Wat is realistisch reken-wiskundeonderwijs?

- een voordracht van Koeno Gravemeijer -

J. ter Heege
FIsme/Panama, Universiteit Utrecht

Op het symposium dat ter gelegenheid van zijn afscheid werd gehouden, gaf Koeno Gravemeijer de eerste voordracht met als titel: 'Wat is realistisch reken-wiskundeonderwijs?'. De titel dekte zijn boodschap maar ten dele, want in de voordracht werd meer dan de vraag naar wat realistisch reken-wiskundeonderwijs eigenlijk is, aan de orde gesteld. Aan het eind van zijn betoog stond Gravemeijer uitgebreid stil bij de vraag: 'Wat moeten leerlingen van nu leren om klaar te zijn voor de maatschappij van morgen?' Daarnaast ging hij in op enkele van de punten van kritiek op het realistische reken-wiskundeonderwijs. We zullen deze drie punten in dit verslag aan de orde stellen. Gravemeijer gaat aan de hand van drie trefwoorden op het eerstgenoemde punt in: realistisch, contexten en 'wiskunde als activiteit'.

1 Waarom werd realistisch reken-wiskundeonderwijs ontwikkeld?

Het antwoord op de vraag waarom realistisch reken-wiskundeonderwijs werd ontwikkeld, luidt niet: 'om het rekenen leuker te maken'. Het ontstond vooral omdat het rekenonderwijs destijds niet voldeed, omdat kinderen geen inzichten ontwikkelden, omdat ze de kennis die ze verwierven niet konden toepassen en omdat ze de regeltjes die ze leerden door elkaar haalden. Rekenen op school en het leven van alledag waren eertijds strikt gescheiden werelden en dat zou moeten veranderen, meenden de onderwijsvernieuwers van toen.

In het onderwijs van toen werden kinderen met getallen geconfronteerd die losgemaakt waren van de concrete situaties vanwaaruit ze ontstaan. Uit onderzoek van Hart (1981) bleek bijvoorbeeld dat leerlingen de hen bekende cijferalgoritmen niet toe pasten in contextopgaven. Nog onlangs meldde O'Brien dat op de vraag een verhaaltje bij een som als 6 x 3 = 18 te bedenken, driekwart van de leerlingen niet tot een goed antwoord kwam. De helft van de leerlingen kwam zelfs met een verhaaltje dat over optellen ging.

Het mag gezegd worden, de weg naar de abstractie is lang en vol kuilen. Sinds enige tijd ligt het realistisch reken-wiskundeonderwijs onder vuur. Men hanteert de resultaten van het PPON-onderzoek uit 2004 en vergelijkt die met de resultaten uit 1987. Dan blijkt dat er op verschillende punten vooruitgang is geboekt - getallen en getalrelaties, geavanceerdere strategieën, schattend kunnen rekenen, procenten, verhoudingen en breuken - maar dat de prestaties van kinderen op enkele punten ook achteruit zijn gegaan - en wel bij bewerkingen, ofwel het cijferen bij optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Critici hebben hun oplossing klaar. Ze zeggen: 'Leer ze regels en procedures, inzicht komt later wel'. Daar zit een paradox in. Die luidt dat rekenen-wiskunde moeilijk, maar het leren en onderwijzen van rekenen-wiskunde daarentegen makkelijk zou zijn.

2 Realistisch reken-wiskundeonderwijs, hoe realistisch is dat?

Allereerst licht Gravemeijer toe wat rekenen-wiskunde zo moeilijk maakt. Wiskunde is, zegt hij, abstract en een resultaat van een lang ontwikkelproces. Hij geeft een voorbeeld. Vanuit het tellen ontwikkelt zich, mede door het opzeggen van de telrij, het inzicht in getallen. Dit mondt uit in resultatief tellen. Uiteindelijk biedt dit de mogelijkheid om te leren rekenen. Bij dit proces zijn enkele niveaus te onderkennen. We zien dat jonge kinderen aanvankelijk de vraag: 'Hoeveel is 4 + 4?', niet begrijpen, terwijl ze wel weten dat vier appels en vier appels samen acht appels zijn. Zij koppelen getallen nog aan telbare objecten, zoals vier appels, vier kinderen of vier knikkers, ... Op een hoger niveau is '4' een wiskundig object, dat zijn betekenis ontleent aan een netwerk van getalrelaties, zoals Van Hiele zegt: 4 = 2 + 2 = 3 + 1 = 5 - 1 = 8 : 2 = ..

Nu bestaat het gevaar dat we onderwijs geven op het niveau van getalrelaties, terwijl leerlingen zich nog op het concrete niveau van telbare objecten bevinden en dat we jonge kinderen onderwijs geven in de abstracte wereld van getallen - bijvoorbeeld door 6 + 7 = 6 + (4 + 3) = (6 + 4) + 3 = 10 + 3 = 13, terwijl zij zelf nog aan con-

crete objecten denken. De leraar kan uitleggen dat: 7 + 6 is 13, omdat 7 + 3 = 10, 6 = 3 + 3 en 10 + 3 gelijk is aan 13, maar als getallen voor de leerlingen nog geen op zichzelf staande objecten zijn, kunnen zij deze redenering niet volgen. In het traditionele rekenonderwijs werd deze kwestie eigenlijk niet als probleem onderkend.
Hoe komt het dat kinderen zoveel moeilijkheden ondervinden bij het leren van rekenregeltjes? Een van de redenen is dat de beoogde abstractie het resultaat is van een lange ontwikkeling van eeuwen. We willen dat kinderen die ontwikkeling - versneld, dat wel - ook doormaken. Door onderwijs proberen we de groei van de wiskundige kennis van kinderen zorgvuldig te ondersteunen, wat als een kenmerk van het realistische reken-wiskundeonderwijs mag worden beschouwd.

3 Wat is realistisch reken-wiskundeonderwijs?

Het begrip ‘realistisch’ wordt niet altijd zo begrepen als wij het bedoelen. Soms wordt bij ‘realistisch’ aan ‘alledaagse werkelijkheid’ of ‘leefwereld’ gedacht, terwijl wij met reëel ‘betekenisvol’ menen en ‘realistisch’ op ‘zich realiseren wat de betekenis is’ duidt. Realiteit is dan wat je als realiteit ervaart. Dat kan ook wiskunde zijn of de wereld van de getallen. Bij ‘reëel’ in de zin van ‘als reëel ervaren’, gaat het om situaties waar de leerlingen weten hoe je zinvol kunt handelen. Een en ander betekent bijvoorbeeld dat wat als reëel wordt ervaren, verandert als je meer leert. Het doel van contexten daarbij is tweeledig. Het gaat bij contexten om zowel zingeving als om startpunten voor wiskundig redeneren.

Freudenthal (1991) heeft deze interpretatie van het begrip realiteit verbonden met *common sense*. *Common sense* is voor een wiskundige niet hetzelfde als voor een leek. Gravemeijer noemt als voorbeeld het probleem van de levensduur van batterijen. Hoe kun je die levensduur meten? Stel dat je twee merken batterijen hebt. Welke is het beste? Je neemt bijvoorbeeld van elk merk tien batterijen en gaat na welke van deze twee groepen het langste werkzaam is. Statistische data worden daarbij gebruikt om een praktische vraag te beantwoorden. Het probleem wordt om pragmatische redenen opgelost. Maar er is ook een wiskundig motief, nadenken over de vraag hoe je de data het beste kunt analyseren en representeren.
Waarom zouden we problemen uit de alledaagse werkelijkheid gebruiken om met wiskundige middelen op te leren lossen? Daarvoor zijn verschillende redenen. Een ervan is dat we beogen de puur wiskundige interesse van leerlingen te cultiveren. Een andere is dat we leerlingen ertoe willen aanzetten om, in wiskundig perspectief, op het eigen mentale handelen te reflecteren. Ook dat is een aspect van de wens om de wiskundige interesse te bevorderen.

4 Wiskunde als activiteit

Het gaat in de wiskunde namelijk om een specifiek soort activiteit, meer dan alleen om ‘wiskunde leren door te doen’. Freudenthal definieerde de wiskundige activiteit als de activiteit van wiskundigen en noemde daar een drietal aspecten bij
– het oplossen van problemen;
– het zoeken van problemen in de maatschappelijke werkelijkheid;
– het organiseren van de oplossing ofwel het mathematiseren.

Vooral dit ‘mathematiseren’, het ‘verwiskundigen’, is in zijn ogen een belangrijk begrip, waaruit het streven naar algemene geldigheid - Kan ik zoiets elders toepassen? Is het altijd zo? Kan ik dat beredeneren of bewijzen? - en naar exactheid voortvloeit en de behoefte om je activiteit zo beknopt mogelijk weer te geven. Natuurlijk gaat het er ook om dat je ‘zeker’ bent van de oplossing die je zoekt. Treffers (1987) onderscheidde het horizontaal mathematiseren - de vertaling naar de wiskunde - en het verticaal mathematiseren - activiteiten binnen de wiskunde. Ook bij verticaal mathematiseren zou het om verwiskundigen moeten gaan, met name om de vraag of het efficiënter kan. Gravemeijer stelt voor om aan het mathematiseren een derde element toe te voegen:
– horizontaal mathematiseren;
– verticaal mathematiseren;
– bewerkingen uitvoeren

Hij werkte dit eerder uit in een bijdrage aan ‘Freudenthal 100’, met de titel ‘Revisiting Mathematics education revisited’.[1]

5 Guided reinvention

Een van de kernideeën van Freudenthal is dat leerlingen verkortingen van oplossingen voor problemen ‘uitvinden’. Door horizontaal en verticaal mathematiseren kan de leerling de beoogde wiskunde zelf opnieuw uitvinden, maar natuurlijk niet zonder dat je hem daarbij hulp biedt. Van de leraar - en op de achtergrond evenzeer de ontwikkelaar - wordt verwacht dat deze een route ontwerpt waar de leerling langs loopt, zodat hij iets kan heruitvinden. Daarbij gaat het erom dat de leraar de juiste vragen stelt en de geëigende discussie op gang brengt. Het principe van de *guided reinvention* is in Nederland eigenlijk alleen voor de algoritmen uitgewerkt, zegt Gravemeijer, en dan wordt het ‘progressief schematiseren’ genoemd. Natuurlijk is het principe van ‘progressief mathematiseren’ ook op andere leerstofonderdelen toe te passen. Het kan bijvoorbeeld ook uitgewerkt worden voor wat Dolk *big ideas* heeft genoemd, kerninzichten

die kinderen zich eigen zouden moeten maken, zoals bijvoorbeeld hoe het tientallig stelsel in elkaar steekt. Hij laat een en ander zien aan de hand van een staartdeling die bij de oplossing van het ‘Feijenoord’-probleem kan worden ingezet.
Het probleem is als volgt. Er willen 1296 supporters een uitwedstrijd van Feijenoord bijwonen. Ze reizen per bus naar de wedstrijd. In een bus gaan 38 supporters. De staartdeling 1296 : 38 kan via kolomsgewijs rekenen als volgt worden uitgerekend en steeds verder verkort:

38/1296\34	38/1296\34	38/1296\34
380 – 10 ×	380 – 10 ×	1140 – 10 ×
916	916	156
380 – 10 ×	760 – 20 ×	152 – 4 ×
536	156	4
380 – 10 ×	76 – 2 ×	
156	80	
38 – 1 ×	76 – 2 ×	
118	4	
38 – 1 ×		
80		

Er is een spanning tussen *guidance* en *invention*: wat laat je leerlingen zelf heruitvinden en hoever ga je daarmee? Met daartegenover: moet je het principe van de geleide heruitvinding reserveren voor enkele kernonderwerpen in het curriculum voor rekenen-wiskunde? In kringen van ontwikkelaars en onderzoekers binnen de realistische kring zijn hier verschillen in opvatting over. Soms lijkt een opvatting wat doorgeschoten en wordt de uitlijning zeer verfijnd, met voorgestelde uitwerkingen van leerstof in kleine stapjes. Het gevaar is aanwezig dat het onderwijs daardoor voor leerlingen niet uitdagend genoeg is, zoals in het verleden in het traditionele rekenonderwijs ook het geval was. *Reinvention* is geen doel op zich, vindt Gravemeijer, het gaat eigenlijk slechts om twee kwesties: wiskunde als activiteit, met inzicht als eindresultaat.
Hiermee komt Gravemeijer bij de traditionele aanpak van het rekenen in Nederland, waarvoor de gebaande wegen zo kenmerkend zijn, maar wat ook in het huidige realistische reken-wiskundeonderwijs helaas vaak voorkomt. Leerlingen worden er nooit, althans naar Gravemeijers opvatting veel te weinig, voor interessante problemen geplaatst. Er zijn weinig uitdagingen en geen Aha-Erlebnissen. Er is ook geen aanleiding om op eigen oplossingen of die van anderen te reflecteren. Allemaal zaken die zowel voor goede leerlingen als voor zwakke leerlingen ongunstig zijn.

6 Emergent modelleren

Gravemeijer introduceert het begrip ‘emergent modelleren’. Met deze term beoogt hij de steeds verder gaande abstractie, als doel van de wiskunde, nader vorm te geven. In het modelleren van informele activiteiten in een betekenisvolle context ziet hij de start van een langlopend leerproces dat uiteindelijk uit moet komen bij een model voor een meer formeel wiskundig denken. Emergent modelleren staat dus in dienst van het ontwikkelen van wiskundige kennis: het beschrijft de weg van informeel naar formeel denken en redeneren. In het begin van het langlopende leerproces ontleent het model zijn betekenis aan de context waarin het is ingebed, allengs verschuift de aandacht naar wiskundige relaties die in het spel zijn en geeft het model meer en meer betekenis aan relaties binnen de wiskunde. Zo ontwikkelt het model zich van een ‘model van’ tot een ‘model voor’ (meer formeel) wiskundig redeneren.
Gravemeijer licht zijn ideeën toe met een voorbeeld van het meten van snelheden van auto’s. De gemeten snelheid kan in een grafiek worden weergegeven door middel van staafjes. Al die staafjes hebben een zekere verdeling, met een bepaalde dichtheid. Het probleem is dus het meten van snelheden van auto’s - het wiskundige model is een grafiek met staafjes. Daarmee kan, los van de concrete werkelijkheid, een redenering worden opgezet, die uiteindelijk tot conclusies leidt. Deze conclusies moeten worden terugvertaald naar de concrete werkelijkheid van de snelheidsmetingen. Hoe zit het modelleren daar dan in? Wel, in de eerste plaats kijk je naar de metingen die worden weergegeven met staafjes, vervolgens realiseer je je dat het eigenlijk voldoende is de eindpunten van de staafjes te bekijken. Daarmee kun je voor de voortgang van je beschouwing volstaan. De meetpunten hebben zo de vorm van een lijngrafiek gekregen, die op zich kan worden beschouwd. Je kunt vervolgens de verdeling van de meetpunten bekijken, met haar kenmerken. Ze is bijvoorbeeld symmetrisch of juist scheef. Zo bouw je het model steeds verder op en stap je over van de ene naar de andere symbolisering.

7 Het socio-constructivisme

Het realistisch reken-wiskundeonderwijs gaat vooral over leerstofinhouden, leergangen en activiteiten van leerlingen. Het socio-constructivisme richt zich vooral op het handelen van de leraar. Zo bezien vullen beide theoretische standpunten elkaar aan. Het constructivisme wordt gezien als pedagogisch voorschrift met het adagium dat ‘iedereen zijn eigen kennis construeert’. Dit zou voor de leraar gelden, maar ook voor de leerling. Door dit uitgangspunt eng te interpreteren, sluipt er echter een misverstand in de theorie: het constructivisme zegt dan dat ‘de leerling het allemaal zelf moet doen’. Maar hoe je het ook wendt of keert, leerlingen construeren hun kennis altijd! Het gaat er niet om ‘òf’ dit het geval is, maar ‘wat’ er geconstrueerd wordt en ‘hoe’ die constructie tot stand komt, stelt Gravemeijer, ‘Als de leerling het helemaal zelf moet uitvinden, hoe moet de leraar dit uitvinden dan sturen?' Op de vraag van het 'hoe' geeft de realistische theorie het volgende antwoord: wiskunde wordt gezien als activiteit, die middels (re)invention ontstaat. De leraar stelt zich dan de vraag hoe hij dit proces van (re)invention van de leerling in de dagelijkse praktijk kan sturen. Daarvoor kun je gebruik maken van een hypothetisch leertraject, dat verwijst naar de mentale activiteiten waarvan je verwacht dat de leerling ze zal uitvoeren als hij een opdracht krijgt. En je kunt die activiteit verbinden met te bereiken leerdoelen.

De rol van de leraar in het onderwijsleerproces is nu nadrukkelijk in beeld. Modern reken-wiskundeonderwijs is probleemgeoriënteerd. Maar probleemgeoriënteerd onderwijs is allerminst eenvoudig te realiseren, weten we. Of de leraar er in slaagt dit type onderwijs te geven en of leerlingen een probleemoplossende houding kunnen aannemen, is afhankelijk van het klimaat in de klas en van sociale normen die er heersen. Dit gaat over verwachtingen en ideeën die er in de klas spelen, over de rolverdeling tussen leraar en leerling - wie doet het denkwerk eigenlijk? Welke normen worden in deze klas aangelegd voor een goed antwoord, heeft de leraar procedures met de leerlingen besproken - verwacht hij van zijn leerlingen een wiskundig correcte redenering die de leerling kan uitleggen? Naast *social norms* voor de wijze waarop leerlingen met elkaar en met de leraar omgaan, zijn er ook *socio-mathematical norms*, die ingaan op de vraag wat wiskunde is en hoe je wiskunde bedrijft - wat is een wiskundig probleem en wat is een wiskundige oplossing? En ook: wat is een wiskundig gezien betere oplossing? Met dit type vragen houdt het socio-constructivisme zich bezig.

8 Doelendiscussie

Zijn basisvaardigheden in het rekenen een noodzakelijke voorwaarde voor het leren van wiskunde? In de discussie die momenteel speelt, beweren sommigen dit met grote stelligheid. Maar wat zijn dan die basisvaardigheden? Behoort daar ook het cijferen toe? Gravemeijer meent dat vermenigvuldigingen met grote getallen, eventueel met komma's, geen voorwaarde zijn voor het leren van algebra of integraal en differentiaal rekenen en evenmin voor het leren van meetkunde. Zo bezien is het cijferen niet per se nodig om later wiskunde te begrijpen. Of is er in de discussie iets anders aan de hand? Moeten we de lat voor leerlingen wat hoger leggen, zoals de commissie van Meijerink zegt? Moeten de leerlingen meer onthouden bijvoorbeeld? Dit leidt zonder twijfel tot de noodzaak van meer training, waardoor er minder tijd beschikbaar is voor het ontwikkelen van wiskundige inzichten. De critici van het moderne reken-wiskundeonderwijs poneren dat vroeger alles beter was. Maar, zou de reactie hierop moeten luiden, heeft de toekomstige maatschappij er behoefte aan dat leerlingen de leerstof van destijds goed beheersen? In de huidige maatschappij tekenen zich tendensen af die duiden op informatisering en automatisering van vaardigheden die vroeger werden onderwezen. De doelen van ons onderwijs moeten daarom in die richting worden bijgesteld, meent Gravemeijer, waardoor de eisen die we aan het onderwijs mogen stellen beter aansluiten bij die van de huidige en wellicht ook van de toekomstige maatschappij. Het idee dat het vroeger beter was gesteld met het onderwijs is dus een drogredenering. Het weerspiegelt een opvatting die 'met de rug naar de samenleving' staat.

9 Toekomst

Hoe zou ons onderwijs van de toekomst er dan uit moeten zien? Het onderwijs is in beweging, omdat de maatschappij zich ontwikkelt. Dat hoort ook zo. We kunnen er zeker van zijn dat we in de toekomst meer en meer via de computer zullen interacteren met de werkelijkheid. Dit betekent dat het leren verzamelen van digitaal opgeslagen informatie, om dit te analyseren en er processen mee aan te kunnen sturen, een hoge prioriteit krijgt. Een leerling moet dus begrijpen wat de computer doet en hoe hij het apparaat kan inzetten ten eigen bate. Dit houdt, met andere woorden, het begrijpen van de achterliggende processen in de werkelijkheid in. Wat de computer toont, is een model van die werkelijkheid. De kwantitatieve gegevens die de computer kan leveren, bieden wiskundige modellen die de samenhang tussen variabelen vertegenwoordigen. Hier zal de leerling greep op moeten proberen te krijgen.

10 Gravemeijers persoonlijke toekomst

Tot slot gaat Gravemeijer in op zijn eigen toekomst. Waar zal hij in zijn nieuwe functie aan werken? Sommige zaken houden hem meer bezig dan andere. Hij noemt het voorbeeld van het project dat uitgevoerd wordt op verzoek van de 'Ververs foundation'. Hieraan werken momenteel Frans van Galen en Wim van Velthoven. In dit soort projecten ontwikkelen we materialen op het snijvlak van wiskunde, science en techniek.[2] Het betreft hier het wiskundig modelleren van samenhangen tussen variabelen. Wat ziet Gravemeijer in de nabije toekomst als zijn 'missie'? Wel, dat houdt voor de toekomst dus niet meer en niet minder in dan de ontwikkeling van het ß-onderwijs.

Noten

1 We verwijzen daarvoor naar: J. ter Heege e.a. (red.) (2005). Freudenthal 100. Speciale editie ter gelegenheid van de honderdste geboortedag van professor Hans Freudenthal. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 24*(3), 106-113.

2 Dit project wordt beschreven in de bijdrage van Van Galen in dit nummer van het tijdschrift.

Literatuur

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education; China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hart, K.M. (1981). Children's understanding of mathematics. London: John Murray, 11-16.

Treffers, A. (1978). Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in mathematics Instruction - The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company).

The title of the presentation held by Koeno Gravemeijer on the occasion of his leaving Utrecht University was: 'What is realistic mathematics education?' The title only partially covered his message, for he also emphasized the reasons underlying the development of realistic mathematics education in the seventies, as well as looking at some of the highlights in the theory of mathematics education, many of which derive from Freudenthal, such as for instance 'guided reinvention'. Gravemeijer himself added the concept of 'emergent modelling' to the theory, showing the transition from 'model of' to 'model for'. In his speech he made the point that the theory of realistic mathematics education and the theory of socio-contsructivism are complementary.