PANAMA-POST

Het voorkomen van ongecijferdheid

A. Treffers
FIsme, Universiteit Utrecht

Exact twintig jaar geleden verscheen Matilda, het bekende kinderboek van Roald Dahl. Enkele fragmenten daaruit zijn een reactie op de toenmalige ontwikkelingen van het Engelse rekenonderwijs. Daarin werd destijds uitgedragen dat tafels en staartdelingen voortaan taboe zouden zijn en dat het werken met rekenmachines nu voorrang moest krijgen.

'... Ken je alle tafels tot en met die van twaalf?'
'Ja, juf.'
'Wat is zeven keer twaalf?'
'Vierentachtig,' zei Matilda. (...)
'Je zegt dat je het niet zo moeilijk vindt het ene getal met het andere te vermenigvuldigen,' zei juffrouw Engel. 'Kun je dat een beetje duidelijker uitleggen?'
'O jee,' zei Matilda. 'Dat denk ik eigenlijk niet.'
Juffrouw Engel wachtte af. De klas zat stil te luisteren.
'Bijvoorbeeld,' zei juffrouw Engel, 'als ik je vroeg veertien en negentien te vermenigvuldigen. Nee, dat is te moeilijk.'
'Dat is tweehonderdzesenzestig,' zei Matilda zachtjes.
Juffrouw Engel staarde haar aan. Ze pakte een potlood en rekende de som uit op een papiertje. 'Hoeveel zei je dat het was?' vroeg ze opkijkend.
'Tweehonderdzesenzestig,' zei Matilda. (...)
'Ik heb altijd tegen mezelf gezegd als zo'n klein rekenmachientje dat kan, waarom zou ik het dan ook niet kunnen?'
'Je hebt groot gelijk,' zei juffrouw Engel. 'Rekenmachientjes zijn trouwens niet toegestaan op deze school ...'
(Roald Dahl, 1988)

1 Hoofdrekenen en schatten

Hoofdrekenen, cijferen en het gebruik van de rekenmachine, dat zijn de kernpunten in het geciteerde fragment. En dat zijn sinds eind jaren tachtig tevens de centrale onderdelen van de internationale en nationale discussies over het rekenen - ook in Nederland.
Kunnen de kinderen tegenwoordig nog wel rekenen? In de volgende bewering kun je de bestaande twijfels daarover en de onverholen kritiek daarop concreet en kort als volgt samenvatten.

> Yvonne rekent op haar rekenmachine
> 715,347 + 589,2 + 4,553 = 13091
> Bij het opschrijven van het antwoord is ze de komma vergeten. Wat moet het antwoord zijn?

'Vroeger konden ze deze optelling precies berekenen en misschien niet zo goed schatten. Tegenwoordig kunnen ze wellicht wel schatten maar lukt exact becijferen niet meer.' Is deze bewering waar?
Wel, de 'Yvonne-som' is zowel in 1987 bij de eerste rekenpeiling als in de laatste peiling van 2004 individueel afgenomen. Het is de bedoeling dat deze opgave uit het hoofd wordt berekend. De goed-score in 1987 was 27 procent en in 2004 was dat 71 procent. Analyse van de oplossingsprocedures laat zien dat in 1987 één op de drie leerlingen het antwoord 13,091 gaf omdat de meeste getallen drie cijfers achter de komma hebben, terwijl in 2004 nog maar één op de tien zo redeneerde. Voor domein (1) getalrelaties, hoofdrekenen en schattend rekenen als geheel, geldt dat de goed-scores vanaf 1987 gemiddeld met ongeveer 20 procentpunten zijn toegenomen. De grotere aandacht die sindsdien aan deze rekenvaardigheden is besteed, heeft dus kennelijk vruchten afgeworpen.

2 Cijferen

Het is echter de vraag of een en ander niet ten koste van domein (2), het cijferen, is gegaan. Kunnen de kinderen tegenwoordig bijvoorbeeld zo'n 'Yvonne-som' nog wel precies op papier berekenen? De goed-scores bij een soortgelijke som '37,5 + 224 + 3,36' waren in 1987 en

2004 vrijwel gelijk, ongeveer 70 procent. Maar voor de totale opgavenverzameling van cijferend optellen en aftrekken geldt dit niet.
Tot 1997 daalden de resultaten licht, maar niet significant, dat wil zeggen met iets minder dan 5 procentpunten. De vierde eindpeiling (2004) gaf echter een abrupte terugval van 10 procentpunten te zien. Abrupt, omdat die daling nog niet in de peiling van midden groep 8 had plaatsgevonden toen dezelfde scores werden gehaald als in de derde eindpeiling (1997).
Bij cijferend vermenigvuldigen en delen was in de periode 1987-1997 de terugval 10 procentpunten. In de laatste peiling echter gingen de resultaten ten opzichte van 1987 met maar liefst 20 procentpunten naar beneden. De prestatiecurve van 2004 is uitermate grillig: in de tweede helft van groep 7 was de stijging 10 procentpunten en in de eerste helft van groep 8 zelfs 20 procentpunten, waarna de resultaten in de tweede helft van groep 8 met 10 procentpunten daalden, terwijl dat bij hoofdrekenen en schatten niet gebeurde.

Wat is de oorzaak van dit verval in de laatste schoolperiode? Is het een gebrek aan voortgaande oefening of wellicht aan ambitie van de leerling om de toets zo goed mogelijk te maken? Niemand kan dit verklaren. En ook niemand weet of dit grillige verloop zich in de voorgaande peilingen heeft voorgedaan omdat toen de prestaties in groep 7 en midden groep 8 niet werden onderzocht. Wat wél vaststaat is dat in vergelijking met de voorlaatste peiling een sterk toenemend percentage leerlingen de betreffende opgaven uit het hoofd berekende, wat de goed-score aanmerkelijk drukte zoals uit de individuele toetsafnamen bleek.

> Ondersteuning voor de interpretatie dat vooral het maken van opgaven zonder uitwerking bepalend is voor de daling in prestaties, kan ook ontleend worden aan de resultaten van de individuele afnamen. Bij deze individuele afnamen maakten leerlingen de opgaven wél met behulp van het opschrijven van een uitwerking. De geleverde prestaties waren aanzienlijk beter, terwijl de strategieën afzonderlijk niet succesvoller waren. Het lijkt er dus op dat zodra de leerlingen een uitwerking opschrijven bij een oplossing van een deelopgave, waartoe ze goed in staat lijken te zijn, de prestaties vanzelf beter uitpakken.
> (Van Putten en Hickendorff, 2006)

Bij de drie opgaven die individueel bij honderdveertig leerlingen werden afgenomen - 704 × 25, 736 : 32 en 7849 : 12 - gingen de prestaties met respectievelijk 23, 32 en 31 procentpunten omhoog. Een uitzonderlijke stijging omdat het verschil tussen de standaardpeiling en de individuele afname bij de 28 andere opgaven, die op deze wijze in de vier peilingen van 1987 tot 2004 zijn getoetst, gemiddeld slechts 4 procentpunten is. In ieder geval geven deze drie voorbeelden een indicatie van wat ‘vanzelf beter uitpakken’ kan inhouden, al lijkt een stijging van 20 à 30 procent, indien de uitwerking in de standaardpeiling wel wordt genoteerd, wellicht wat aan de hoge kant.

3 Proeve-visie op cijferen

Men zou verwachten dat vooral ook de introductie van realistische reken-wiskundemethoden debet aan de daling bij het cijferen is, maar dat blijkt niet het geval - althans niet in 2004 ten opzichte van 1997 en nauwelijks voor 1992. Toch wil ik in dit verband een kritische kanttekening bij de methoden plaatsen - een enkele uitzondering daargelaten. Ik ben namelijk van mening dat één (deel)leergang aanmerkelijk verbeterd kan worden, te weten die van het vermenigvuldigen van een ééncijfergetal met een meercijfergetal, hier kortweg één-keer-meer genoemd - dé sleutelopgave voor zowel cijferend vermenigvuldigen als kolomsgewijs staartdelen.
In de ‘Proeve van een Nationaal Programma. Basisvaardigheden en Cijferen’ wordt daarover het volgende geschreven.

> Er is een exploratiespoor volgens welke met meercijferige getallen wordt gewerkt en gerekend aan de hand van elementaire contextproblemen. En er is een oefenspoor waarin met eenvoudige opgaven van één- met meercijfergetallen wordt vermenigvuldigd. Bij het exploreren wordt nog niet op de meest verkorte manier gerekend. Bij het oefenen wordt daarop wél geleidelijk aangestuurd, dus net als in de pure cijferaanpak. Het pure cijferen is echter éénsporig en bevat in feite alleen een oefenspoor dat uitgezet wordt met opgaven van oplopende moeilijkheid. Er zijn echter ook wel éénsporige uitwerkingen van de combinatiemethode hoofdrekenen - cijferen die in feite alleen maar een exploratiespoor volgen. Een dergelijke aanpak leidt meestal niet tot een algoritme en is, afgezien daarvan, vaak ook weinig doelmatig opgezet. Slechts een tweesporige combinatieleergang, in welk van de voorgaande vormen ook gegoten, doet recht aan zowel aan het reconstructie- als het rekenconstructieprincipe. Het is naar onze mening dan ook eenzijdig en onverantwoord om het oefenaspect volledig overboord te gooien.
> (Treffers & De Moor, 1990)

4 Eén-keer-meer

Hoe het inoefenen van één-keer-meer kan plaatsvinden wordt met de volgende serie problemen toegelicht. We beschikken over de cijfers 2, 4, 6 en 8 die op de lege plaatsen van één-keer-drie ingevuld mogen worden.

$$\begin{array}{r} \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \underline{\quad\ \cdot}\ \times \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

Neem bijvoorbeeld 2 × 468 en de gelijkwaardige optelling 468 + 468.

Het inoefenen van één-keer-meer heeft pas zin als het cijferende optellen goed wordt beheerst.
In onderstaand voorbeeld is de overeenkomst tussen deze twee cijferprocedures evident: de herhaalde kolomsgewijze optelling van de positiegetallen wordt omgezet in de bijbehorende 'keertafel'.

$$\begin{array}{rl} {\scriptstyle 1} & \\ 468 & \\ 2 & \times \\ \hline \ldots & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} {\scriptstyle 1} & \\ 468 & \\ 468 & + \\ \hline 936 & \end{array}$$

Bij 2 × 486 doet zich hetzelfde voor. Bij een ander voorbeeld uit de serie kan die verkorting uiteraard ook worden toegepast.

> 4 × 8 is 32, dat betekent 2 opschrijven 3 onthouden;
> 4 × 6 is 24 plus 3 is 27, dat betekent ...

Hoeveel andere één-keer-drie-opgaven kunnen er nog met de getallen 2, 4, 6 en 8 worden gemaakt? De leerlingen krijgen de opdracht om zoveel mogelijk sommen te bedenken en uit te rekenen. Hoe beredeneer je dat het er bij elkaar genomen 24 zijn? Een soortgelijke serie één-keer-drie-opgaven kan bijvoorbeeld met de getallen 3, 5, 7 en 9 worden samengesteld.

$$\begin{array}{rl} {\scriptstyle 2\,3} & \\ 268 & \\ 4 & \times \\ \hline \ldots & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} {\scriptstyle 2\,3} & \\ 268 & \\ 268 & \\ 268 & \\ 268 & + \\ \hline 1072 & \end{array}$$

Maar de leraar kan ook besluiten om na één-keer-drie met dezelfde cijfers 2, 4, 6 en 8 eerst opgaven van het type twee-keer-twee te exploreren.

$$\begin{array}{rl} .\,. & \\ .\,. & \times \\ \hline .\,. & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 68 & \\ 24 & \times \\ \hline \ldots & \end{array}$$

In de nabespreking brengt de leraar de kwestie van één-keer-twee ter sprake die de leerlingen nu cijferend beheersen. Benutten ze deze vaardigheid bij 4 × 68? En hoe berekenen ze 20 × 68? De nulkwestie in relatie tot 2 × 68 wordt daarbij uitgebreid aan de orde gesteld: 20 × .. heeft een uitkomst die 10 keer zo groot is als 2 × .., dus daarom duikt bij het berekenen van de eerste opgave die nul achter de laatste uitkomst op. Eerst introduceert de leraar een uitgebreid notatieschema voor 24 × 68 en dan in twee stappen de compacte standaardnotatie.

Uitgebreid

$$\begin{array}{rl} 68 & \\ 24 & \times \\ \hline \ldots & \end{array} \rightarrow \begin{array}{rl} 68 & \\ 4 & \times \\ \hline 272 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{rl} 68 & \\ 20 & \times \\ \hline 1360 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{rl} 272 & \\ 1360 & + \\ \hline 1632 & \end{array}$$

Compact

$$\begin{array}{rll} 68 & & \\ 4 & \times & \\ \hline 272 & & (\ \ 4 \times 68) \\ 1360 & & (20 \times 68) \\ \hline 1632 & & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 68 & \\ 4 & \times \\ \hline 272 & \\ 1360 & \\ \hline 1632 & \end{array}$$

Ook nu staan weer 24 opgaven ter beschikking - of zo men wil 12 als de verwisseleigenschap wordt benut - om een en ander in te oefenen. Welk product is het grootste en welk het kleinste? Kun je ook zonder het antwoord exact uitleggen waarom? Voortgezette oefening kan met andere series van vier of vijf getallen worden gemaakt.
Ziehier in kort bestek een mogelijke leergang cijferend vermenigvuldigen.

5 Terug naar Matilda, terug in de tijd

Juffrouw Engel kan kennelijk niet volgen hoe Matilda 14 × 19 via 19 × 14 = 20 × 14 – 14 berekent en controleert daarom de uitkomst schriftelijk met het standaardalgoritme. Tot voor kort werd in het Engelse rekenprogramma nauwelijks of geen plaats voor hoofdrekenen en schattend rekenen ingeruimd - rekenen was voornamelijk of zelfs uitsluitend cijferen. Dit in tegenstelling tot de Nederlandse rekentraditie waarin naast de smalle cijferstroming ook altijd een brede hoofdrekenstroom zichtbaar bleef.[1] Die manifesteerde zich in de tweede helft van de vorige eeuw onder meer in Diels en Nauta ('Fundamenteel Rekenen'), Reynders en Snijders ('Functioneel Rekenen'), Wanders en Bohnke ('Boeiend Rekenen'), Bruinsma cs. ('Nieuw Rekenen') en Huitema cs ('De wereld in getallen').[2]
Het is interessant om de resultaten van de laatstgenoemde methoden te vergelijken met die van de laatste dominante methoden uit de cijferrichting, 'Naar Zelfstandig Rekenen' en 'NiveauCursus Rekenen'. Interessant, omdat daaruit naar voren komt hoezeer de prestaties van de schrale cijferaars over de hele linie achterblijven bij die van de rijke rekenaars. Op alle 24 onderdelen uit de eerste drie peilingen scoren 'Nieuw Rekenen' en 'De wereld in getallen' hoger dan 'Naar Zelfstandig Rekenen' en 'NiveauCursus Rekenen' - meestal significant, en gemiddeld met een verschil van 0,4 standaarddeviatie, ongeveer 10 procentpunten. Daarbij scoort 'De wereld in getallen' op vrijwel alle onderdelen het beste.
Hoofdrekenen en schattend rekenen zitten goed leren cijferen en de toepasbaarheid ervan blijkbaar niet in de weg, integendeel.

Hoe komt het dan dat de prestaties bij het cijferen, met name in de laatste peiling, teruglopen? Wel, dat heeft zoals 'De wereld in getallen' laat zien in principe niets met de realistische rekendidactiek te maken, maar veeleer met de al dan niet nagestreefde doelstellingen. Niet iedere vernieuwde methode besteedt voldoende tijd - zeg bij elkaar genomen zo'n vijftig lesuren - aan het systematisch en doelgericht aanleren van de standaardprocedures van het cijferen of varianten ervan, zoals bij het staartdelen. Ook beginnen verschillende methoden wel erg laat met cijferend vermenigvuldigen en delen, dat wil zeggen pas aan het einde van groep 7. In ieder geval zijn de genoemde resultaten van ‘Nieuw Rekenen’ en ‘De wereld in getallen’ voldoende reden om het elementaire cijferen ook vandaag de dag niet te verwaarlozen.[3] Omgekeerd zouden de genoemde resultaten van de methoden uit het overgangstijdvak tussen ‘oud en nieuw’ de huidige cijferlobby in Nederland te denken moeten geven ...

Noten

1 De rekendidactische fundering van de genoemde ‘hoofdrekenmethoden’ is behoudens de methode van Diels en Nauta ontleend aan Van Gelder (1959) die niet alleen talrijke voorbeelden van hoofdrekenstrategieën geeft, maar ook het kolomsgewijze staartdelen behandelt. In de methode ‘Boeiend Rekenen’ wordt deze ‘nieuwe’ staartdeling praktisch uitgewerkt. Trouwens ook in het buitenland is deze kolomsgewijze staartdeling al sinds jaar en dag in gebruik.

2 Zie voor een nadere analyse van de genoemde methoden: De Jong (1986). De huidige reken-wiskundemethoden vormen ten aanzien van het cijferen en speciaal het cijferend vermenigvuldigen geen eenheid. De leergangen van de twee huidige methoden met het grootste marktaandeel, ‘Pluspunt’ en ‘De wereld in getallen’, verschillen bijvoorbeeld aanzienlijk. ‘Pluspunt’ volgt, in Proeve-termen gesteld, vooral het exploratietraject, terwijl ‘De wereld in getallen’ het cijferen tweesporig aanpakt en betrekkelijk veel aandacht aan het oefenen besteedt, te beginnen met één-keer-meer.

3 De vigerende ministeriële eindtermen bevatten ook doelstellingen voor het cijferen. Zie in dit verband de TAL-brochure (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001). Cijferend vermenigvuldigen wordt hierin als een differentiële doelstelling aangemerkt die op driekwart van de leerlingen van toepassing is.

Literatuur

Dahl, R. (1988). *Matilda.* Baarn: Fontein.

Gelder, L. van (1959). *Grondslagen van de rekendidactiek.* Groningen: Wolters.

Heuvel-Panhuizen, M. van den, K. Buys & A. Treffers (red.) (2001). *Kinderen leren rekenen. Tussendoelen annex leerlijnen. Hele getallen bovenbouw basisschool.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

Janssen, J., F. van der Schoot, B. Hemker & N. Verhelst (1997). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 3*. Arnhem: Cito.

Janssen, J., F. van der Schoot & B. Hemker (2005). *PPON (periodieke peiling van het onderwijsniveau). Balans (32) van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4*. Arnhem: Cito Instituut voor toetsontwikkeling.

Jong, R.A. de (1986). *Wiskobas in methoden*. Utrecht: OW&OC (proefschrift).

Putten, C.M. van & M. Hickendorff (2006). Strategieën van leerlingen bij het beantwoorden van deelopgaven in de periodieke peilingen aan het eind van de basisschool van 2004 en 1997. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 25*(2), 16-25.

Treffers, A. & E. de Moor (1990). *Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2. Basisvaardigheden en Cijferen.* Tilburg: Zwijsen (digitaal beschikbaar via omega.library.uu.nl)

Exactly twenty years ago Matilda, the well-known children’s book by Roald Dahl, was published. Some parts of this book are a response to the developments in English mathematics education at that time. Multiplication tables and long divisions were banned and the pocket calculator was preferred.

... ‘Do you know all the way up to twelve-times table?’
‘Yes, Miss Honey.’
‘What are twelve sevens?’
‘Eighty-four,’ Matilda said. (...)
‘You say you don’t find it difficult to multiply one number by another’, Miss Honey said. ‘Could you try to explain that a little bit?’
‘Oh dear,’ Matilda said. ‘I’m not really sure.’
Miss Honey waited. The class was silent, all listening.
‘For instance’, Miss Honey said, ‘if I asked you to multiply fourteen by nineteen ... No, that’s to difficult ...’
‘It’s two hundred and sixty-six’, Matilda said softly.
Miss Honey stared at her. Then she picked up a pencil and quickly worked out the sum on a piece of paper. ‘What did you say it was?’, she said, looking up.
‘Two hundred and sixty-six’, Matilda said. (...)
‘I think it’s a lot better than a lump of metal’, Matilda said, ‘That’s all a calculator is.’
How right you are’, Miss Honey said, ‘Pocket calculators are not allowed in this school anyway.’
(Roald Dahl, Matilda, 1988, p.66-69)