedback zorgt, dan dobberen ze. Of ze verdrinken. Dat geldt natuurlijk niet voor de 10% bovenlaag voor wie het niet uitmaakt van wie ze het vak leren. Die kunnen en doen het goed, ook zonder of ondanks de leraar. Dat gerichte en geregelde feedback de leeropbrengst significant verhoogt, wordt door onderzoek bevestigd.<sup>15</sup> Voor het beroepsonderwijs ligt de situatie anders, zeker voor het mbo, maar frequente interactie tussen leerling en vakdeskundige leraar is ook daar geboden. Leerlingen zijn niet direct bekwaam om met hun vragen zelf deskundigheid op te zoeken. Zo is het in voorbije eeuwen nooit gegaan: de leerling en de gezelschap werkten jaren in frequente interactie met een meester. Die interactie hield in dat de meester leiding gaf. De overstap van aanbodgestuurd onderwijs

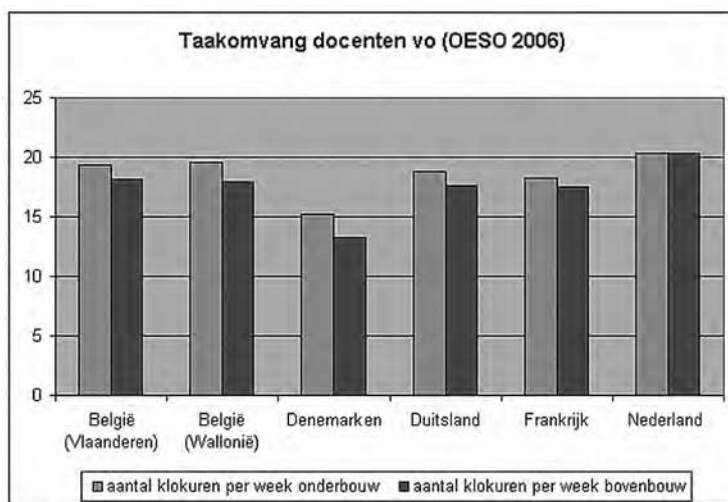
naar vraaggestuurd onderwijs is prima, maar zonder leiding komen de goede vragen niet eens los. De positie van de wiskunde in het beroepsonderwijs zal in de komende jaren een belangrijk thema van ontwikkelwerk en onderzoek zijn voor het Freudenthal Instituut.

Frequente interactie veronderstelt dat de leraar daarvoor tijd en faciliteiten heeft. Hier zit op dit moment een serieus knelpunt. Het aantal uren dat een leraar in het voortgezet onderwijs moet maken in een volledige betrekking, liep terug van 29 lesuren van 50 minuten per week in 1964 (en 30 als de schoolleiding wat pressie uitoefende), tot 25 lesuren nu. Daar staat tegenover dat veel scholen van de leraar nu een langere aanwezigheid op school eisen dan dit lang het geval was.



Er staat ook tegenover dat het aantal van 25 aanzienlijk hoger is dan in de landen om ons heen. De onderwijsstatistieken van de OECD (in het Nederlands: de

Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling, OESO), in te zien via de tabellen van de studie *Education at a glance 2006*<sup>6</sup>, zijn informatief. De studie maakt onderscheid tussen basisonderwijs, onderbouw voortgezet onderwijs en bovenbouw voortgezet onderwijs. In Nederland had de leraar in 2004 zowel in de onderbouw als in de bovenbouw 750 contacturen per jaar, verdeeld over 37 weken. Uren zijn hier klokuren. Het gemiddelde aantal uren voor de landen van de OESO was 704 uur in de onderbouw en 663 in de bovenbouw, ook verdeeld over 37 weken. Voor de op dat moment 19 landen van de Europese Unie lagen de gemiddelden op 667 uur (onderbouw) en 641 uur (bovenbouw). Ter vergelijking zijn hier onze buurlanden:



Vlaanderen 718 en 673 uur in 37 weken, Wallonië 724 en 664 uur in 37 weken, Denemarken 640 en 560 in 42 weken, Duitsland 751 en 705 in 40 weken, Frankrijk 639 en 614 in 35 weken. Engeland doet het anders. Daar zijn

docenten op alle niveaus gedurende 38 weken 1265 uur voor school beschikbaar.

De conclusie is dat de Nederlandse docent in het voortgezet onderwijs meer uren geeft dan gemiddeld in de OESO, meer uren dan gemiddeld in de Europese Unie, en meer uren dan in onze buurlanden (op één uitzondering na: de Duitse onderbouwdocent). In enkele buurlanden wordt wel meer weken les gegeven. Je zou denken: de Nederlandse docent heeft veel uren, dus heeft tijd voor zijn leerlingen. Maar die vlieger gaat niet op, want die vele uren zijn ook nog eens over veel klassen verdeeld, en dus over zeer veel leerlingen.

De cijfers voor het basisonderwijs vertonen een vergelijkbaar beeld, waarbij het grote aantal lessen in Nederland (930 uur in 40 lesweken) opvalt. Daarnaast spelen in het basisonderwijs nog de recente wijzigingen in de *Wet op het primair onderwijs* en de *Wet medezeggenschap onderwijs*. Beide wetten dateren uit 1992 en in november 2006 werd er bij wetwijziging aan toegevoegd dat scholen met ingang van 1 januari 2007 een inspanningsverplichting en per 1 augustus 2007 een resultaatsverplichting hebben om “de aansluiting tussen onderwijs en kinderopvang gemakkelijker te maken als ouders dit wensen.”<sup>17</sup> Het betekent dat het bevoegd gezag van de school moet zorgen dat er tussen half acht 's ochtends en half zeven 's avonds hetzij les gegeven wordt, hetzij kinderopvang beschikbaar is. Die opvang is op kosten van de ouders, dat wel. Maar de school moet zorgen dat het geregeld is.

Regelgeving heeft grote invloed, op alles en iedereen in het onderwijs. Neem de regeling van de doorstroomrechten. Doorstroomrechten zeggen voor elke opleiding in het hoger onderwijs welke combinatie van exa-

menvakken een leerling in havo of vwo gedaan moet hebben om tot de betreffende opleiding te kunnen worden toegelaten. Toen het leven nog overzichtelijk was, in de tijd van de Mammoetwet, was die regeling neergelegd in de zogenaamde ‘kruisjeslijst’. In 1998, bij de invoering van de profielen, werden de doorstroomrechten opnieuw vastgesteld. Onder druk van het hoger onderwijs was voor het meest bèta-gerichte profiel, Natuur en Techniek, het wiskundevak Wiskunde B1,2 ontwikkeld (spreek uit: wiskunde-B-eeen-twee). Het bestond en bestaat nog steeds uit twee onderdelen: B1 en B2. B1 is ook verplicht voor leerlingen die het profiel Natuur en Gezondheid volgen. Toekomstige studenten geneeskunde doen in elk geval Wiskunde B1. Wiskunde B2 is alleen verplicht voor leerlingen in het profiel Natuur en Techniek. Dankzij de lobby van het hoger onderwijs en zeker de Technische Universiteiten roerden zich hierin, werd Wiskunde B2 stevig opgetuigd, met aandacht voor redeneren en bewijzen, voortgezette vlakke meetkunde en voortgezette analyse. In de groep die het vak ontwikkelde zat bijvoorbeeld de oud-rector van de TU in Twente, De Smit. Tijdens het Nederlands Mathematisch Congres van 1995 gaf De Smit opening van zaken over de “verzoeken vanuit het Wetenschappelijk Onderwijs ten aanzien van het vak wiskunde.”<sup>18</sup>

Die luidden:

- “◦ meer inzicht, minder trucs;
- nadruk op wiskundige denkwijze (modelleren, abstraheren);
- nadruk op basisinzichten die rijpingstijd nodig hebben;
- de algemeen vormende en selecterende rol van de wiskunde;

- specifieke voorkennis voor bepaalde studierichtingen;
- beter beeld geven van wiskundestudie en beroep van wiskundige;
- afnemende interesse voor de wiskundestudie versus grote vraag naar wiskundigen;
- mathematisering van de maatschappij;
- komst van de computer.”

In de nieuwe kruisjeslijst stond Natuur en Techniek als het verplichte profiel voor toelating tot de studies aan de Technische Universiteiten. Maar toen eind 1999 bekend werd dat slechts 20% van de examenkandidaten het profiel Natuur en Techniek koos<sup>19</sup>, en de instroom bij de technische studies daardoor onder druk stond, besloten de TU's dat voor toelating tot de technische studies het profiel Natuur en Gezondheid met het deelvak Wiskunde B1 voldoende zou zijn. Het ministerie van OC&W deelde dit op 12 juli 2000 mee: “Samen met de TU's is besloten de universiteiten de mogelijkheid te geven studenten in hun propedeusejaar alsnog een kans te geven aan de toelatingseis te voldoen.” Daarmee kozen de TU's voor toekomstige studenten die de door henzelf gewenste extra kennis over redeneren en bewijzen en over meetkunde niet hadden. Uit welke hoek komen nu de klachten dat de eerstejaars niet meer kunnen rekenen en redeneren?<sup>20</sup>

Deze actie van de TU's viel veel wiskundedocenten rauw op hun dak. Ze hadden zich ingezet om inhoud en vorm te geven aan het nieuwe onderdeel Wiskunde B2, en hup, daar verdwenen de leerlingen. Het *Vakdossier 2000 Wiskunde*<sup>21</sup> van de SLO laat zien dat de innerlijke tegenspraak tussen de vraag om hoge eisen enerzijds en de verlaging van de toelatingnorm anderzijds in het voortgezet onderwijs niet begrepen werd. Docenten

kregen door deze actie het gevoel dat hun werk er niet veel toe deed, als Wiskunde B1,2, het paradepaardje van het wiskundeonderwijs, door het meest voor de hand liggende vervolgonderwijs niet eens meer nodig werd geacht. De regelgeving was in dit geval opportunistisch en niet opbouwend.

## Zinvol oefenen

Stel nu eens dat wiskundelessen productiever zouden verlopen. Dan zouden de leerlingen meer kunnen oefenen. “Meer oefenen” houdt in: oefenen in meer onderwerpen, maar ook per onderwerp meer opgaven doen en moeilijker opgaven doen.

Het repertoire dat leerlingen daarmee zouden opbouwen, is precies waar de vervolgopleidingen in het hoger onderwijs om roepen. Docenten aan deze instellingen klagen over –wat ze noemen– de ‘hiaten’ in de kennis van de eerstejaars. Dat dwingt hen namelijk om hun eigen onderwijs aan te passen.

Als ik naar de wiskunde-curricula kijk, begrijp ik dat wel. Je kunt in een college aan eerstejaars in 2007 niet zonder meer gebruiken dat  $\cos 2\phi = 2\cos^2\phi - 1$ , en je kunt er zeker niet van uit gaan dat studenten dit bij een tentamen paraat hebben, want in het vwo worden deze ‘dubbele-hoek formules’ wel onderwezen, maar de leerlingen hoeven ze bij het examen niet meer uit het hoofd te kennen, en ze oefenen er dus minder mee. Vermindering van parate kennis is waarneembaar, en er is duidelijk een aansluitingsprobleem.

Hoe lost het hoger onderwijs dat op? Kijkt men daar bijvoorbeeld naar de mogelijkheden van de eerstejaars, naar wat die nu wèl kennen en kunnen, in vergelijking met de parate-kennis-generatie? Maakt men gebruik van datgene wat voor de parate kennis in de plaats gekomen is? Nee, zo gaat het niet. De eerstejaars dient zich aan het aanbod van het hoger onderwijs aan te passen. De ontbrekende kennis wordt bijgespijkerd en daarna kunnen de colleges zo blijven als ze waren. Maar de didactiek aanpassen aan de wezenlijk andere populatie, dat is een andere en veel grotere stap.

Didactiek aanpassen gebeurt te weinig; ik vind dit een gemiste kans. Het hoger onderwijs zou namelijk goed gebruik kunnen maken van het gegeven dat studenten geleerd hebben om zelf dingen uit te zoeken en kennis te verwerven. In praktische opdrachten en profielwerkstukken hebben de havo- en vwo-leerlingen veel kennis en vaardigheden opgedaan die de parate-kennis-generatie niet had. Ik baseer deze uitspraak op een groot aantal contacten met leerlingen uit de bovenbouw van havo en vwo, en haal graag één geval naar voren. Op de gedenkwaardige woensdag 8 december 2005 kwamen twee vwo-5 leerlingen uit Zwolle me uithoren over een geavanceerd wiskundig onderwerp, dat weliswaar goed aansloot bij de schoolwiskunde, maar het vwo-niveau ver oversteeg. Het enthousiasme spatte eraf, en het was duidelijk dat hier minstens één toekomstige bèta in actie was. Zijn maat zal een goede secretaris worden, want zo zat hun tandem in elkaar: de bèta, Kais, stelde de vragen en Jasper noteerde de antwoorden. Welke eerstejaars uit de parate-kennis-generatie had al eens over het probleem van elementaire integreerbaarheid nagedacht, en kon daarover de stelling van Liouville citeren? Jasper en Kais kenden hele series primitieven en ze konden die kennis toepassen ook. Wat was hun motivatie om ze bij elkaar te zoeken en te leren? Ze melden in hun profielwerkstuk dat ze dit deden om goed voorbereid aan hun speurwerk te beginnen; ik citeer:

“Als we een literatuurstudie gaan doen, of naar een universiteit, dan moeten we de primitieven van functies wel goed in ons hoofd hebben zitten.”

En ze hadden het in orde. Kais kende de dubbele-hoek formules door en door, want hij had ze nodig voor zijn onderzoek naar integreerbaarheid.

***Zinvol oefenen is voor de leerling van groot belang, maar het leren van geïsoleerde rijtjes en formules baart onbegrip.***

Als ik dit voorbeeld wat breder trek, dan vind ik het een zeer geslaagde manier van oefenen en van kennis opbouwen. De beruchte dubbele-hoek formules, typisch formules in rijtjes met een hoge doorelkaarhaalcoëfficiënt, komen hier vanzelfsprekend naar voren. Ze worden onthouden in samenhang met het doel waarvoor je ze gebruikt, want ze zetten het kwadraat van de functies *sinus* en *cosinus* om in functies die direct te integreren zijn:  $\sin 2x$  of  $\cos 2x$ .

Kale rijtjes leren, zoals sommige recente boeken propageren, lijkt mooi, maar het legt een geweldig beslag op het geheugen als je die kennis nergens aan kunt vastmaken. Het leidt tot verwarring. Natuurlijk moet je met een zekere hoeveelheid basiskennis beginnen, en de tafels van 2 en 3 uit je hoofd kennen, en misschien nog een paar, dat is voor een leerling goed te doen en je hebt er ook nog wat aan. Maar oefenen met nieuwe problemen in samenhang met eerdere kennis, of met een onderzoeksvraag zoals in het geval van Kais en Jasper, daar schiet de leerling veel meer mee op. En als de leerling dan nog op tijd weerwerk krijgt, en zijn koers kan aanpassen of –als hij op de goede weg is– vervolgen, dan geven we goed wiskundeonderwijs. Nederland heeft goed onderwijs nodig, beter hoeft niet.

“En de actie ‘Lieve Maria’ dan?”, zult u denken. Die was toch afkomstig van studenten die vonden dat ze op school te weinig hadden geleerd? Ja en nee. “Ja” heb ik

al toegelicht: leerlingen kunnen meer en beter leren dan de afgelopen jaren het geval was. Maar de actie 'Lieve Maria' heeft ook een andere kant, die ik u niet wil onthouden.

Tijdens het 42ste Nederlands Mathematisch Congres, maart 2006 in Delft, hadden de Leidse wiskundestudenten Frank van Rest en Gonny Hauwert een half uur om voor een zaal wiskundigen hun actie toe te lichten. Hun verhaal kwam erop neer dat ze veel over het maken van de website en het omgaan met de media hadden geleerd. Diverse vraagstellers probeerden te achterhalen bij welke studieonderdelen de studenten nu vwo-kennis te kort gekomen waren, maar daar hadden deze woordvoerders van 'Lieve Maria' geen antwoord op. 'Geef eens een voorbeeld uit het college analyse' hielp een van de toehoorders ze nog op weg. Maar nee, niet over *analyse of algebra* spraken de 'Lieve Maria' studenten, ook al werden ze er nog zo dringend aan herinnerd, maar over *media*. *Media* was het sleutelwoord; en *Maria* natuurlijk.

## Prioriteiten voor de lerarenopleiding

Bij herhaling heb ik het over de ‘vakdeskundige’ leraar. Laat ik eerst duidelijk maken wat mij beweegt om dit punt van de vakdeskundigheid zo nadrukkelijk naar voren te halen. Ik baseer me hier op een serie ervaringen met leerlingen uit basisonderwijs en voortgezet onderwijs. De ervaringen variëren van uitwisselingen per email tot korte series bijlessen. Leeftijden en schooltypen lopen uiteen van basisschool groep 8 via de onderbouw van havo/vwo naar examenklassen vwo, en de activiteiten van standaard opgaven tot praktische opdrachten en profielwerkstukken. Ik zeg erbij dat deze ‘steekproef’ niet representatief is voor de jaargroepen waarin deze leerlingen zaten. Ik heb mijn ‘proefpersonen’ niet willekeurig gekozen, maar ze hebben zich zelf gemeld omdat ze een probleem hadden. Niettemin vermoed ik dat ze model staan voor grote groepen kinderen die ook een probleem hebben, maar er misschien niet zo goed weg mee wisten.

Voordat ik twee specifieke casussen bespreek, wil ik de rode draad noemen die uit deze waarnemingen naar voren komt, en dat is dat bijna al deze leerlingen aan hun lot overgelaten werden, dat hun leraar ongericht te moeilijke opdrachten gaf, of de vakkennis miste om uit de stof van het leerboek de relevante kennis naar voren te halen. Ik zei het zojuist ook al: leerlingen gaan dobberen of ze verdrinken. Natuurlijk moeten ze niet alles voorgekauwd krijgen, maar weggestuurd worden en geen aanspraak meer kunnen maken op advies of weerwerk gaat te ver.

Eerst wat bijspijkerwerk met een meisje uit 5 vwo dat geen vat kreeg op een praktische opdracht. Ze kon er niet achter komen wat de leraar bedoelde, en hij wilde

of kon haar dat ook niet vertellen. Mijn bijdrage was beperkt maar wel cruciaal: stilstaan bij de vraagstelling, en met tekeningen en tekst wat op papier proberen te krijgen; zaken waarvan ik vond dat ze daarmee bij haar eigen leraar had moeten zijn. Dat had ze wel geprobeerd, maar vergeefs. Het liep goed af, getuige haar verslag per email<sup>22</sup>:

*Ik had gister de constructie aan mijn vriendin en mijn leraar uitgelegd. Mijn leraar vond het geweldig, hij vroeg me om nog een extra kopietje te maken, dus had ik dat gedaan. Toen ik het hem vandaag met ons verslag gaf, was hij helemaal in zijn nopjes. Alsof dat kopietje zijn lieveling was. Bovendien zei hij ook dat hij altijd leerlingen een puntje extra geeft als die hem iets kunnen leren, en dat had hij; dus dat was ook mooi meegenomen.*

*Dus nogmaals heel erg bedankt. Morgen hebben we de presentatie. Maar helaas maar in 7 minuten, dus we gaan geen ingewikkelde constructies uitleggen. Had ik wel leuk gevonden maar ja...*

Hier gaat het goed. De leerling wint met externe hulp aan zelfvertrouwen. De leraar die “een puntje extra geeft” als leerlingen hem iets kunnen leren, het lijkt mooi. Maar hoeveel leerlingen blijven in zo’n situatie terneergeslagen achter? Leraren hoeven natuurlijk niet alles te weten, maar deze leerling was aanvankelijk het bos in gestuurd en werd, als je er goed over nadenkt, bij de beoordeling ook niet serieus genomen.

Maakt u dan nu kennis met Olivier, uit 2 vwo, met wie ik in maart 2006 twee keer twee uur werkte. Olivier had moeite met het hoofdstuk over gegevensverwerking en statistiek. Hij haalde op school zelden onvoldoendes, maar wiskunde was de uitzondering op de regel. Ik

kende hem zijdelings, toen ik met zijn ouders afsprak dat ik hem zou helpen bij de voorbereiding van de toets over het hoofdstuk. Hij leek me slim en opgewekt, en helemaal niet het type om slechte cijfers voor wiskunde te halen. Natuurlijk vereisen goede cijfers ook dat de leerling zich inzet en doorbijt. Oliviers werkhouding, daar had ik geen zicht op, voordat we aan de slag gingen.

De twee lessen, aan onze eettafel, waren onthullend. Hier zat een potentieel zeer goede bètaleerling, die weliswaar niet erg gemotiveerd begon, maar die wel in de kortste keren enthousiast te krijgen was. Maar de wiskunde was wekenlang langs hem heen gegaan. Zoiets lees je af uit een schrift. Er stond veel in dat schrift, maar bijna nooit was aan de aantekeningen te zien waarover ze gingen. Meestal stonden er rijtjes van genummerde getallen, kennelijk antwoorden van opgeven. Een enkele keer stond er een berekening, die dan te herkennen was aan het feit dat er een gelijkteken in voorkwam. Maar waar zijn berekeningen over gingen, en wat er mee bereikt werd, dat stond er niet.

Ik vroeg Olivier aan het begin van de eerste zitting, na zijn schrift met hem doorgekeken te hebben, of hij een som kon noemen uit de tweede helft van het hoofdstuk, waar hij niet goed uitgekomen was. Dat kon hij direct, want hij had zich al voorgenomen om over een aantal sommen een vraag te stellen. De betreffende opgave<sup>23</sup>, in het kader op pagina 28, lijkt op het eerste gezicht een platte rekensom. Olivier was vlot in staat om de berekeningen te maken. Hij deed het niet foutloos, maar hij reageerde goed op vragen en verbeterde zichzelf snel. Wat vooral opviel was de vlakheid. Hij deed onderdeel na onderdeel, maar er zat geen enkel reliëf in.

		<i>aantal personen</i>	<i>loon in €</i>
<b>1a</b>	Hiernaast zie je een overzicht van de maandlonen van de werknemers in een schoonmaakbedrijf.	10	1.000
	Laat met een berekening zien dat het gemiddelde loon € 2.200,- is.	7	1.200
<b>b</b>	Alle werknemers bij het schoonmaakbedrijf krijgen een loonsverhoging van 5%.	15	1.600
	Laat zien dat het gemiddelde loon ook met 5% stijgt.	5	2.200
		2	2.800
		1	29.000
<b>c</b>	Hoeveel euro's is het verschil in loonsverhoging tussen de meest- en de minstverdienende?		
<b>d</b>	Men stelt voor om het totale bedrag van de loonsverhoging zo te verdelen dat alle werknemers er met hetzelfde bedrag op vooruit gaan. Hoeveel loonsverhoging krijgt iedereen dan?		
<b>e</b>	Hoeveel procent loonsverhoging krijgen bij dit voorstel de laagstbetaalden? En hoeveel procent krijgt de hoogstbetaalde erbij.		

Waar wringt de schoen? Als je de opbouw van de opgave analyseert, is het duidelijk dat de auteur er op uit is om de leerling zelf een stelling te laten ontdekken, namelijk: als je een aantal getallen met één vast getal vermenigvuldigt (in deze opgave met 1,05), dan wordt ook het (rekenkundig) gemiddelde van die getallen met dat vaste getal vermenigvuldigd. In termen van salaris: als alle lonen met 5% stijgen, dan stijgt het gemiddelde loon ook met 5%.

Het zelf herkennen en formuleren van die stelling is de intellectuele kick van deze som; daarin komt het reliëf

naar voren. En over het laatste onderdeel is ook een mooie boom op te zetten, in het kader van de maatschappelijke vorming van de leerlingen. Maar in de les, vertelde Olivier, ging het helemaal niet zo. De lerares legde zelden iets uit. Je kon wel eens iets aan haar vragen, maar je moest zelf je sommen maken en de antwoorden controleren.

We zijn nog wat dieper op deze som ingegaan. Wat zou er gebeuren als iedereen er 100 Euro bij kreeg? Olivier had de goede intuïtie: het gemiddelde gaat ook 100 Euro omhoog. Vervolgens liet ik hem zien dat je deze conclusie ook zonder al dat rekenwerk kunt inzien. Ik gaf hem het voorbeeld van drie getallen, waarvan we in het midden lieten hoe groot ze waren.

Om ze uit elkaar te houden nummerde ik ze  $x_1$ ,  $x_2$  en  $x_3$  en het gemiddelde noemden we  $G$ , hetgeen inhield dat

$G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ : “de getallen eerst optellen en daarna de som door 3 delen”. Het leek Olivier wel logisch om dat zo te doen. Nu komt er bij alle getallen een vast bedrag  $s$  bij.

Wat wordt dan het nieuwe gemiddelde  $G_{\text{nieuw}}$ ?

Olivier schreef op:  $G_{\text{nieuw}} = \frac{x_1+s+x_2+s+x_3+s}{3}$ . Op dit punt aangekomen stakte de voortgang. De ervaring met algebraïsch manipuleren is zeer beperkt. Maar met uitleg over het samennemen van de drie termen  $s$ , en wat nadenken over het rekenen met breuken, zag Olivier goed in dat

$$G_{\text{nieuw}} = \frac{x_1+s+x_2+s+x_3+s}{3} = \frac{x_1+x_2+x_3+3s}{3} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} + \frac{3s}{3} = G+s$$

Ofwel: het nieuwe gemiddelde is het oude gemiddelde plus  $s$ . De ontdekking was nu compleet. We hadden iets bewezen dat altijd klopte, en dat ons veel rekenwerk bespaarde. Weliswaar hadden we het alleen voor drie

*De lerarenopleiding dient zich vooral op de vakdeskundigheid van de (toekomstige) leraar te richten.*

onbekende getallen gecontroleerd, maar dat het voor twee, of vier of meer getallen net zo ging, was Olivier direct duidelijk.

Deze twee gevallen zijn niet uitzonderlijk. De basisschoolleerkracht die zegt “helaas” ook te moeten rekenen met de kinderen van groep 3 is ook zo’n geval. Je zult als kind graag willen rekenen. Individuele contacten met andere leerlingen bevestigen dit beeld. Ze willen graag, maar ze krijgen te weinig sturing. Je zou hoopvol kunnen denken dat dit positief beleid van de leraar is: leer ze om het zelf uit te zoeken. Maar zo werkt het niet, want als leerlingen willen bespreken wat ze hebben uitgezocht, krijgen ze een cijfer en geen weerwerk. Dat komt doordat de leraar overladen is, maar het komt ook doordat sommige leraren vakkennis missen. Enerzijds is de afgelopen jaren het curriculum verbreed, bijvoorbeeld door de invoering van een keuzeonderwerp en van praktische opdrachten in de bovenbouw van havo en vwo. Je kunt als leraar niet alles weten. Anderzijds is in de programma’s van de opleidingen de aandacht voor het vak en de vakdidactiek afgenomen. Zeker de pabo’s en de tweedegraads opleidingen in het hbo zijn door de invoering van de beroepscompetenties steeds minder aandacht aan vak en vakdidactiek gaan besteden. Een toekomstige leraar moet bekwaam zijn op zeven gebieden, van “interpersoonlijk competent” tot “competent in reflectie en ontwikkeling”. Eén van die zeven is “vakinhoudelijk en

didactisch competent". Het is belangrijk, een leraar moet met anderen kunnen omgaan, en met collega's (want dat is weer een aparte competentie). Een leraar moet kunnen organiseren, moet van pedagogiek weten. Maar hoe liggen de verhoudingen? Hoeveel tijd besteedt een student aan een pabo aan rekenen en taal, en aan rekendidactiek en taaldidactiek? Soms niet meer dan één van de acht semesters die de opleiding duurt. Laten we vakdeskundige leraren opleiden, zowel de studenten voordat ze de school ingaan als de zittende leraren.

Eén van de kleine druppels op deze gloeiende plaat is het landelijke expertisecentrum voor de lerarenopleiding rekenen/wiskunde (ELWleR), dat het Freudenthal Instituut in samenwerking met verschillende lerarenopleidingen en lerarenopleiders vanaf 1 december 2006 vormgeeft. Door het actualiseren van de didactiekboeken over rekenen en wiskunde, scholing en discussie, bundeling en ontsluiting van informatie en doen van onderzoek ten dienste van de lerarenopleidingen wil het expertisecentrum ervoor zorgen dat de lerarenopleidingen voor vragen en verdere ontwikkeling een aanspreekpunt hebben.

## ICT en wiskundeonderwijs

Doordat ICT de school binnengekomen is, heeft de leraar andere mogelijkheden dan in het verleden. Zelfs vergeleken met vijf jaar terug zijn de mogelijkheden enorm toegenomen. De technologische vooruitgang speelt een rol in de organisatie van de lessen. Er zijn tegenwoordig 'Smartboards', computerschermen ter grootte van een schoolbord. Zo'n scherm reageert op aanraking, je kunt er op schrijven en je kunt opslaan wat je geschreven hebt, en dat zo nodig afdrukken. Je kunt er, zeg maar met de muis van je hand, de computer mee besturen, en dezelfde zaken die je op een PC kunt doen, kun je dus ook op zo'n schoolbord: processen modelleren, simulaties grafisch weergeven, een spel doen, bewegende beelden bekijken. "Het zijn maar een paar leraren die hiermee overweg kunnen." Ik citeer hier een leerling. Een ontwikkeling die de ene leraar omarmd heeft en die aan de andere leraar voorbij gegaan is, is de zogeheten Elektronische Leer-omgeving of ELO. Je vindt ze in het onderwijs in zeer veel gedaanten en onder vele namen, waarvan sommige suggereren dat ze alles bij het oude laten (ik denk aan het veel gebruikte BlackBoard). Andere systemen vertellen met hun naam wat duidelijker hun functie, zoals DWO, de Digitale Wiskunde Oefenomgeving, die het Freudenthal Instituut ontwikkeld heeft en aan scholen aanbiedt. Een eerste onderzoeksrunde, naar het leren van algebraïsche vaardigheden, laat zien dat leerlingen op deze wijze effectief leren, veel oefenen en in het bijzonder profijt hebben van de directe feedback die in de oefeningen ingebouwd is. Ook werkend aan 'gewone' computers, en vaak doen ze dat ook thuis, kunnen leerlingen veel bereiken. Bij statistiek kunnen

ze met behulp van de computer processen simuleren en grote hoeveelheden reële data verwerken, terwijl ik me de sommen van vroeger nog wel herinner: de waarschuwingsgegevens bestonden uit de getallen 3, 4, 4, 6 en 7 en de leerling werd gevraagd om gemiddelde, standaardafwijking, mediaan en modus te berekenen (vanwege de modus kwam het getal 4 twee keer voor).

Het Freudenthal Instituut heeft in de afgelopen jaren op dit punt belangrijke programmatuur ontwikkeld, en aansluitend ontwikkelingsonderzoek gedaan. Ik laat een voorbeeld zien van een zogenaamde *thinklet*. *Thinklet* is een term uit het Engels met een opvallende etymologie.



Engels voor ‘computerprogramma’ was *application* en een programmaatje werd met een verkleinwoord *applet* genoemd. Dat vond men erg algemeen, en programmaatjes die je aan het denken zetten, zoals we die in het wiskundeonderwijs gebruiken, kregen doorvariërend de naam *thinklet*. De *thinklet* die ik nu laat zien, werd bedacht en geprogrammeerd in het kader van het project ‘Speciaal Rekenen’, dat het Freudenthal Instituut uitvoert in het kader van de integratie van leerlingen met bijzondere behoeften in het reguliere basisonderwijs.

Het betreft hier een computerprogramma waarmee leerlingen zelf kunnen oefenen in klokkijken.

***Onderwijs kan meer uit ICT halen, en daarmee meer uit de leerling***

De klok loopt bij het starten van het programma gelijk met de klok van de computer. Op het beeldscherm kan de leerling de wijzers van de klok ‘beetpakken’ en verzetten. De cijfers op de digitale klok veranderen dan mee. De klok kan spreken en de achtergrond correspondeert met het tijdstip op de dag, Om 11 uur ’s ochtends is er een zon te zien die nog niet op zijn hoogste punt is, en als 11 uur digitaal als 23:00 te zien is, is de achtergrond donker, want dan is het nacht. Voor leerlingen in het Speciaal Onderwijs is dat niet gemakkelijk en het is wel belangrijk dat ze op deze wijze met tijd kunnen omgaan, en dat ze ook met tijdstippen leren rekenen. Hoe lang ben je met een bepaalde taak bezig geweest? Het kan later van groot belang voor ze zijn om dat te kunnen berekenen.

Waarom zou je kinderen dit soort activiteiten met de computer laten doen? Ik noem een aantal argumenten:

- *thinklets* zijn geduldig
- de leerling is voor 100% zelf aan het werk, anders gebeurt er namelijk niets. Als de leerling er geen zin in heeft en gaat zitten MSN-en of achter het scherm in slaap valt, gebeurt er natuurlijk ook niets. Maar: wie wil, kan aan een stuk door zijn gang gaan.
- *thinklets* zijn consequent in hun aanbod. Elke leerling krijgt de stof op dezelfde manier aangeboden. Ook dat heeft een tegenhanger: *thinklets* weten niet dat een bepaalde leerling een aantal stappen zou kunnen overslaan, of misschien beter, ze zijn daarvoor nog niet subtiel genoeg.
- *thinklets* hebben toeters en bellen die de docent voor het bord niet heeft: beweging, variatie in kleur en vorm, de mogelijkheid van directe feedback, een onbegrensd aanbod (bijvoorbeeld van oefenmateriaal).
- *thinklets* zijn via internet te bereiken; ze zijn van alle plaatsen (ook thuis!), van alle tijden (ook na het eten!) en van alle leeftijden (ook met opa en oma te bekijken), zolang je maar de beschikking hebt over een browser.

De beschikbaarheid van software betekent nog niet dat het onderwijs erdoor verbetert, en dat de leraar zich bijvoorbeeld kan bezighouden met de interactie met de leerlingen, of met het analyseren van de vorderingen die ze met het programma maken. Daarvoor moet aan stevige randvoorwaarden voldaan zijn:

- de school moet voldoende apparatuur en ruimte hebben.

- de leraar moet met de computer kunnen omgaan, en dat vraagt aanzienlijke scholing, vooral voor de generatie die er niet mee opgegroeid is.

Neem mijzelf: ik zag de eerste rekenmachine als vakantiekracht bij mijn vader op het werk. Het was zo'n machine op handkracht. Als je de zwengel heen en weer bewoog, telde hij op of trok hij af, en meer kon hij niet, hoewel u terecht zou kunnen opmerken dat vermenigvuldigen herhaald optellen is, en dat een apparaat dat kan optellen dus ook kan vermenigvuldigen. Zeker, u hebt gelijk, en ik nodig u van harte uit om deze redenering eens toe te passen om  $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$  te berekenen. Het eerste elektronische wat ik zag, waren in het eerste jaar van mijn studie twee programmeerbare HP's waarop je resultaten van natuurkundeproeven kon verwerken, bijvoorbeeld om de beste rechte lijn door een puntenwolk te bepalen. Het fenomeen dat de leraar bij het werken met de computer links en rechts door zijn leerlingen ingehaald werd, ken ik uit eigen ervaring. Het behoeft geen nader betoog dat er scholing nodig is om ICT voor het reken- en wiskundeonderwijs te kunnen inzetten.

Het hier geschetste gebied van ICT en reken- en wiskundeonderwijs is een van de terreinen waarop het Freudenthal Instituut actief is, in ontwikkelwerk, scholing en onderzoek. Een van de lopende onderzoeken is het door de ProgrammaRaad OnderwijsOnderzoek van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO) gefinancierde onderzoek 'Tool Use'; de volledige naam in het Nederlands luidt: "Het gebruik van tools in een innovatief leerarrangement voor wiskunde."

Het gaat om het leren van wiskunde, door leerlingen in de tweede klas, die zich het begrip *functie* eigen gaan maken. Dit begrip staat of valt bij dynamiek en bij de verschillende gedaanten waarin functies in de wiskunde voorkomen. De onderzoekers willen weten hoe de verwerving van het begrip kan worden ondersteund door inzet van de computer, juist omdat dynamiek essentieel is en met pen en papier moeilijk te visualiseren. Ook is het moeilijk om leerlingen allerlei verschillende gevallen te laten bestuderen en om ze te laten generaliseren over die gevallen. Leerlingen gebruiken de computer hier als onderzoeksmiddel, net zoals dat in het hedendaagse wiskundig onderzoek veel gedaan wordt.

Interessant in dit project is verder dat een van de onderzoekers een docent uit het Voortgezet Onderwijs is. Hij doet dit in het programma Leraar in Onderzoek van NWO, gebied Exacte Wetenschappen. Dit programma biedt scholen voor voortgezet onderwijs de middelen om een docent te vervangen, die dan één dag per week gedurende maximaal twee jaar bij een universiteit wetenschappelijk onderzoek kan doen.

Het Freudenthal Instituut heeft op dit moment drie van deze leraar-onderzoekers, van wie er dus één meewerkt aan Tool Use. Het gebied Exacte Wetenschappen heeft met dit programma al jaren een voortrekkersrol, die nu wordt nagevolgd door het in februari 2007 gestarte Programma Onderzoek 'Vernieuwing Bèta-vakken' van het Platform Bèta Techniek. Daarin zullen in Nederland 20 docenten uit het voortgezet onderwijs promotie-onderzoek doen over onderwerpen die aansluiten bij vernieuwingen die in 2010 in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs zullen ingaan.

Op diverse aansluitende terreinen doet het Freudenthal Instituut onderzoek naar de mogelijkheden van ICT in het wiskundeonderwijs. Ik noem het onderzoek van Paul Drijvers over de vraag of de computer de functie van pen en papier kan overnemen met behoud van de mogelijkheden op theoretische reflectie<sup>24</sup>, het werk van Arthur Bakker en Koeno Gravemeijer over het gebruik van *applets* bij vroeg statistiekonderwijs en het werk van Peter Boon in samenwerking met het Sint Michael College in Zaandam om algebraonderwijs onder te brengen in een Elektronische Leeromgeving, waarin de leerling een *applet* gebruikt voor zowel de opgaven als voor intelligente feedback. Veel andere zaken moet ik hier ongenoemd laten; ik sluit dit onderwerp af met de prioriteiten voor de komende jaren voor onderzoek op ICT-gebied. Dat zijn: leren in een spelomgeving, oefenen met intelligente feedback, wiskundig leren onderzoeken, en de toepassingen van nieuwe educatieve hardware (zoals computerscherm op schoolbordformaat). Voor de liefhebber van jargon: *games, thinklets, the student-researcher and educational tools.*

## Waar staan we en hoe gaan we verder?

Ik vat de kern van mijn betoog samen. Ik pleit voor

- vakdeskundige leraren, in basisonderwijs en voortgezet onderwijs
- frequente interactie tussen leerling en leraar
- zinvol oefenen
- een lerarenopleiding die zich vooral richt op de vakdeskundigheid van de leraar
- onderwijs dat meer uit ICT haalt.

Ik zie het als mijn taak in de komende jaren om onderwijs en onderzoek in gang te houden of nieuw op te zetten dat hierop gericht zal zijn.

Ik prijs mij gelukkig te werken binnen en met een enthousiast team, dat hart heeft voor het reken- en wiskundeonderwijs, dat deskundig, creatief en resultaatgericht is. Freudenthal Instituut, ik heb het afgelopen half jaar met zeer veel plezier kennism gemaakt met jullie en met jullie werk. Ik dank Jan de Lange voor het inzicht en de energie waarmee hij het instituut de afgelopen 20 jaar geleid heeft en het gemaakt heeft wat het nu is. Jan, ik ben blij dat je nog wat dingen overgelaten hebt om te doen, en ik kijk daarnaar uit.

Hetzelfde geldt voor de samenwerking met studenten en met vele anderen binnen en buiten de Universiteit Utrecht, binnen de didactiek van de bètawetenschappen, binnen de wiskunde, binnen de onderwijswetenschap. Dat nu ook de geschiedenis van de wiskunde weer naast de deur is, Jan Hogendijk en Henk Bos, verheugt mij zeer.

Mocht ik u vergeten zijn, komt u mij daar dan graag in Overvecht op wijzen.

Aan de slag voor inhoudrijk, stimulerend en dus humaan wiskundeonderwijs.

Voor de wiskundeleraren onder ons ligt hier een taak. Om, in navolging van de koeiennon, niet te rusten voordat 'het' overgekomen is, voordat er een glimlach op het gezicht van de leerling of student verschenen is.

Voor de didactici ligt hier een taak.

Maar vandaag vooral: voor de nieuwe hoogleraar "didactiek van het wiskundeonderwijs" ligt hier een taak.

Ik heb gezegd.

## Noten

- <sup>1</sup> Ik zal dit hierna met “wiskundeonderwijs” aanduiden.
- <sup>2</sup> Te beginnen met een opmerking van Berna Sillessen, 2 februari 2006
- <sup>3</sup> Rafaël van der Steen, 21 januari 2006
- <sup>4</sup> Van 1971 tot 1972 en van 1977 tot 1992 aan het Christelijk Gymnasium en, daartussen, van 1974 tot 1975 aan de Koningin Wilhelmina Mavo, beide te Utrecht.
- <sup>5</sup> Stelling 4 bij het proefschrift ‘Elke positieve actie begint met critiek’ van Sacha la Bastide-van Gemert (Groningen, 11 mei 2006)
- <sup>6</sup> Met dank aan Jean-Marc van Tol (voor het Fokke en Sukke team).
- <sup>7</sup> Wiskunde A1
- <sup>8</sup> *Regeling examenprogramma's profielen v.w.o./h.a.v.o. wiskunde*, gepubliceerd in *Uitleg* en in mei 1998 in een aparte brochure van de directie voorlichting van OC&W: ISBN 90 346 3577 5
- <sup>9</sup> G.J.J.M. Straetmans, T.J.H.M. Eggen, ‘Afrekenen op rekenen: over de rekenvaardigheid van pabo-studenten en de toetsing daarvan’, *Tijdschrift voor Hoger Onderwijs* 23 (november 2005), nr. 3, pp. 123-139
- <sup>10</sup> Joost Meijer e.a., *Reken- en Taalvaardigheid van Instromers Lerarenopleiding Basisonderwijs. Voorstellen ter verbetering van de reken- en taalvaardigheid van instromende studenten Lerarenopleiding Basisonderwijs, gebaseerd op een kleinschalig verkennend onderzoek*, Amsterdam: SCO Kohnstamm Instituut en Rotterdam: RISBO, Mei 2006
- <sup>11</sup> In 1986 door de minister van OC&W ingesteld, in 1987 voor het eerst en in 2004 voor de vierde keer gehouden in groep 8. J. Janssen, F. van der Schoot, B. Hemker, *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4. Uitkomsten van de vierde peiling in 2004*, Arnhem: Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling 2005, PPON-reeks nummer 32.
- <sup>12</sup> *Verkenning Versteving van kennis in het onderwijs*, uitgebracht aan de minister van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap. Uitgave van de Onderwijsraad, Den Haag, 2006.
- <sup>13</sup> Cijfers van het Centraal Bureau voor de Statistiek, op 24/02/2007 geraadpleegd via [www.cbs.nl](http://www.cbs.nl).

- <sup>14</sup> Cinob, Cito, FI en SLO
- <sup>15</sup> Bijvoorbeeld R.Vollmeyer, F. Rheinberg, 'A surprising effect of feedback on learning', *Learning and Instruction* 15 nr. 6 (2005), pp. 589-602 en P.-F. Siew, 'Flexible on-line assessment and feedback for teaching linear algebra', *Int. Journal of Math. Education in Science and Technology*, vol. 34, no. 1 (2003), pp. 43-51
- <sup>16</sup> [www.oecd.org/edu/eag2006](http://www.oecd.org/edu/eag2006)
- <sup>17</sup> Vastgelegd in artikel 45 van de Wet op het Primair Onderwijs (WPO)
- <sup>18</sup> Verslag door Marja Bos in *Euclides* 71 (1995/6), pp. 20-21
- <sup>19</sup> *Eerste peiling 1999-2000* door het Monitoringsproject van het Tweede Fase Adviespunt, te raadplegen via [www.tweede-fase-loket.nl/monitoring/index.php](http://www.tweede-fase-loket.nl/monitoring/index.php)
- <sup>20</sup> L.F. Feiner deelt in een ingezonden brief (NRC, 9 februari 2007) mee dat eerstejaarsstudenten natuurkunde met een N&T achtergrond de wiskunde ook onvoldoende beheersen. Minder dan 15% van de eerstejaars zijn N&G'ers, zegt de schrijver, en die "komen er vervolgens snel achter dat ze de verkeerde studie gekozen hebben."
- De briefschrijver beseft zelf niet hoe vreselijk deze mededeling is. In de eerste plaats ziet hij/zij over het hoofd dat de stap van de technische universiteiten belangrijk aan de uitholling van het profiel N&T heeft bijgedragen. N&T was veel vitaler geweest als N&T het vanzelfsprekende toelatingsniveau tot de technische studies had bepaald. In de tweede plaats maakt het blijkbaar niet uit als studenten, die door de TUs zelf met N&G binnengehaald zijn, de studie vervolgens toch niet aankunnen. Het CBS gaf 640 als voorlopig aantal eerstejaars studenten wo-natuurkunde over het jaar 2005/2006 (voorlopig aantal per 2 maart 2007); *bijna honderd* jonge mensen kiezen dus elk jaar verkeerd.
- <sup>21</sup> P. van der Zwaard, W. Laaper, *Vakdossiers 2000. Wiskunde*, Enschede: SLO, februari 2001, p. 26, zie ook pp. 19, 61
- <sup>22</sup> email van Mirjam, 15 december 2004
- <sup>23</sup> E. van der Eijk e.a., *Moderne Wiskunde* editie 8 (Groningen: Wolters-Noordhoff, 2004), deel 2a vwo, p. 104
- <sup>24</sup> Kieran, C. & Drijvers, P. "The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra", *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11 (2006) nr. 2, pp. 205-263.



De 0 te 5 tugen maken 9 d 0 r het vtel coif 370 te 5 onc.  
 Facit 426 d 6 r 10  $\frac{430}{513}$  r

te	onc	d	r	te	onc	dug
16	12	9	0	16	12	9
12	12	12	0	12	12	12
25	20	36	0	25	20	36
65	50	100	0	65	50	100

2150 / 430  
 2565 / 513

960400  
 726960  
 121060  
 242120  
 262450000

12772  
 502035  
 1683056  
 262450000  
 256555555  
 256555555  
 222

De 24 te 8 onse coiften 3 d 5 r 3 ftm) wat Sullen 3 te 15 dug:  
 coif ten facit 3 d 5 r 3 ftm)

te	onc	d	r	te	onc	dug
24	16	7	0	24	16	7
16	16	24	0	16	16	24
392	240	5003	ftm)	392	240	5003
20	725	975	115	20	725	975
7040	7250	9750	1150	7040	7250	9750
20	725	975	115	20	725	975
5227	70621	5657925		5227	70621	5657925

sig	721	5205	7040
975	721	7040	721
	13125		
	15600		
	54000		
	5657925		

562  
 886  
 10221  
 5657925  
 975555  
 9777  
 99

721  
 12  
 3-0-5-3

# De koeiennon

Hoe rekenen en wiskunde te leren,  
 en van wie?

Jan van Maanen

