Aansluitingsproblemen tussen primair en voortgezet onderwijs

- geen doorgaande lijn voor het vermenigvuldigen van breuken -

K.P.E. Gravemeijer, G. Bruin-Muurling & M. van Eijck
Technische Universiteit Eindhoven

Dit artikel opent met de constatering dat het rapport van de commissie Meijerink feitelijk niet handelt over leerlijnen, daar het zich beperkt tot het 'wat' en zich niet uitspreekt over het 'hoe'. Tegen deze achtergrond wordt een analyse besproken van reken-wiskundemethoden voor de groep 8 basisschool en klas 1 havo/vwo, die zich richt op de vraag hoe de leerlingen worden voorbereid op het vermenigvuldigen van breuken op een formeel niveau.
Het blijkt dat opgaven en voorbeelden in de basisschoolmethoden aansturen op verschillende rekenprocedures voor verschillende getalcombinaties, terwijl de havo/vwomethoden al snel starten met één algemene regel voor alle mogelijke gevallen ('teller keer teller en noemer keer noemer'). Bovendien blijken de basisschoolprocedures sterk gebonden aan contexten, waardoor de leerlingen in het algemeen niet met breuken als onbenoemde, op zichzelf staande, getallen rekenen, maar met benoemde contextgebonden getallen. In het voortgezet onderwijs wordt echter al snel op het niveau van de onbenoemde getallen gerekend.

Deze overgang van getallen die gebonden zijn aan telbare eenheden, naar getallen als objecten die hun betekenis ontlenen aan een netwerk van getalrelaties (Van Hiele, 1973), vraagt een conceptuele sprong die op deze manier veel te weinig aandacht krijgt. Bovendien is het formaliseringsproces dat voorbereidt op de algebra hiermee nog niet afgerond.
De conclusie is dat er een aansluitingsprobleem zit in de leerlijn van primair naar voortgezet onderwijs dat betrekking heeft op hoe de leerlingen met breuken leren rekenen.

1 Inleiding

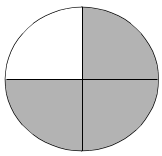
Doorgaande leerlijnen vormen op dit moment een centraal thema in het reken-wiskundeonderwijs. Merkwaardig genoeg handelt het rapport van de commissie Meijerink, dat hieraan gewijd is, feitelijk niet over leerlijnen. De commissie beperkt zich tot het wat en spreekt zich niet uit over het hoe. Niet alleen het leren maar ook het onderwijzen blijft daarmee buiten beeld. Dat is problematisch, omdat al lang het vermoeden bestaat dat er juist op het punt van het leren en onderwijzen een probleem zit in de aansluiting tussen primair onderwijs (PO) en voortgezet onderwijs (VO).

Een door ons uitgevoerde analyse van enkele reken-wiskundemethoden laat zien dat dit inderdaad het geval is en dat de aansluiting niet alleen het 'wat' betreft, maar vooral het 'hoe'.
De door ons uitgevoerde analyse richt zich specifiek op het vermenigvuldigen van breuken. De onderliggende vraag daarbij is, 'Hoe worden de leerlingen geacht te rekenen in het PO en het vo?' We proberen een voorlopig antwoord op die vraag te krijgen door het analyseren van methoden.

2 Verschillende fasen in het rekenen met breuken

Om de bevindingen in perspectief te kunnen plaatsen schetsen we eerst een globaal kader van de ontwikkeling van het rekenen met breuken. Daarbij proberen we niet om een volledig overzicht te geven van wat er in het onderwijs aan de orde komt, noch van de op dit moment beschikbare kennis en didactische inzichten. We beperken ons tot de grote lijn, meer specifiek tot de lijn van begin basisschool tot eind havo/vwo. De keuze van dit eindpunt brengt een beperkte kijk op het breukenonderwijs met zich mee, we richten ons hier op het leren van breuken voorzover dat voorbereidt op het formele rekenen met breuken aan het einde van havo en vwo. Daarmee kiezen we dus een smaller perspectief dan bijvoorbeeld de TAL-brochure (Van Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Van Herpen & Keijzer, 2005), waarin vanuit didactische overwegingen en met het oog op toepassingen een belangrijke plaats wordt ingeruimd voor de verbindingen van breuken met verhoudingen, procenten en kommagetallen. In onze beschrijving van de (deel)leerlijn, die is gericht op het formele rekenen met breuken en de doorloop naar de algebra, laten we deze verwevenheid van (deel)leerlijnen buiten beschouwing.

We beperken ons bovendien tot een grove schets waarin het ons gaat om sprongen in niveaus van denken. In deze lijn naar het formele rekenen met breuken kunnen we grofweg drie fasen onderscheiden. De eerste betreft de fase van de informele, contextgebonden verkenning. Hier vindt een brede fenomenologische exploratie plaats van allerlei aspecten van breukbegrip, zoals operatieaspect, deelaspect, verhoudingsaspect, meetaspect en getalsaspect (Streefland, 1991). Tegelijk met deze fenomenologische verkenning wordt een relatienet opgebouwd dat zowel relaties tussen breuken omvat, als relaties met verhoudingen, procenten en kommagetallen. In combinatie hiermee wordt ook het rekenen ontwikkeld op basis van het beredeneerd oplossen van contextopgaven. Breuken worden daarbij al snel geassocieerd met een handelingsvoorschrift - 'drie vierde' betekent dat je de eenheid in vier gelijke delen moet verdelen en vervolgens drie van die delen moet samennemen. Daarnaast worden breuken gekoppeld aan visuele representaties, veelal standaard afbeeldingen en concreet materiaal (fig.1).



figuur 1: standaardvoorstelling van $\frac{3}{4}$

Verder wordt er in deze fase onderzoek gedaan naar equivalentierelaties in concrete contexten. Wanneer je zes pannenkoeken met acht personen verdeelt, kun je dat bijvoorbeeld zo doen dat ieder $\frac{3}{4}$ pannenkoek krijgt, of zo dat ieder $\frac{6}{8}$ pannenkoek krijgt. Een belangrijk kenmerk van deze fase is dat breuken, zoals in dit voorbeeld, het karakter hebben van benoemde getallen. Het kan dan zowel gaan om conventionele meetgetallen, zoals in $\frac{3}{4}$ kilometer, als om meer contextgebonden maten, zoals bij $\frac{3}{4}$ reep of $\frac{3}{4}$ pizza. Het benoemde karakter van breuken wordt uitgebuit door gebruik te maken van maatwisseling. Zo kun je $\frac{3}{4}$ km omzetten in 750 meter of $\frac{3}{4}$ reep in negen stukjes wanneer de hele reep uit twaalf stukjes bestaat. Door middel van maatwisseling kun je het optellen en aftrekken van breuken, bijvoorbeeld, vereenvoudigen tot het rekenen met gehele getallen. De vraag: 'Hoeveel is $\frac{3}{4}$ reep meer dan $\frac{2}{3}$ reep?', kan dan worden opgelost door uit te gaan van een reep van twaalf stukjes en $\frac{3}{4}$ reep te vertalen in negen stukjes en $\frac{2}{3}$ reep in acht stukjes. Het verschil is dan één stukje van een reep van twaalf stukjes, ofwel $\frac{1}{12}$ reep (Treffers, Streefland & De Moor, 1994).

In de tweede fase staat de vorming van breukgetallen als wiskundige objecten centraal. Dit impliceert een overgang van benoemde naar onbenoemde getallen. Deze overgang kunnen we vergelijken met de overgang van benoemde naar onbenoemde getallen in het aanvankelijk rekenen. Daar doet zich een fase voor waarin jonge kinderen de vraag: 'Hoeveel is 4 + 4?', niet begrijpen, terwijl ze wel weten dat 4 knikkers en nog eens 4 knikkers samen 8 knikkers oplevert. De leerlingen kennen in die fase alleen benoemde getallen en nog geen onbenoemde getallen. Benoemde getallen ontlenen hun betekenis aan de telbare objecten waar ze naar verwijzen. Zoals in ons voorbeeld de getelde knikkers. Geleidelijk krijgen getallen daarna het karakter van zelfstandige objecten. Ze ontlenen hun betekenis aan een netwerk van getalrelaties. Een (natuurlijk) getal heeft dan de status van een knooppunt in een relatienet, om de terminologie van Van Hiele (1973) te gebruiken. Op eenzelfde manier kunnen breuken hun betekenis gaan ontlenen aan getalrelaties, bij $\frac{3}{4}$ kan dat bijvoorbeeld zijn: $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ of $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$, maar omvat ook $3 : 4 = \frac{3}{4}$ en equivalentierelaties als $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16}$ en dergelijke, en deel-geheelrelaties als $\frac{3}{4}$ van 100 is 75 enzovoort.

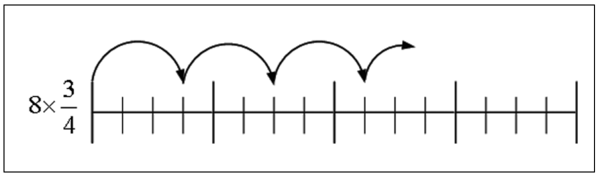
Bij het vermenigvuldigen van breuken, doet zich nog een specifiek probleem voor, daar de voor de leerlingen vertrouwde betekenis van vermenigvuldigen als herhaald optellen niet altijd meer toepasbaar is. De vermenigvuldiging '$\frac{3}{4}$ keer iets' is immers moeilijk op te vatten als herhaald optellen. Dit probleem wordt opgelost door af te spreken om '$\frac{3}{4}$ keer' gelijk te stellen met '$\frac{3}{4}$ deel van'; wat voor ons misschien logisch lijkt, maar voor de leerlingen toch neerkomt op een tamelijk arbitraire keuze. Bovendien leidt dit tot inconsistenties met ervaringen die de leerlingen eerder hebben opgedaan. De op ervaringskennis gebaseerde regel, 'vermenigvuldigen maakt groter en delen maakt kleiner', blijkt bij vermenigvuldigingen als '$\frac{3}{4}$ keer iets' niet meer op te gaan. Dit probleem is waarschijnlijk te ondervangen door de leerlingen veel ervaringen op te laten doen en door situaties te creëren waarin de keuze voor ''keer' is hetzelfde als 'deel van'', als logisch wordt ervaren. Zoals bijvoorbeeld bij het vermenigvuldigen met een gemengd getal in een context, 'tweeënhalve meter stof à twaalf euro per meter' of bij het vergelijken van $\frac{3}{4} \times 6$ en $6 \times \frac{3}{4}$. Daarnaast lijkt het verstandig het vermenigvuldigen van begin af aan, dus al bij de natuurlijke getallen, breder in te bedden dan als herhaald optellen alleen.
In de derde fase - die zich pas halverwege havo en vwo voltrekt - vindt een verdere 'objectivering' plaats. Na de breuken zelf, worden nu ook de operaties met breuken tot object gemaakt. Om verder te kunnen in de algebra zullen bijvoorbeeld de leerlingen het product van twee breuken moeten gaan zien als een object waarmee je kunt opereren. In deze fase gaat het om inzicht in meer algemene eigenschappen en structuren. Waarbij bijvoorbeeld wordt ingezien, dat vermenigvuldigen met een breuk hetzelfde is als achtereenvolgens vermenigvuldigen met de teller en delen door de noemer. Zo kan $5 \times \frac{3}{4}$, bijvoorbeeld, worden vertaald in $5 \times 3 : 4$. Op dit niveau wordt ook

ingezien, dat $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$, en dat dit principe voor alle breuken geldt. Tot dit niveau behoort verder het inzicht dat je uit $\frac{6}{2} = 3$ kunt afleiden dat $\frac{6}{3} = 2$. Dit niveau van vermenigvuldigen van breuken past bij wat Van Hiele (1973) het tweede denkniveau noemt, dat hij typeert met ‘relaties tussen relaties’.

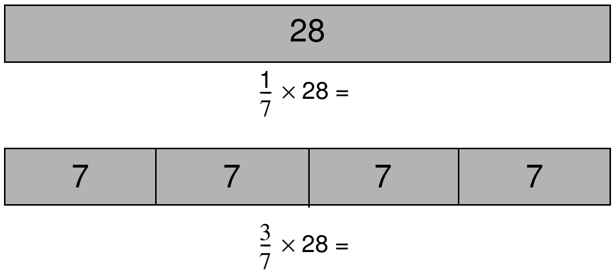
3 Schoolboeken

Om te zien hoe het vermenigvuldigen van breuken wordt aangeboden, hebben we gangbare schoolboeken voor primair en voortgezet onderwijs onderzocht. Dit betreft de basisschoolmethoden ‘Alles Telt’ (Boerema et al., 2001), ‘Pluspunt’ (Van Beusekom et al., 2000), ‘Rekenrijk’ (Bokhove et al., 1999), ‘De wereld in getallen (Huitema, Van der Klis, Timmermans, Erich & Man, 2000) en de voorgezet-onderwijsmethoden ‘Getal en Ruimte’ (Reichard et al., 2004) en ‘Moderne Wiskunde’ (De Bruijn et al., 2007).
Uit de leerlingboeken van deze methoden hebben we alle opgaven en stukken theorie geselecteerd die in het domein breuken passen. In aanvulling hierop hebben we bekeken wat er in de handleidingen over deze opgaven, en over het rekenen met breuken in het algemeen, wordt gezegd. Daar het perspectief van het onderzoek waar deze analyse een onderdeel van is, de voorbereiding op het rekenen met breuken in havo en vwo betreft, hebben we procenten, verhoudingen en kommagetallen niet meegenomen - tenzij het rekenen met breuken daarin werd verwacht. In de analyse hebben we ons bovendien beperkt tot de onderdelen waar het om het vermenigvuldigen van breuken gaat. Bij deze analyse hebben we gekeken naar de oplossingsstrategie waar leerlingen naartoe worden gestuurd, naar het soort opgave dat daarbij wordt gebruikt en naar welke didactische modellen worden aangeboden. Wanneer we deze schoolboeken voor het basisonderwijs bekijken, zien we dat er verschillende procedures voor het vermenigvuldigen worden aangeleerd. Opvallend is bovendien dat die procedures worden gekoppeld aan specifieke combinaties van getallen.

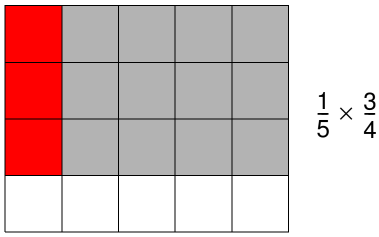
a Wanneer het gaat om ‘geheel getal keer breuk’, wordt gekozen voor herhaald optellen, waarbij bijvoorbeeld de getallenlijn als model wordt gebruikt (fig.2).
b Wanneer de opgave echter het karakter heeft van ‘breuk keer geheel getal’ dan wordt gekozen voor een ‘deel van’-benadering (fig.3). Een aanpak die steeds goed uitvoerbaar is omdat de getallen bij dit type opgaven steeds zo gekozen zijn, dat de uitkomst een geheel getal is.
c Bij ‘breuk keer breuk’ wordt gekozen voor een rechthoeksmodel - waarbij de rechthoek als eenheid fungeert - dat wordt gecombineerd met de ‘deel van’-benadering. De betrokken breuken worden als procedures opgevat. $\frac{3}{4}$ wordt vertaald in vier gelijke delen maken en daar 3 van nemen. En $\frac{1}{2}$ in twee gelijke stukken delen en daar één van nemen (fig.5).
d Voor opgaven met gemengde getallen zien we dat leerlingen wordt aangeleerd het getal te ‘splitsen’ in een geheel getal en een echte breuk om dan verder te rekenen als in (a), (b) en (c) beschreven werd.



figuur 2: sprongen op de getallenlijn



figuur 3: deel-van benadering



figuur 4: rechthoeksmodel

Tegenover het handelen met contextgebonden, benoemde getallen kunnen we het werken met onbenoemde getallen stellen. Hoewel er in de methoden voor het primair onderwijs ook kale sommen staan, lijkt er van de leerlingen te worden verwacht dat ze deze met concrete situaties, dan wel specifieke plaatjes associëren. Als de leerlingen deze aanwijzingen volgen, dan rekenen ze dus niet met breuken als onbenoemde, op zichzelf staande getallen, maar met benoemde contextgebonden getallen. Het rekenen heeft bovendien steeds het karakter van het uitvoeren van getalspecifieke procedures. Zoals bijvoorbeeld, $20 \times \frac{3}{4}$ reken je uit via herhaald optellen, $\frac{3}{4} \times 20$ reken je uit als ‘deel van’ en $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ met een oppervlaktemodel. De voorbeelden, die we hierboven hebben gegeven, laten zien dat het vermenigvuldigen van breuken op het niveau van de onbenoemde getallen op de basisschool niet wordt nagestreefd. Dit is in overeenstemming met de kerndoelen, waar de breuken alleen genoemd worden in kerndoel 26: ‘De leerlingen leren de structuur en samenhang van aantallen, gehele getallen, kommagetallen, breuken, procenten en verhoudingen op hoofdlijnen te doorzien en er in praktische situaties mee te rekenen.’ Nu valt te beargumenteren dat veel leerlingen een hoger niveau niet nodig hebben. Voor veel leerlingen zal het voldoende zijn als ze met de drie in de PO-boeken gepresenteerde procedures in concrete situaties uit de voeten kunnen. Een probleem voor die leerlingen kan echter wel zijn dat de te gebruiken procedure in de boekjes altijd wordt aangereikt. Er wordt niet van hen gevraagd te bedenken hoe een concrete situatie om te zetten in een rekenbewerking. Ze leren daardoor niet om zelf een procedure te kiezen. Bovendien zijn de getallen in veel gevallen zo gekozen dat het mooi uitkomt en worden ze niet voorbereid op situaties waar je niet mooi op een geheel getal uitkomt. Dit alles belemmert de toepasbaarheid van het geleerde. Voor de betere rekenaars geldt dat zij mogelijk al vermenigvuldigingen met onbenoemde getallen kunnen uitvoeren, maar dat daar in de PO-methoden niet aan wordt gewerkt.

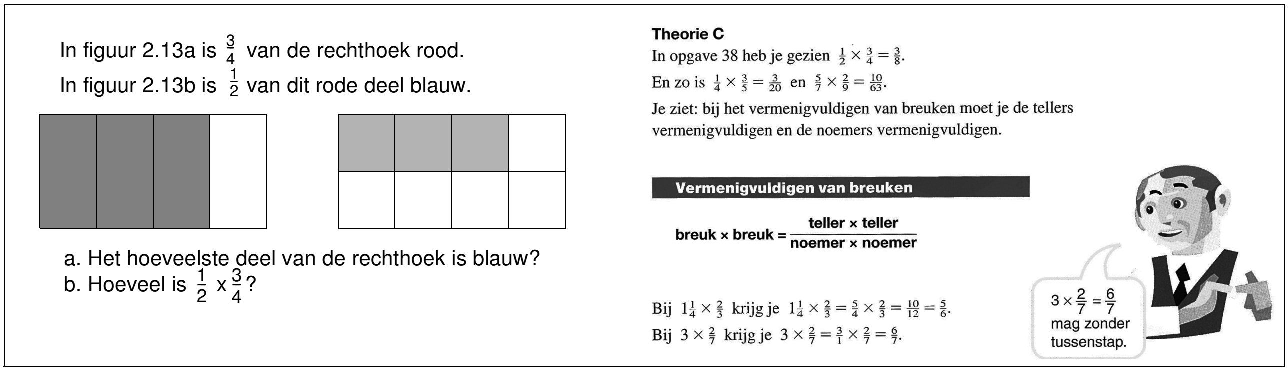
4 Voortgezet onderwijs

Wanneer we de methoden voor het voortgezet onderwijs voor havo en vwo, ‘Getal en Ruimte’ en ‘Moderne Wiskunde’ bekijken, zien we dat er al snel met onbenoemde getallen wordt gewerkt. De formele regel voor het vermenigvuldigen van breuken wordt in ‘Getal en Ruimte’ vrijwel direct ingevoerd aan de hand van een concreet model (fig.5).

Het lijkt erop alsof de auteurs van deze methode ervan uitgaan dat dit voor de leerlingen niet nieuw is. ‘Moderne Wiskunde’ sluit wat meer aan op het basisonderwijs, in die zin, dat er in eerste instantie met verschillende opgaventypen wordt gewerkt. Ook hier wordt de regel voor het vermenigvuldigen van breuken ingevoerd aan de hand van het oppervlaktemodel. Deze regel wordt echter alleen aan de orde gesteld voor het vermenigvuldigen van echte breuken. Dat je deze regel ook kunt gebruiken voor vermenigvuldigingen waar gehele getallen, of onechte breuken in voorkomen wordt niet besproken. Vanaf dat moment wordt er ook in Moderne Wiskunde regelmatig met onbenoemde breuken gewerkt.

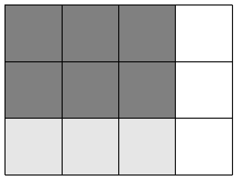
5 Overgang PO-VO

Opvallend is dat in het PO vrijwel uitsluitend met breuken als benoemde getallen wordt gewerkt, terwijl in het VO direct op het niveau van de onbenoemde getallen wordt gestart. In het PO wordt, terecht, gestart met een brede fenomenologische verkenning van breuken; daarmee wordt (1) aangesloten bij de informele kennis van de leerlingen, wordt (2) een brede begripsmatige basis gelegd en wordt (3) een basis gelegd voor toepasbaarheid. In lijn daarmee komen bewerkingen met breuken, zoals het vermenigvuldigen, naar voren als informele contextgebonden oplossingen. Een probleem is echter dat deze situatiespecifieke oplossingen in de huidige methoden worden ingeoefend als geïsoleerde standaardprocedures. Zo wordt $20 \times \frac{3}{4}$ geassocieerd met twintig pakjes melk van $\frac{3}{4}$ liter, een probleem dat kan worden opgelost door herhaald op te tellen of met behulp van de getallenlijn.
Bij de opgave $\frac{3}{4} \times 20$ gaat het echter heel anders. Dit wordt gekoppeld aan $\frac{3}{4}$ deel van iets nemen, wat geassocieerd wordt met de breukbetekenis van ‘in vier gelijke stukken delen en daar drie van nemen’. In de boekjes gaat het daarbij altijd om telbare of afpasbare zaken die je netjes kunt delen - zonder rest en zonder breuk in de uitkomst. Wanneer de realistische benadering consequent wordt gevolgd zou er in aansluiting op de informele aanpak moeten worden aangestuurd op een proces van generaliseren en formaliseren. Bijvoorbeeld door de leerlingen na te laten denken over de vraag of $20 \times \frac{3}{4}$ gelijk is aan $\frac{3}{4} \times 20$ en of je dat kunt beredeneren. Als we 20 keer $\frac{3}{4}$ moeten optellen, kunnen we dit ook zien als 5 groepen van $4 \times \frac{3}{4}$ die elk 3 waard zijn. Met andere woorden $20 \times \frac{3}{4} = (20 : 4) \times 3$ en dat is hetzelfde als waar



figuur 5: introductie van de regel voor het vermenigvuldigen van breuken

je op uitkomt wanneer je $\frac{3}{4} \times 20$ opvat als $\frac{3}{4}$ deel van 20 nemen. Kortom $20 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 20$. Dit soort activiteiten zou ergens in PO of VO aan de orde moeten komen. Nu gebeurt dat niet en wordt in het VO direct gestart met één standaardprocedure voor breuken als onbenoemde getallen. Daar wordt wel een plaatje bij gebruikt dat lijkt op het plaatje dat in het PO voor het vermenigvuldigen van breuken kleiner dan één wordt gebruikt, maar de rol van deze plaatjes is heel verschillend.



figuur 6: de betekenis is *in the eye of the beholder*

Bovendien zijn zulke plaatjes (fig.6) heel verraderlijk: de leraar kan daarbij praten over onbenoemde getallen, terwijl de leerling denkt aan benoemde getallen. De leraar kan het plaatje als een illustratie zien van de vermenigvuldiging van alle mogelijke breuken, terwijl de leerling alleen het concrete geval ziet dat staat afgebeeld.

Voor de leerlingen die naar havo en vwo doorstromen, is er dus geen sprake van een doorgaande leerlijn van PO naar VO. In het PO is vermenigvuldigen voor de leerlingen niet één ding, maar een conglomeraat van getalspecifieke procedures, die sterk gebonden zijn aan concrete situaties en modellen en die bovendien meestal zijn `voorgeschreven'. Breuken functioneren niet of nauwelijks op het niveau van onbenoemde getallen. Maar dit is wel het niveau waar het VO vrij snel op insteekt. Nadat de regel ‘teller keer teller en noemer keer noemer’ kort is toegelicht met een visueel model, wordt deze vervolgens bekend verondersteld. Deze regel kunnen de leerlingen uiteraard mechanisch leren toepassen, maar dat heeft weinig te maken met wat de leerlingen in het PO rond (het vermenigvuldigen van) breuken hebben geleerd.
Sterker nog, je kunt verwachten dat de in het PO ontwikkelde rekenprocedures gaan interfereren met de slecht onderbouwde regel, die voor veel leerlingen het karakter zal hebben van een onbegrepen regel. De kans daarop wordt verder vergroot doordat de uitontwikkeling van breukenkennis en -vaardigheden in VO-methoden in het algemeen geen systematische aandacht krijgt. Er wordt ten onrechte van uitgegaan dat het rekenen met breuken in het PO in feite al is afgerond. Daarbij wordt aangenomen dat breuken voor de leerlingen betekenis hebben als onbenoemde getallen annex op zichzelfstaande wiskundige objecten. Bovendien is er weinig aandacht voor de meer algemene eigenschappen en structuren op het tweede niveau van Van Hiele (1973). Ook in die zin is er dus geen sprake van een doorgaande leerlijn, want het is deze manier van redeneren over het vermenigvuldigen (en delen) van breuken, die ons inziens een voorwaarde is voor algebraïsch rekenen met breuken.

6 Aanbevelingen

Om dit probleem op te lossen, lijken aanpassingen in de bestaande reken- en wiskundemethoden noodzakelijk. Daarbij zal er afstemming tussen PO en VO moeten plaatsvinden. Zolang dat nog niet is gebeurd, adviseren we leraren PO het aanleren van aan specifieke contextgebonden procedures te vermijden. In plaats daarvan stellen wij voor te investeren in het ontwikkelen van inzicht in meer algemene eigenschappen en structuren. Net als bij het rekenen met natuurlijke getallen, dient het streven te zijn dat de leerlingen zich bij het uitvoeren van een berekening laten leiden door de getallen en het besef dat de volgorde van vermenigvuldiger en vermenigvuldigtal er niet toe doet. Dat $5 \times \frac{1}{2}$, bijvoorbeeld, hetzelfde is als ‘de helft van 5’, of ‘5 : 2’.
Een dergelijke aanpak zou ook meer recht doen aan het idee achter het gebruik van informele strategieën in het realistisch reken-wiskundeonderwijs, waar deze informele strategieën als opstap dienen voor het meer formele rekenen. Een van de uitgangspunten van het realistisch rekenen is het progressief mathematiseren (Treffers, 1987), dit omvat naast het horizontaal mathematiseren ook het verticaal mathematiseren (Gravemeijer, 2005). Het verticaal mathematiseren wordt in de huidige PO-methoden echter verwaarloosd en daarmee worden met name de betere leerlingen tekort gedaan. Maar ook voor de andere leerlingen lijkt ons het inslijpen van verschillende procedures ongewenst, zeker wanneer ze niet leren om zelf te beslissen wanneer ze welke procedure moeten toepassen.
VO-leraren zouden we erop willen wijzen dat het rekenen met breuken nog niet af is, wanneer de leerlingen van de basisschool komen. Dat verschillende lijntjes (procedures), die nu in de basisschoolmethoden worden uitgezet, bij elkaar gebracht moeten worden en dat er nog een slag gemaakt moet worden, voordat breuken op zichzelf staande (onbenoemde) getallen voor leerlingen worden. Verder zal er ook aandacht besteed moeten worden aan de relaties tussen breuken en de bewerkingen vermenigvuldigen en delen. En het vermenigvuldigen van breuken moet uiteindelijk zodanig veralgemeniseerd worden, dat niet alleen de breuken zelf, maar ook vermenigvuldigingen, zelfstandige wiskundige objecten worden, waar leerlingen mee kunnen redeneren.
Voor de wat langere termijn is onze aanbeveling dat ontwikkelaars van PO- en VO-methoden gezamenlijk een doorgaande leerlijn voor het rekenen met breuken ontwikkelen. Een leerlijn die beschrijft *hoe* er geleerd kan worden. Dat lijkt ons vruchtbaarder dan het precies vastleggen, *wat* er wanneer beheerst moet worden.

Literatuur

Beusekom, N. van, L. Schuffelers, G. Boersma, A. van Gool, J. Groen, H. van der Straaten, et al. (2000). *Pluspunt - rekenwiskundemethode voor de basisschool.* Den Bosch: Malmberg.

Boerema, J., W. Sweers, B. Krol, S. Hessing, J.N. van Noort, E. van den Bosch-Ploegh, et al. (2001). *Alles telt - reken-wiskundemethode voor het basisonderwijs*. Thiememeulenhof.

Bokhove, J., K. Kuipers, J. Postema, F. Baas, N. Eigenhuis, R. Roelofs, et al. (1999). *Rekenrijk - tweede editie.* Wolters-Noordhoff.

Bruin, I. de, W. Doekes, E. van der Eijk, S. Greefkens, T. Koens, D. Kok, et al. (2007). *Moderne wiskunde (9e editie).* Groningen: Wolters-Noordhoff bv.

Galen, F. van, E. Feijs, N. Figueiredo, K. Gravemeijer, K., E. van Herpen & R. Keijzer. (2005). *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen - tussendoelen annex leerlijnen.* Groningen: Wolters Noordhoff.

Gravemeijer, K.P.E. (2005). Revisiting 'Mathematics education revisited'. In: Heege, H. ter, T. Goris, R. Keijzer & L. Wesker (eds.). *Freudenthal 100*. Utrecht: Freudenthal Instituut, 106-113.

Hiele, P.M. van (1973). *Begrip en Inzicht*. Purmerend: Muusses.

Huitema, S., A. van der Klis, M.T.A.L. Erich, & P. Man (2000). *De wereld in getallen.* Den Bosch: Malmberg.

Reichard, L., S. Rozemond, J. Dijkhuis, C. Admiraal, G.T. Vaarwerk & J. Verbeek et al. (2004). *Getal en Ruimte 1 havo/vwo 1*. Houten: EPN.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research.* Dordrecht: Kluwer.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education.* The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel.

Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1994). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 3A Breuken.* Tilburg: Zwijsen.

The fraction curriculum extends from primary into secondary education. The continuity - or its lack - of the learning route encompassing two school systems has always been a point of concern. This article reports about an investigation of both primary school textbooks and secondary school textbooks for havo and vwo on this issue. The focus of this investigation was on how these textbooks prepare students for multiplying fractions on a more formal level. It showed that tasks and worked-out examples in the primary school textbooks aim at a set of calculation techniques, which are each tailored to specific number combinations, while the secondary school textbooks swiftly introduce one general rule (numerator times numerator, denominator times denominator) for all rational numbers.

The investigation further showed that the calculation techniques for multiplying fractions in the primary school textbooks are all grounded in contextual problems. Basically, students seem to be expected to reason with numbers that are tied to measures of some sort (such as kilometers or pizzas), and not with bare numbers as such. The general rule that is introduced in secondary school asks students to reason with numbers that do not have any reference to countable units. This shift, from reasoning with numbers tied to countable units to reasoning with 'unspecified' numbers, involves the construction of numbers as mathematical objects that derive their meaning from a framework of number relations (Van Hiele (1973).

It is argued that this transition requires a conceptual shift, which deserves much more attention. According to the theory of realistic mathematics education (RME) informal, situated, solution procedures should be followed by a process of generalizing and formalizing. Since neither primary, nor secondary school textbooks address this issue, the authors speak of a discontinuity. They further point to the need for a second conceptual shift concerning the multiplication of fractions when moving towards algebra.