

Kangoeroe, opvoeden tot goede denkmanieren

L. van den Broek
Radboud Universiteit, Nijmegen

Sinds enige jaren wordt de Europese Kangoeroe Reken- en Wiskundewedstrijd georganiseerd. Het doel is leerlingen uit het basisonderwijs, het voortgezet onderwijs en de opleidingen voor leraren te confronteren met het oplossen van probleempjes. Het is belangrijk dat kinderen door te puzzelen en problemen op te lossen leren logisch na te denken. Het zoeken naar structuur in reken-wiskundeopgaven door flexibel te denken is een kenmerk van een probleemoplossende houding, die we bij leerlingen en studenten willen bevorderen.

1 Onderwijs in beweging

In het onderwijs heeft de laatste jaren een belangrijke verschuiving plaatsgevonden. In steeds mindere mate is het onderwijs gericht op het beheersen van standaardalgoritmen, steeds meer op probleemoplossen. Dit houdt in dat van leerlingen een actieve werkhouding wordt verwacht. Terwijl vroeger de leraar pasklare oplossingen doceerde, zullen leerlingen nu vaker zelf de armen uit de mouwen moeten steken. Dat is niet alleen zo in de studiehuisgedachte, maar ook op de basisschool is dit al enigszins het geval. Leerlingen moeten dus meer in staat zijn zelf problemen te begrijpen en naar oplossingen te zoeken. En dat moet hij leren. Eigenlijk is dit niets nieuws. T. Afanesjeva schreef al in 1960:

Is er eigenlijk iets wat de kinderen op school had moeten worden bijgebracht, maar wat ze gewoonlijk niet wordt bijgebracht? Jazeker, en nog wel iets zeer belangrijks: namelijk de houding tegenover een probleem. Ik heb dit de 'opvoeding tot goede denkmanieren' genoemd.

De aanbeveling van Afanesjeva is sinds 1960 alleen maar dwingender geworden. De maatschappij heeft steeds meer behoefte aan creatieve mensen. Iemand die geen lopende-bandwerk verricht, ziet zich vaak gesteld voor problemen waarvoor geen standaard stappenplan bestaat; de situatie vraagt om haar eigen, unieke aanpak. Daarvoor moet het probleem verkend en overzien worden. Nodig is het genereren van ideeën en het ontwikkelen van oplossingen. En dan heb ik het niet over wiskunde, maar over organisatie en management (Vernooij, 2003). In de toekomst zal dit nieuwe accent in het onderwijs zwaarder gaan wegen.

Creativiteit en het nemen van initiatieven worden op verschillende manieren gestimuleerd. Voor de basisschool is 'De Grote Rekendag' van het Fisme¹ daar een voorbeeld van, en ook de 'Klassenklus' van 'Volgens Bartjens...'²,

en de 'Europese Kangoeroe Reken- en Wiskundewedstrijd'. Deze activiteiten vragen van leerlingen individueel, in groeps- of in klassenverband met nieuwe situaties om te gaan. Dat gebeurt op school, in een veilige omgeving. Natuurlijk zijn de problemen in de wereld van de volwassenen veel complexer, maar het gaat om de houding ten aanzien van onbekende situaties. De wiskundeopdrachten van de Kangoeroe-wedstrijd moeten dan ook gezien worden als een training van een houding die later van de kinderen verwacht zal worden. Iemand heeft een goede probleemoplossende houding als hij bereid is na te denken over vraagstukken, waarvoor hij geen pasklaar algoritme beschikbaar heeft.

In dit artikel zal ik uiteenzetten wat een probleemoplossende houding betekent en hoe Kangoeroe bijdraagt aan de ontwikkeling daarvan.

2 Wat is 'Kangoeroe' eigenlijk?

Kangoeroe bestaat in Nederland vanaf 1995. Toch is het fenomeen nog niet algemeen bekend, in tegenstelling tot zijn 'grote broer' de 'Wiskunde Olympiade'.³ Dus even presenteren.

Kangoeroe is een Europese wedstrijd. Deze wordt tegelijk in circa veertig landen gehouden. Nederland doet mee met vier versies. Voor groep 5 en 6 is er de versie wizKID, voor groep 7 en 8 wizSMART; de andere twee versies wizBRAIN en wizPROF zijn voor het voortgezet onderwijs. Elke versie bestaat uit vijfkeuzevragen, op het terrein van tellen, rekenen, (ruimte)meetkunde en logica. Maar veel puzzels zitten niet zo duidelijk in een van deze categorieën. Kangoeroe is bedoeld voor alle leerlingen en beslist niet alleen voor de bollebozen. Belangrijk is dat de leerlingen ervaren dat logisch nadenken, puzzelen en creatief rekenen leuk zijn. Iedereen kan dit soort hersenwerk op zijn of haar eigen niveau doen. De wiskundig minder

begaafde leerlingen doen gewoon minder vragen. Bijna niemand zal alle vragen goed beantwoorden; daar is trouwens ook te weinig tijd voor. Toch blijven gemiddeld slechts twee van de vierentwintig vragen onbeantwoord. Kangoeroe zit in de lift. Steeds meer landen sluiten zich aan bij de internationale organisatie 'Kangourou Sans Frontières'. Het totaal aantal deelnemers was in 2007 gegroeid tot 4,5 miljoen. Opvallend is de explosieve groei in Duitsland na de PISA-shock in 2000: van 104.000 deelnemers in 2001 naar 549.000 in 2007.

3 Het belang van probleemvraagstukken in het onderwijs

Veel kinderen (trouwens ook volwassenen) puzzelen graag, vaak als tijdverdrijf. Maar puzzelen is ook leerzaam. De puzzelaar zoekt bijvoorbeeld naar een aanpak, brengt structuur aan, werkt kleine voorbeelden uit en zoekt aanknopingspunten in bekende situaties. Allemaal acties waarvan je hoopt dat leerlingen er vaardig in worden. H. Broekman (1989) formuleert acht argumenten waarom puzzels en spelen goede leersituaties zijn. Deze zijn stuk voor stuk toepasbaar op de Kangoeroevragen. Zijn argumenten:

- Afwisseling: de opgaven zitten niet in één hoekje van de wiskunde, de leerling moet dus flexibel denken.
- Uitdaging: de vragen zijn min of meer nieuw; de leerling wordt geprikkeld te onderzoeken hoe de vork in de steel zit.
- Oefening van lesstof: onderdelen zoals de stelling van Pythagoras, oppervlakte en omtrek, cirkels, telstrategieën en symmetrie komen aan de orde.
- Gelegenheid om patronen te zoeken: regelmaat ontdekken en voortzetten.
- Gelegenheid om vooruit te kijken en om terug te blikken: 'als ik dit probeer, loopt het niet goed af'; het controleren van de oplossing.

De volgende drie argumenten komen pas na afloop tot hun recht:

- bespreekbaar maken van een redenering;
- bespreekbaar maken van letten op meerdere aspecten;
- bespreekbaar maken van oplossingsstrategieën.

4 Een goede probleemoplossende houding

Een grote ontdekking lost een groot probleem op, maar in de oplossing van elk probleem zit wel een graantje van ontdekking. Uw probleem mag dan bescheiden zijn, maar als het je nieuwsgierigheid uitdaagt en je inventieve vermogens aan het werk zet, en als je het oplost met je eigen middelen, dan ervaar je de spanning en geniet je van de triomf van de ontdekking.

Zo begint G. Polya het voorwoord van zijn bestseller 'How to Solve it' (1957). Dat is misschien wat hoogdravend gezegd, maar het idee is wel degelijk van toepassing, ook op de Kangoeroevragen die veel kleiner zijn dan de problemen waar Polya op doelt.

Het gaat Polya om het leren wiskundige problemen op te lossen. Hij voert expliciet vier fasen op:

- begrijp het probleem,
- bedenk een plan,
- voer het plan uit,
- kijk terug.

Voor de tweede fase geeft Polya allerlei adviezen. Een leerling zal deze intuïtief gebruiken. Een goede puzzelaar kiest meteen een goede aanpak of kan snel switchen naar een andere.

In het rapport over PISA-2003 (Dekker, 2006) wordt het volgende geconstateerd:

Het PISA-2003-onderzoek (Programme for International Student Assessment) heeft laten zien dat Nederlandse vijftienjarige leerlingen goed zijn in simpele toegepaste wiskunde, in vergelijking met leerlingen uit andere landen. Echter, bij het onderdeel 'probleemoplossen' waren de Nederlandse leerlingen helemaal niet zo goed.

En bij de aanbevelingen op pagina 106 valt te lezen:

Er dient meer aandacht te komen voor authentiek probleemoplossen (binnen de wiskunde); over de gehele breedte van het Nederlandse onderwijs blijven de leerlingen achter: meerstapsproblemen en mathematiseren leveren de leerling te veel moeilijkheden op. (Dekker, 2006, pag.106)

Hoe leer je problemen op te lossen? Kun je dat wel leren? In elk geval moet je niet wegllopen voor nieuwe situaties. Onderwijzers, en volwassenen in het algemeen, moeten niet te zeer beschermend willen optreden voor hun kinderen. De uitspraak 'dat kunnen mijn leerlingen niet', duidt vaak in die richting. Dit wil geenszins zeggen dat leerlingen geconfronteerd moeten worden met voor hen onmogelijk oplosbare problemen. Succesbeleving is een voorname stimulans voor het ontwikkelen van een goede probleemoplossende houding.

M. van den Heuvel-Panhuizen en C. Bodin-Baarends (2004) constateren dat goede leerlingen vaak niets opschrijven en een probleem geheel uit het hoofd proberen op te lossen. Als dat niet snel lukt, geeft de Nederlandse leerling het gauw op. Zij wijten dat onder andere aan het feit dat in het reken-wiskundeonderwijs het probleemoplossen een marginale plaats inneemt. In de voorbeelden verderop in dit artikel laat ik zien dat gebruik van kladpapier veel kan helpen om een probleem op te lossen. Een leerling krijgt een nieuwe situatie voorgeschoteld. Wat kan hij doen? W. Berkelmans (2004) onderscheidt zes strategieën om een probleem aan te pakken:

- probeer eens wat;
- alle mogelijkheden nagaan (systematiek);

- combineren (vereenvoudigen, opdelen, terugwerken, uitsluiten);
- formules gebruiken (variabelen invoeren, verbanden formuleren);
- structuur ontdekken (regelmaat, inductief redeneren);
- model maken (abstraheren).

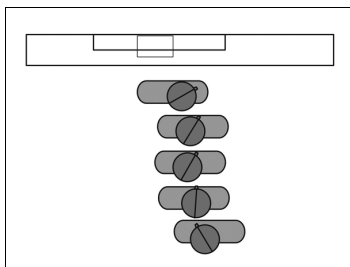
Aan elk van de strategieën wijdt Berkelmans een hoofdstuk en past deze toe op problemen die op de Kangoeroevragen lijken.

5 Visualiseren

Tijd voor voorbeelden. Ik kies zes Kangoeroevragen uit het recente verleden. Probeer u de opgave eens zonder kladpapier te maken. Of liever nog: lees de vraag niet zelf, maar laat iemand anders de vraag voorlezen. Ik voorspel dat u de grootste moeite zult hebben (of u bent geniaal). Het helpt veel mensen de gegevens te visualiseren. H. Broekman pleit voor het gebruik van beeldtaal in het onderwijs (Broekman, 2004). In het ‘Verslag Kangoeroe 2007’ staan korte uitwerkingen en ook hoe de vraag scoorde, dat wil zeggen hoeveel procent van de deelnemers elk van de alternatieven koos.

wizKID16 (2007)

Sophie, Lisa, Anna, Emma en Fleur staan voor een loket in de rij (fig. 1).



figuur 1

Sophie is later aan de beurt dan Anna. Lisa is eerder aan de beurt dan Sophie en meteen na Emma. Emma is eerder aan de beurt dan Anna, maar staat niet vooraan. Op welke plaats staat Fleur?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

Geef de gegevens schematisch weer: vertaal dus de informatie zin voor zin en noteer op schrift wat het gegeven vertelt.

Sophie is later dan Anna aan de beurt	Loket:	A ... S
Lisa is eerder dan Sophie	Loket:	L ... S
Lisa is direct na Emma	Loket:	E L
Emma is eerder dan Anna	Loket:	E ... A
Dit alles in elkaar geschoven	Loket:	E L A S
Emma staat niet vooraan	Loket:	... E L A S

Fleur staat dus vooraan.

Resultaat:

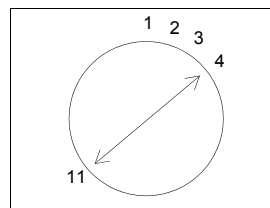
- A. 51,75 (goed) B. 4,22 C. 6,64
D. 7,78 E. 16,37 geen: 13,22

wizKID19 (2007)

Op een verjaardagsfeestje zijn de stoelen genummerd: 1, 2, 3, enzovoort. De stoelen staan netjes in een kring. Daan zit bij dit feestje op stoel nummer 11, recht tegenover Sophie. Sophie zit op nummer 4. Hoeveel stoelen staan er in de kring?

- A. 13 B. 14 C. 16 D. 17 E. 22

Teken de kring (fig.2).



figuur 2

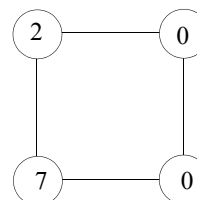
Je zou alle stoelen concreet kunnen aangeven, maar je kunt ook opmerken dat er tussen de nummers 4 en 11 zes stoelen staan (de nummers 5 t/m 10), en aan de andere kant dus ook. In totaal dus $6 + 6 + 2 = 14$ stoelen.

Resultaat:

- A. 12,22 B. 32,51 (goed) C. 20,65
D. 11,66 E. 8,41 geen: 14,53

wizBRAIN14 (2007)

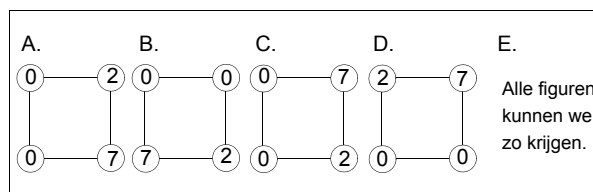
In de cirkels op de hoekpunten van het vierkant staan getallen (fig.3).



figuur 3

Er wordt een zijde gekozen; de getallen op de uiteinden van die zijde worden evenveel verhoogd of verlaagd. Dit herhalen we een aantal keren (fig. 4).

Welke van de volgende figuren kunnen we zo niet krijgen?



figuur 4

Probeer wat om te beginnen. Trek van de bovenste twee getallen 2 af en tel bij de rechter twee getallen 2 op. En je hebt situatie B gevonden. Zo kun je ook C en D gemakkelijk maken, bij A lukt dat niet. Een sluitend bewijs is niet nodig. Het is wel zeer de moeite waard achteraf met de leerlingen een redenering te bespreken. Hoe kun je aan een vierkant zien of je het wel of niet kunt bereiken vanuit de begingetallen?

Resultaat:

- | | | |
|----------------|----------|-------------|
| A. 8,25 (goed) | B. 6,31 | C. 11,03 |
| D. 6,93 | E. 32,67 | geen: 34,79 |

wizKID07 (2006)

Er zijn drie vierkante tafels. Aan een tafel kunnen vier mensen zitten. Van de drie tafels wordt één lange tafel gemaakt (fig.5).



figuur 5

Hoeveel mensen kunnen aan deze lange tafel zitten?

- A. 6 B. 8 C. 9 D. 10 E. 16

Je kunt allerlei berekeningen erop loslaten, maar je kunt de situatie ook tekenen en dan gewoon tellen. Dat is een veilige weg, en is niet veel werk. Gezien de prestaties wordt deze aanpak (fig.6) lang niet door iedereen verzonnen.



figuur 6

Resultaat:

- | | | |
|----------|-----------------|------------|
| A. 6,81 | B. 50,70 (goed) | C. 7,08 |
| D. 16,19 | E. 14,76 | geen: 4,46 |

wizSMART19 (2005)

Als Merel naar het strand heen loopt en terug fietst, duurt dat veertig minuten. Als Merel heen en terug fietst, duurt dat twintig minuten. Hoeveel minuten duurt het als Merel heen en terug loopt?

- A. 50 B. 56 C. 60 D. 64 E. 80

Als de situatie is doorgedrongen, ligt hier een redenering voor de hand. Het verschil in tijd tussen lopen en fietsen (enkele reis) is twintig minuten.

Heen en terug lopen duurt dus $2 \cdot 20 =$ veertig minuten langer dan heen en terug fietsen, ofwel zestig minuten.

Resultaat:

- | | | |
|----------|---------|-----------------|
| A. 7,74 | B. 1,84 | C. 71,32 (goed) |
| D. 15,10 | E. 4,53 | geen: 2,32 |

wizPROF22 (2006)

Het gezin Oud bestaat uit vader, moeder en een aantal kinderen. De gemiddelde leeftijd van de gezinsleden is 18 jaar. De gemiddelde leeftijd zonder de achtendertigjarige vader is slechts 14 jaar. Hoeveel kinderen zijn er in het gezin Oud?

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. 6

Vaders leeftijd is $38 - 14 = 24$ jaar groter dan de gemiddelde leeftijd van de anderen. Als je die 24 uitsmeert over de gezinsleden, neemt het gemiddelde met $18 - 14 = 4$ jaar toe. Dus zijn er $24 : 4 = 6$ gezinsleden.

Het kan ook anders. Typisch een ingeklede vergelijking. Noem het aantal kinderen x . Dan bestaat gezin Oud uit $x + 2$ personen. Samen zijn ze dan $18(x + 2) = 18x + 36$ jaar oud. Zonder de vader zijn ze dus samen $18x + 36 - 38 = 18x - 2$ jaar oud. Maar zonder vader zijn de $x + 1$ personen gemiddeld 14 jaar, dus zijn deze samen ook $14(x + 1) = 14x + 14$ jaar. Er moet dus gelden: $18x - 2 = 14x + 14$, zodat $x = 4$.

Merk op dat je ook goed uit kunt gaan van de vijf alternatieven. Als er twee kinderen zouden zijn, zijn de vier gezinsleden samen enerzijds $4 \cdot 18 = 72$ jaar en zonder de vader $3 \cdot 14 = 42$ jaar; dat verschilt niet 38 jaar, dus 2 is niet het goede antwoord. Enzovoort.

Resultaat:

- | | | |
|---------|----------|-----------------|
| A. 8,75 | B. 15,01 | C. 19,92 (goed) |
| D. 7,02 | E. 4,05 | geen: 45,26 |

Leg leerlingen dergelijke vragen voor, waarbij niet onmiddellijk duidelijk is wat er aan de hand is en hoe ze het probleem kunnen gaan aanpakken. Het gaat erom dat de leerlingen niet bij de pakken neer gaan zitten, maar iets ondernemen. In de voorbeelden en de daaraan voorafgaande theorie staan allerlei mogelijkheden.

Om de leerlingen te activeren is een enthousiaste docent onontbeerlijk. Hij daagt ze uit door ze aan kangoeroe-opgaven te laten werken. Die zijn te vinden op de website www.math.ru.nl/kangoeroe. Dat kan op allerlei manieren georganiseerd worden: individueel, in tweetallen of grotere groepjes. Kies elke week een van de opgaven van vorige jaren, bijvoorbeeld in het laatste kwartier voor het weekend. Of je maakt een grabbelton met opgaven voor de leerling die een taak eerder af heeft.

Het aardigst is eigenlijk om een kangoeroewedstrijd net als 'in het echt' te houden, dus individueel, voor vijftig minuten, met een antwoordformulier (te vinden op internet) en zelfs met prijsjes.⁴

6 Maak eens een kangoeroe-opgave op de opleiding

Duidelijk is dat de docent zelf een goede probleemoplossende houding moet hebben. Daaraan kan de opleiding bijdragen. Enkele suggesties en overwegingen voor de pabo's:

- maak de opgaven wizSMART volgens het officiële reglement;
- organiseer een prijsuitreiking;
- bediscussieer de opgaven achteraf en laat ontdekken dat er verschillende manieren van aanpak zijn;
- laat de aanstaande docenten hun oplossingen onder woorden brengen;
- laat het percentage leerlingen schatten die een vraag goed beantwoorden (in de verslagen van Kangoeroe vind je de gerealiseerde percentages⁵).

Voor de eigen puzzelvaardigheid van pabo-studenten is het ook interessant hen de versies wizBRAIN of wizPROF voor te leggen. Sommige opgaven zijn heel geschikt om een presentatie over te houden, ook met het oog op didactische aspecten. Hoe pak je zo'n probleem aan? Wat helpt bij het zoeken naar een oplossing? Wat leer je ervan?

Maar ook het ontwerpen van opgaven is heel instructief:

- geef de studenten opdracht om (in tweetallen) een of twee Kangoeroe-opgaven te ontwerpen, over een willekeurig onderwerp;
- bediscussieer de ontwerpen achteraf;
- zend de beste ontwerpen naar kangoeroe@math.ru.nl; misschien ziet u die terug in de Kangoeroewedstijd van 2009 of 2010.

Hoe moeilijk of gemakkelijk moeten de opgaven zijn? De startopgaven moeten goed te doen zijn. Achteraan in de wedstrijd staan erg pittige opgaven. Ook die mogen niet ontbreken om verschil te kunnen maken tussen zeer goede deelnemers en kampioenen. Vooral geschikte, eenvoudige vragen die toch niet flauw zijn, zijn moeilijk te vinden. Eén enkele nieuwe vraag is al mooi. Als je die vindt, geeft dat veel voldoening.

7 Info

In Nederland wordt de wedstrijd georganiseerd vanuit de Radboud Universiteit Nijmegen. Door mailing, op conferenties en door artikelen in onderwijsvakbladen wordt de wedstrijd onder de aandacht gebracht van scholen en lerarenopleidingen. Elke school en elke pabo ontvangt rond 8 december een mailing met promotiemateriaal voor Kangoeroe. Op de website vindt u alle informatie over Kangoeroe, zoals het reglement, de prijzen en de opgaven van vorige jaren.⁶

Kangoeroe 2009 vindt plaats op vrijdag 20 maart.

Noten

- 1 Grote Rekendag, ga naar <http://www.fi.uu.nl/rekenweb/> en kies voor Grote Rekendag.
- 2 Klassenklus, rubriek in 'Volgens Bartjens...', tijdschrift voor reken-wiskundeonderwijs op de basisschool'.
- 3 'Groot' in de zin van 'ouder'. Kangoeroe richt zich op een veel breder publiek en overtreft de Wiskunde Olympiade in omvang vele malen.
- 4 Kangoeroe heeft nog aandenkens van 2004, 2005, 2006, 2007 en 2008 over, voor een schappelijk bedrag.
- 5 Stichting Wiskunde Kangoeroe (2007). *Verslag Kangoeroe 2007*. Instituut voor Wiskunde, RU Nijmegen.
- 6 www.math.ru.nl/kangoeroe.

Literatuur

- Berkelmans, W. (2004). *Eureka*. Amsterdam: VU.
- Broekman, H.G.B. (1989). Wiskunde leren en onderwijzen met behulp van puzzels en spelen. *Nieuwe Wiskrant*, 8(2), 23-32.
- Broekman, H.G.B. (2004). Beeldtaal. *Euclides* 80(3), 98-101.
- Dekker, T. e.a. (2006). *Wiskundige geletterdheid volgens PISA*, Utrecht/Arnhem: Freudenthal Instituut / Cito.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den & C. Bodin-Baarends (2004). Alles of niets. *Willem Bartjens*, 24(2), 12-14.
- Polya, G. (1957). *How to solve it*. New York: Doubleday Anchor Books.
- Vernooij, A. (2003). Probleemoplossen als vaardigheid. *Tijdschrift voor het Economisch Onderwijs* 3, 171 e.v.

The European Kangaroo Math Contest has been taking place for some years. The aim of the contest is to present problems to pupils of primary and secondary schools and students of educational schools. It is important that children learn logical thinking by solving puzzles and small problems. Searching for structure in mathematical questions through flexible thinking is a feature of a good problem solving attitude, which we want to stimulate in both pupils and students.