

Proefschrift Sascha la Bastide-van Gemert

'Elke positieve actie begint met critiek' - Hans Freudenthal en de didactiek van de wiskunde

Bespreking door:

Jo Nelissen

Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen
Universiteit Utrecht

"Hans Freudenthal: hoogleraar wiskunde, wetenschapper, literator. Maar bovenal de man van het wiskundeonderwijs ...", met deze woorden begint La Bastide-van Gemert haar proefschrift over de persoon en de wetenschapper Freudenthal. In dit bijzondere proefschrift slaagt La Bastide er in een boeiend beeld te schetsen van het leven en werk van Freudenthal waarin, uiteraard, de wetenschap centraal staat, en waarmee de persoon onlosmakelijk is verbonden.

Het proefschrift begint met de weergave van een discussie over het wiskundeonderwijs in het VHMO (Gymnasium, HBS) met name tussen Dijksterhuis en mevr. Ehrenfest. De laatste wilde aandacht schenken aan de ontwikkeling van de intuïtie en het ruimtelijk denken en voorstellen. De discussie over de zogenoemde vormende waarde van de wiskunde speelde in het interbellum een centrale rol. Dijksterhuis was verklaard voorstander van de logisch-deductieve aanpak die inhield dat de leerlingen zich de strengheid en exacte formuleringen van de wiskunde dienden eigen te maken.

Inmiddels is Freudenthal vanuit Duitsland – op uitnodiging van Brouwer – naar Nederland en de Universiteit van Amsterdam vertrokken. Hij schrijft gedichten en romans, maar zet toch vooral zijn wiskundige werk voort met al spoedig grote belangstelling voor het onderwijs. Zijn eerste, niet gepubliceerde en niet voltooide, geschrift krijgt de titel 'Rekendidactiek' mee (± 1942). Dit geschrift is breed van opzet: over getal, over transfer, leren denken, psychologie etc. De promovendus bespreekt het manuscript uitvoerig omdat hierin veel ideeën zijn te vinden die Freudenthal later verder zal uitwerken. Alle zogenoemde hulpwetenschappen (pedagogiek, psychologie, filosofie) worden gewogen en uiteindelijk te licht bevonden, althans om goed wiskundeonderwijs op te kunnen baseren. Freudenthal keert zich bovendien tegen individueel onderwijs en spreekt zijn voorkeur uit voor onderwijs in kleine groepen. Inmiddels verschijnt steeds duidelijker zijn vrouw in beeld, die veel belangstelling heeft voor onderwijs en opvoeding.

Het valt mij op dat Freudenthal in die tijd redactiesommen als zinvol beschouwt omdat ze het leren denken bevorderen. De vier hoofdbewerkingen daarentegen, kunnen gerust en zonder probleem 'werktuiglijk' (routinematig dus) geoefend worden. Over beide standpunten zal hij jaren later, zo weet ik uit ervaring, het tegenovergestelde beweren. Het 'leren denken' was trouwens een terugkerend onderwerp in Freudenthals' voordrachten en het Nederlandse volk diende daarin bekwaamd te worden. Evenwel pleitte Freudenthal toen nog niet voor 'wiskunde voor allen'. Sterker nog, hij meende dat wiskunde onthouden mocht worden aan leerlingen die ongeschikt waren voor dat vak. Die opvatting veranderde echter drastisch en in de Groene Amsterdammer zal

hij stukjes schrijven die juist wel bedoeld waren als 'wiskunde voor allen' en geleidelijk aan ontwikkelde hij deze visie.

Ook over het V.O., de lerarenopleiding en het universitaire onderwijs sprak Freudenthal zich regelmatig uit. Het is opvallend dat hij in de vele discussies met vakgenoten tijdens talrijke conferenties pleit voor de culturele en vooral *pedagogische* vorming van de student én de (aanstaande) leraar wiskunde. La Bastide beschrijft dat hij als kritiek krijgt, de wiskunde te kort te doen.

Een belangrijk aspect in Freudenthal's werk, en dus ook in dit proefschrift, is de vraag: kun je (leren) denken door wiskunde te leren? De discussie hierover tussen Tatiana Ehrenfest en Freudenthal is erg interessant. De eerste verdedigde dat je door meetkundeonderwijs leert abstraheren en formuleren. Freudenthal bracht daartegen in dat Ehrenfest te veel uitging van de formele meetkunde en op basis dáárvan leert men niet denken. Bovendien mocht het leren denken niet als legitimering van het vak wiskunde dienen, kritiseerde Freudenthal. Wiskunde als zodanig heeft intrinsieke waarde, het vak zélf is de legitimering. Maar Freudenthal sloot het niet geheel uit dat het leren van wiskunde het denken zou kunnen bevorderen. Hij vreesde echter dat het denken in de wiskunde te abstract was voor overdracht naar het denken buiten de wiskunde. Hoe dan ook, denken leert men in discussie en tegenspraak. Het is opvallend echter dat Freudenthal voor deze tegenspraak geen rol in de wiskunde ziet weggelegd. Alles in de wiskunde is immers bewijsbaar en overzichtelijk, meent Freudenthal. Kohnstamm meende destijds overigens dat wiskundeonderwijs wél betekenis had voor het *logisch* denken. In het latere realistische rekenwiskundeonderwijs zal juist aan de discussie, zo heb ik ervaren, de controverse en de tegenspraak veel betekenis worden gehecht, al is daarmee niet beweerd dat de wiskunde als zodanig vormende waarde (voor het logisch denken) heeft.

In 1953 schrijft hij een opvallende serie artikelen in het Christelijk Schoolblad waarin hij zich keert tegen de angst van vakleerkrachten (wiskunde) voor de pedagogiek want die zou het vak wiskunde besmetten. De grapjes over 'paedagogums' en 'paedagoochelaars' noemt hij hoogmoedig. Freudenthal neemt het op voor de pedagogiek en zijn belangstelling voor didactische en pedagogische problemen van het leraarschap zal zeker zijn gevoed door zijn (persoonlijke) relatie met de Utrechtse pedagoog Langeveld en door het werk van zijn vrouw in de Jenaplan beweging. De vakwetenschap en de pedagogiek (in de universitaire lerarenopleiding) mogen niet worden gesplitst, was zijn overtuiging. Dit nam niet weg dat de 'dikdoenerij' van sommige pedagogen niet aan zijn aandacht ontsnapte.

Een interessant hoofdstuk (het 7^e) is dat over de niveautheorie van de Van Hieles. Pierre promoveert bij Freudenthal en zijn vrouw Dina bij Langeveld, beiden op dezelfde dag (4 juli 1957) en beiden op een onderwerp uit de wiskundedidactiek. Freudenthal was lovend in zijn commentaar op beide proefschriften en geen wonder dat de invloed van de theorie van de Van Hieles op het werk van Freudenthal groot was. Opmerkelijk is het dat Freudenthal's wetenschappelijke affiniteit het meest uitgaat naar het werk en vooral het empirisch onderzoek van Dieke van Hiele die immers bij Langveld promoveerde. Freudenthal was met name gecharmeerd door Dieke's talrijke observaties van leerprocessen van leerlingen. Niettemin omarmde hij volledig de niveautheorie, terwijl Pierre overigens verklaarde voor die theorie te tekenen. Op basis van deze theorie komt Freudenthal tot de constructie van zijn 'rein-

vention process' . Dat proces zou via de door van Hiele onderscheiden niveaus verlopen. 'Geleide herontdekking' was een centraal principe, juist ook door de rol die aan de leraar werd toegekend bij het ontwerpen van onderwijsleerprocessen. Er wordt zo voorkomen dat leerlingen belaagd worden met definities en begrippen nog voordat ze enige betekenisvolle ervaring met de betreffende thematiek hebben mogen opdoen. Dit laatste noemt Freudenthal de antididactische inversie. Geleidelijk aan integreert Freudenthal de niveau-theorie in zijn werk en generaliseert hij die theorie – op eigen wijze – naar andere gebieden dan alleen de meetkunde. Wat helaas in het proefschrift niet is vermeld, zou hij pas later in het proces van niveauverhoging een centrale en sturende kracht toekennen aan het *reflecteren*.

We zijn in de dissertatie inmiddels aangeland bij de 'New Math'. De New Math was komen overwaaien uit de Verenigde Staten en was daar populair geworden omdat de schoolwiskunde als verouderd werd beschouwd, als een vak van trucjes en formules leren. Bovendien werd niet aangesloten bij de universitaire wiskunde. Wiskundigen in de V.S. echter keerden zich tegen het geïsoleerde karakter van de New Math en het gebrek aan verbinding met de realiteit. De voorstanders van de New Math wezen op onderzoek waarin was aangetoond dat kinderen eerder aan logica toe waren en voor deze stelling zocht men steun in het werk van Piaget. Dat is een beetje vreemd want, zo dacht ik, Piaget heeft altijd beweerd dat het reversibel, reflectief en logisch denken pas na het 12^e jaar geleidelijk aan tot ontwikkeling komt.

Freudenthal spande zich in, in nationale en internationale commissies, zijn discussianten ervan te overtuigen dat er niet zozeer behoefte was aan nieuwe leerstof als wel aan een grondig herziene didactiek, een nieuwe methode dus. Dat wil zeggen, niet de 'structuren en relaties' waar de New Math voor pleitte, maar een nieuwe didactiek en dat is de didactiek van de 'guided reinvention'.

In het bijzonder bepleitte Freudenthal de vernieuwing van het meetkunde-onderwijs. Ook in dit hoofdstuk worden we geconfronteerd met de vraag of meetkunde vormende waarde kan hebben. Aan die waarde geloofde hij niet erg. Wel echter aan de verbinding die gelegd kon worden met de waarneembare werkelijkheid. De rol van de meetkunde in het wiskundeonderwijs achtte Freudenthal van groot belang en die moest beginnen met intuïtieve verkenning, dat wil zeggen met de ervaringen waarmee kinderen vertrouwd waren zodat hun interesse gewekt kon worden. Daarop volgend mochten de leerlingen kennis maken met de axiomatic. Dat laatste wilde niet zeggen dat axioma's geleerd dienden te worden maar dat geleerd werd te axiomatiseren. Naderhand meende Freudenthal echter weer dat axiomaticen in de meetkunde eigenlijk te gecompliceerd zijn. Overigens verklaarde Freudenthal later dat de wiskunde zeker vormende waarde kon hebben, maar dan wel de wiskunde van realistische snit.

Al met al was Freudenthal geen voorstander van de New Math, maar nam hij wat het meetkundeonderwijs betreft een meer genuanceerd standpunt in. Uiteindelijk beoordeelde hij *alle* vernieuwingen in eerste instantie niet vanuit de *inhoud* maar vanuit de *methode* van onderwijs, vanuit de didactiek dus.

Inmiddels naderen we ze jaren zeventig en komt het IOWO in zicht, waarvan Freudenthal hoogleraar-directeur zou worden. Op deze periode gaat de promovenda uitvoerig in: hoe hij zijn rol als directeur opvatte, de contacten, de wandelingen met zijn (klein)kinderen, de observaties en de (ook kritische) commentaren op zijn observaties. Freudenthal stelt voor kinderen te confron-

teren met paradigmatische voorbeelden (situaties, naderhand 'rijke contexten' genoemd) met de bedoeling probleemoplossen en reflectie op natuurlijke wijze uit te lokken. Deze aanpak geeft zicht op leerprocessen van kinderen.

Wat extra de aandacht trekt is wel de reactie van Freudenthal op het werk van Piaget. Hij zag niets in de opvatting van Piaget dat het aantal- of kardinaalgetal de grondslag zou zijn voor de ontwikkeling van het getalbegrip en niet het telgetal of ordinaal getal. Kinderen, zo betoogde hij, tellen, tellen terug, vooruit, verder etc. Bastiaan, zijn kleinzoon, weigert te tellen. Totdat hij aan tafel opmerkt dat er evenveel aalbessen als mensen zijn, namelijk 6. "Waarom?" vraagt Freudenthal. Bastiaan: "Er zijn twee kinderen, twee volwassenen en twee opa en oma". Zou de kleuter echt het begrip volwassenen hebben gebruikt? Hoe dan ook, Freudenthal laat zien dat kinderen zich niet op verzamelingen en 1-op-1 relaties baseren, maar dat ze zich bij het tellen oriënteren op structuren. Op grond van zulk soort observaties behoort het wiskundeonderwijs ontwikkeld te worden en deze werkwijze noemt hij 'didactische fenomenologie'. We moeten echter niet alleen kijken naar kinderen maar ook bekijken welke wiskunde voor kinderen nuttig ('useful') is: met andere woorden, wiskunde voor allen en dat moet (maatschappelijk) relevante wiskunde zijn voor iedereen. Dit idee sloot goed aan bij het middenschoolprincipe 'gelijke kansen voor iedereen'. Daarom sprak de middenschool Freudenthal wel aan, hoewel hij veel kritiek had op het homogene onderwijs van de middenschool. Hij was juist voorstander van heterogeen onderwijs en dat is onderwijs waarin leerlingen van uiteenlopend niveau met elkaar leren.

Het boek eindigt met een uitgebreide bespreking van Freudenthal's kritiek op het werk van Piaget, die zijn theorieën te veel zou baseren op proeven uitgevoerd in het laboratorium in plaats van observaties in natuurlijke situaties.

Het proefschrift eindigt zo ongeveer halverwege de jaren zeventig terwijl Freudenthal in de tachtiger jaren niet heeft stilgezet. Misschien is de beperking die de promovenda zich heeft opgelegd (maar zover ik kon nagaan niet heeft toegelicht) voor sommigen teleurstellend. Wellicht dat een volgende promovendus de volgende periode voor zijn/haar rekening durft te nemen. Gezien echter de rijkdom aan gegevens, informatie en analyses waarmee ik in deze dissertatie werd geconfronteerd, kan ik met die beperking goed leven.

Ik wil mijn waardering uitspreken voor het werk dat de promovenda heeft verricht. Haar speurwerk heeft geresulteerd in een boek waar ik het nodige uit heb kunnen leren, terwijl ik Freudenthal toch langere tijd heb mogen ontmoeten, al was dat niet zo vaak in de besproken periode. Het is een dissertatie waarin het leven en werk van Freudenthal steeds zijn vervlochten, zij het dat het werk (uiteraard) steeds de meeste aandacht krijgt. Maar de persoon Freudenthal verdwijnt nooit uit beeld: zijn werklust, kritische instelling, soms zijn zwijgen, zijn flexibiliteit en zijn voorkeuren. De lezer kan genieten van een levendig boek, waarin diepgaand het werk en het leven van een belangrijke Nederlandse wetenschapper, die nationaal en internationaal groot aanzien genoot, voor het voetlicht wordt gebracht.

La Bastide-van Gemert, S. (2006). *"Elke positieve actie begint met kritiek": Hans Freudenthal en de didactiek van de wiskunde*. Proefschrift Rijksuniversiteit Groningen [ISBN 90-6550-912-7]. Handelseditie bij Uitgeverij Verloren (€34,-). Na 11 mei 2008 ook online beschikbaar via <http://irs.ub.rug.nl/ppn/293114749>.