Inzicht in snelheid en afgelegde weg via grafieken

Michiel Doorman,
Freudenthal Instituut
Universiteit Utrecht

Samenvatting
Grafieken spelen traditioneel een belangrijke rol tijdens de behandeling van kinematica en differentiaalrekening. Bij wiskunde worden afstand-tijd grafieken gebruikt om het differentiequotiënt betekenis te geven als maat voor het snelheidsverloop. Dat veronderstelt bij leerlingen inzicht in de samenhang tussen snelheid en afgelegde weg. Echter, bij natuurkunde probeert men leerlingen dat inzicht bij te brengen met behulp van grafieken, waarbij hetzelfde differentiequotiënt een rol speelt. We betogen dat een overschatting van de rol van grafieken de oorzaak is van problemen van leerlingen bij het onderwijs in deze onderwerpen. In veel ICT-omgevingen is een benadering te herkennen waarbij zo'n overschatting dreigt. Men verwacht dan dat leerlingen door het exploreren van een simulatie, die gekoppeld is aan vakspecifieke representaties, de betekenis en het gebruik van die representaties zal leren. Hiernaast wordt een aanpak gesuggereerd waarbij leerlingen betrokken zijn bij een opbouw vanuit informele beschrijvingswijzen. Dit artikel beschrijft een onderzoek naar de mogelijkheden van zo'n benadering voor een geïntegreerde aanpak van kinematica en differentiaalrekening. In een leergang is een route uitgezet, waarbij representaties en hun betekenissen op elkaar voortbouwen. In deze leergang is in het bijzonder aandacht besteed aan ICT-gebruik dat het voor leerlingen mogelijk moet maken om gewenste stappen te zetten in de uitgestippelde leerroute. De ervaringen geven inzicht in een mogelijke benadering voor kinematica en differentiaalrekening die de geschetste problemen met grafieken voorkomt. Het blijkt dat leerlingen taal en redeneringen ontwikkelen tijdens het gebruik van ICT, en daarmee inzicht in de grafische representaties en de achterliggende begrippen.

1. Het onderwerp

Dit artikel gaat in op de mogelijkheden om leerlingen de beginselen van de kinematica en de differentiaalrekening te leren met een opbouw in grafieken. Deze mogelijkheden worden onderzocht in een ontwikkelingsonderzoek rond een benadering van het modelleren van beweging door leerlingen. In deze benadering zijn kinematica en differentiaalrekening geïntegreerd en worden in samenhang opgebouwd. Het onderzoek is onder andere gebaseerd op de gemeenschappelijke historische ontwikkeling van beide onderwerpen. In een eerder artikel in dit tijdschrift is verslag gedaan van deze uitgangspunten (Doorman en Gravemeijer, 1999).

Bij differentiaalrekening en bij kinematica is het gebruikelijk de begrippen te ontwikkelen aan de hand van continue grafieken. Raaklijnen aan en oppervlaktes onder grafieken spelen hierbij een rol. Tijdens de natuurkundelessen rond de samenhang tussen snelheid en afgelegde weg wordt de wiskunde van deze grafische methoden bekend verondersteld. Bij wiskunde worden die methoden juist meestal geïntroduceerd in de context van snelheid en afgelegde weg. Deze cirkelredenering wordt geïllustreerd door twee citaten. Het ene citaat komt uit het natuurkundeboek Newton en het andere uit het wiskundeboek Pascal (beide op p. 197):

Betreffende de snelheid op tijdstip *t* met behulp van een plaats-tijdgrafiek (s,t-diagram): “De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het (s,t)-diagram is gelijk aan de grootte van de snelheid.” *(Newton, vwo informatieboek 1a, p. 197)*	Over de helling (richtingscoëfficiënt) van een raaklijn in een plaats-tijdgrafiek bij *t* = 20: “De snelheid op *t* = 20 is de richtingscoëfficiënt van die raaklijn.” *(Pascal, vwo informatieboek, p.197)*

Beide citaten laten iets zien van de worsteling om met wiskundige middelen greep te krijgen op het begrip momentane snelheid. Een bijzonder probleem met dit begrip is het gebruik van een tijdsinterval en een moment. Snelheid is een momentane eigenschap van een beweging, maar zodra je betekenis wilt geven aan snelheid doe je dat over een interval en ben je het momentane kwijt (Streefland, 1981). Beth (1928) besprak al cirkelredeneringen rond momentane snelheid en illustreerde die met de volgende, naar zichzelf verwijzende, definitie:

> *De snelheid is, wat zij worden zou, indien zij bleef wat zij was.* (Beth, 1928, p. 54)

Een ander voorbeeld waarbij dit ‘momentane’ speelt, is de valbeweging. Wij vinden het nu vanzelfsprekend dat de snelheid op het moment van loslaten vanaf 0 toeneemt, en dat de versnelling direct een constante waarde van ongeveer 10 m/s^2 heeft. Dit is echter slechts te beredeneren vanuit een theoretisch model. Je ziet niet iets eenparig versneld vallen.

Vanuit historisch standpunt is deze problematiek interessant, want dit waren precies ook de problemen van historische figuren als Leonardo da Vinci en Galileï. Dijksterhuis (1950) beschrijft deze geschiedenis uitvoerig en meldt hier onder andere over:

> *Er zit iets paradoxaals in, te willen aangeven, hoe een grootheid op een zeker tijdstip bezig is te veranderen, terwijl het begrip verandering noodzakelijk vereist dat er een zeker tijdvak verloopt.* (Dijksterhuis, 1950, p. 287)

De geschiedenis laat zien hoe het wiskundig gebruik van grafieken en formules en natuurkundige inzichten rond de relatie tussen snelheid en afgelegde weg in samenhang zijn ontwikkeld. In het huidige onderwijs worden beide onderwerpen gescheiden aangeboden. In paragraaf 2 wordt geprobeerd aannemelijk te maken dat dit mede oorzaak is van problemen van leerlingen tijdens het leren van kinematica en differentiaalrekening. Hierbij beperken we ons tot de samenhang tussen snelheid en afgelegde weg, en de relatie met het differentiequotiënt.

Recent onderzoek naar manieren om deze onderwerpen geïntegreerd aan te bieden en de gesignaleerde problemen te verhelpen, laten twee benaderingen voor de leerstofopbouw zien. Beide benaderingen geven verschillende accenten aan het gebruik van ICT. Deze benaderingen en de rol van ICT worden besproken in paragraaf 3. Na een analyse van beide benaderingen betogen we dat de problematiek nog niet verholpen is.

In een ontwikkelingsonderzoek rond een leertraject over het modelleren van beweging is vervolgens onderzocht hoe de geschetste problemen kunnen worden voorkomen. Hierbij worden elementen van de twee benaderingen gebruikt. Het leertraject is uitgeprobeerd en enkele malen bijgesteld op grond van de ervaringen. Een deel van het cyclische proces van doordenken en beproeven van het leertraject staat beschreven in paragraaf 4 en 5. We bespreken daar in het bijzonder de rol van ICT in de leergang en het leerproces. Het artikel besluit met een discussie over de gevonden resultaten.

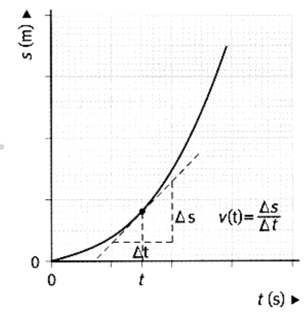
2. De problematiek

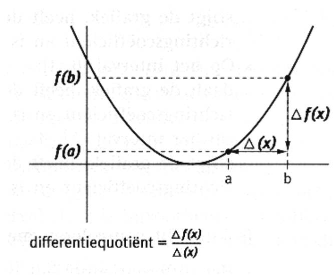
In deze paragraaf wordt verslag gedaan van problemen van leerlingen bij kinematica en differentiaalrekening. Hiertoe is literatuur geraadpleegd, zijn vakdidactische experts bevraagd, is de geschiedenis van het onderwerp bekeken en zijn 10 wiskunde- en 7 natuurkundelessen geobserveerd.

Uit de literatuur blijkt dat een aantal problemen van leerlingen te maken hebben met hun intuïties over beweging. Deze intuïties zijn meestal gebaseerd op hun perceptie van beweging tegen een constante achtergrond. Een bekend voorbeeld is de fietser die een steen laat vallen. Het beeld dat mensen hierbij hebben is dat de steen recht naar beneden valt. Het blijkt dat de toeschouwer de fiets als referentiekader voor de beweging van de steen ervaart (McClosky, 1983). Verder zijn we niet geneigd om de rol van tijd of tijdsinterval bij snelheid te betrekken. Snelheid is een eigenschap die je hebt op een bepaalde plek (“daar reed ik 50”), en wordt dus niet direct gezien als een samengestelde grootheid die een verband aangeeft tussen tijd en afgelegde weg.

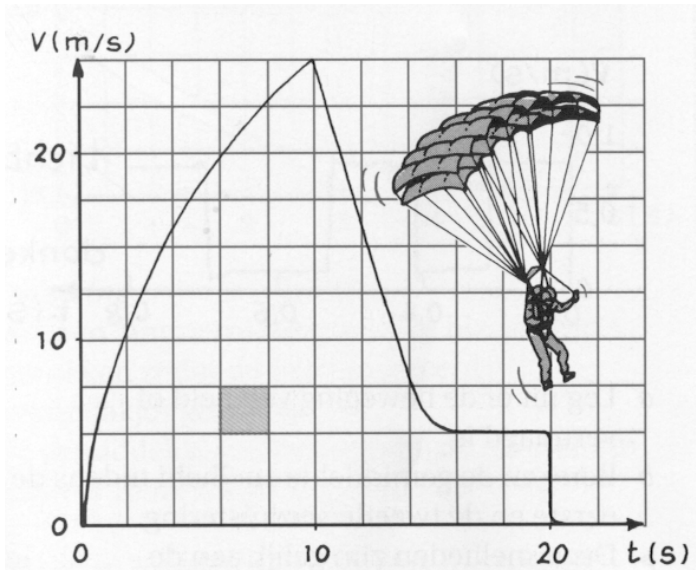
Dall’Alba e.a. (1993) hebben schoolboeken geanalyseerd op het terrein van versnelling. Een van hun conclusies is dat schoolboeken nauwelijks in gaan op het verband tussen intuïtieve ideeën en de natuurkundige begrippen en formules. Als voorbeeld geven ze drie verschillende definities van snelheid die door elkaar in de boeken werden gebruikt: $v = \Delta s/\Delta t$ of $v = (s_{eind} - s_{begin})/t$ (waar t een tijdsinterval is en v een constante of gemiddelde snelheid), of v als $\Delta s/\Delta t$ bij een raaklijn getekend aan een s-t-grafiek. Deze definities werden niet in verband gebracht met ideeën van leerlingen over snelheid.

Bovendien is opmerkelijk hoe verschillend schoolboeken met notaties omgaan. In wiskundeboeken wordt een differentiequotiënt meestal geassocieerd met een koorde in de grafiek en toegepast op de bijbehorende formule: kies zelf eerst een waarde voor Δx en bereken vervolgens $\Delta f(x)$ met die formule. Natuurkundeboeken gebruiken het differentiequotiënt voor het bepalen van de richtingscoëfficiënt van een raaklijn: schets de raaklijn en meet de waarden van Δs en Δt in willekeurige volgorde op een willekeurige plek. De variabele s is dan wisselend een functie van t of een variabele die staat voor een serie meetwaarden. Freudenthal (1983, p. 567 e.v.) heeft deze verschillen uitvoerig beschreven. Hieronder komt de figuur links uit een natuurboek en de figuur rechts uit een wiskundeboek. Voor iemand die de theorie kent, zijn de overeenkomsten direct duidelijk, voor leerlingen kunnen ze eenvoudig tot verwarringen leiden (Doorman, 2002).





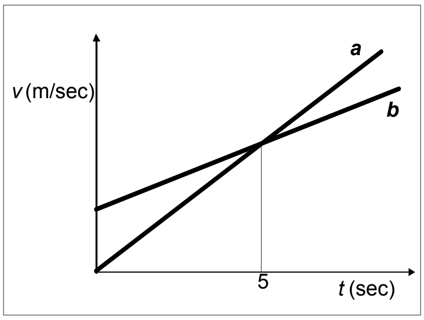
Veel onderzoek is gepubliceerd over problemen van leerlingen in het onderwijs van deze onderwerpen. McDermott e.a. (1987) en Clement (1985) hebben uitgebreide studies gedaan van problemen van leerlingen met grafieken. De volgende observatie uit een natuurkundeles blijkt representatief voor veel in de literatuur genoemde misvattingen van leerlingen bij het interpreteren van grafieken. De leerlingen krijgen een grafiek die de sprong van een parachutist beschrijft en de vraag is na hoeveel meter vallen hij z'n parachute open maakt. De les hiervoor is behandeld hoe je tijd-snelheid grafieken kunt gebruiken om de afgelegde weg van een voorwerp te bepalen. Twee uitspraken van leerlingen over de grafiek:



"Na 10 seconden is hij op z'n hoogste punt en dan gaat hij dalen"

"De valweg is ongeveer 50 hokjes. Dat is 250 cm^2"

De eerste uitspraak correspondeert met wat uit veel onderzoeken naar voren komt: leerlingen interpreteren een grafiek als een plaatje van de situatie. Clement onderscheidt hierbij twee aspecten: (*i*) leerlingen verbinden de globale vorm van de grafiek met visuele karakteristieken van de probleemsituatie (bijvoorbeeld: een bolling in een snelheid-tijd grafiek van een fietser die over een heuvel gaat), en (*ii*) ze verbinden lokale kenmerken van de probleemsituatie met vergelijkbare kenmerken van de grafiek. Versieringen, zoals bij de grafiek van de parachutespringer, werken zulke interpretaties ook in de hand. Deze kaartachtigheid van grafieken wordt niet alleen veroorzaakt door de vorm van de grafiek, maar ook door de taal waarmee we over grafieken praten. We gebruiken daarbij concrete meetkundige termen (zoals snijden, helling, omhoog, omlaag, stijgen en oppervlakte) en moeten daarom niet verbaasd zijn over verwarringen bij leerlingen (Goddijn, 1978, Dekker, 1991, Berg, 1994). Aspect (*ii*) wordt geïllustreerd met onderstaande *v*-*t*-grafiek. Bij die grafiek van twee eenparig versnelde bewegingen blijken leerlingen vaak het snijpunt te interpreteren als het moment van passeren.



Een ander probleem is dat vaak snel wordt overgegaan naar de formules die bij het onderwerp een rol spelen (Machold, 1992, Barnes, 1995, Kindt, 1995). In de schoolboeken staat het oefenen met die formules meestal centraal. Hierdoor zijn leerlingen eerder gespitst op het *hoe* dan op het *waarom*. Leerlingen gaan niet meer kwalitatief de situaties analyseren, maar proberen blindelings de formules toe te passen. De tweede uitspraak bij de grafiek van de parachutespringer is het gevolg van een introductie van de tel-de-hokjes-onder-de-grafiek methode zonder dat kennelijk duidelijk is waaarom en hoe die oppervlakte een maat voor de afgelegde weg geeft.

Uit het onderzoek van Dekker (1993) komt naar voren dat het voor leerlingen moeilijk blijft om grafieken goed te interpreteren en grafische kenmerken te gebruiken bij onderwerpen als kinematica en dynamica in de natuurkunde. Als oorzaak noemt Dekker onder andere dat:

> *De leerlingen onvoldoende geneigd waren om na te denken over de betekenis van definities, regels en formules zodat deze verkeerd werden toegepast en zelfs niet goed onthouden (...) zodra dat mogelijk leek waren velen toch snel geneigd genoegen te nemen met vormen van begrijpen in de zin van herkennen.* (Dekker, 1993, p. 166)

Een groot probleem bij het onderwerp is dat er gelijktijdig een beroep wordt gedaan op conceptuele en technische vaardigheden. Eén van Dekker's aanbevelingen is meer aandacht voor de samenhang tussen concepten en regels en een voorzichtige maar bijtijdse formalisering en een ruim gebruik van grafieken.

De conclusie die we uit al deze observaties kunnen trekken is dat de overgang van intuïtieve noties naar formele begrippen en grafieken bij deze onderwerpen te groot is. Hierdoor hebben leerlingen problemen bij het interpreteren van grafieken. Interpretaties die bij wiskunde nodig zijn om bijvoorbeeld uit te leggen dat de helling van een koorde de gemiddelde helling op een interval geeft, en die bij natuurkunde nodig zijn om de samenhang tussen snelheid en afgelegde weg te begrijpen. Dit heeft als gevolg dat leerlingen onvoldoende inzicht ontwikkelen in de wis- en natuurkundige begrippen.

We onderzoeken hoe een leertraject kan worden vormgegeven dat de hierboven genoemde problemen voorkomt. Een leertraject dat voortbouwt op intuïtieve redeneringen van leerlingen, met aandacht voor betekenis en interpretatie van grafieken en met een gelijdelijke formalisering van de samenhang tussen snelheid en afgelegde weg.

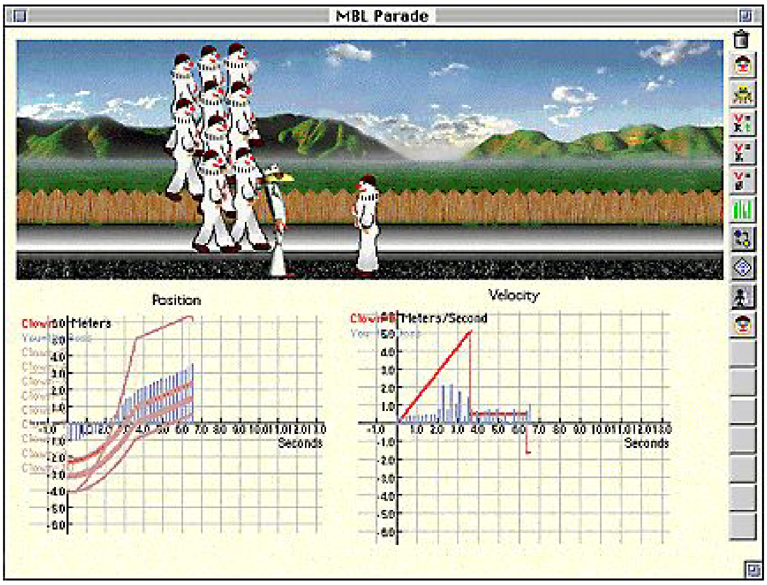
3. Naar een aanpak: het modelleren van beweging

In recente pogingen die proberen inzicht te krijgen in een mogelijk leertraject voor de beginselen van differentiaalrekening en kinematica zijn twee benaderingen te herkennen. Beide benaderingen hebben het modelleren van beweging als centraal thema, maar kiezen een verschillende invalshoek.

In de eerste benadering worden problemen van leerlingen gezien als gevolg van het *eilandprobleem* (Kaput, 1994). De wiskundige beschrijvingswijzen van beweging en de kinematica bevinden zich op het eiland van de wetenschappelijke kennis. Een eiland dat geen verbinding heeft met het vaste land van alledaagse ervaringen en intuïties.

De oplossing voor dit probleem wordt vervolgens gezocht in het creëren van een verbinding tussen de wetenschappelijke kennis en de alledaagse ervaringen. Deze verbinding wordt vormgegeven in computerprogramma's waarbij de wetenschappelijke beschrijvingswijzen gekoppeld zijn aan simulaties van fenomenen rond beweging. Zo kunnen leerlingen hun alledaagse kennis over beweging benutten om die wetenschappelijke beschrijvingswijzen te onderzoeken en er greep op te krijgen. Een voorbeeld hiervan is de software die Kaput ontwikkelt in het Simcalc project (www.simcalc.com).

De wetenschappelijke beschrijvingswijze van beweging bestaat uit continue *v*-*t*- en *s*-*t*-grafieken en in deze software is één van de fenomenen een simulatie van lopende clowns. Dankzij een koppeling tussen het ontstaan van de grafieken en de beweging van de clowns zullen leerlingen vermoedens formuleren en toetsen over de betekenis van die grafieken. De veronderstelling is dat gedurende die activiteiten ontdekken ze de betekenis van de grafieken en de samenhang tussen snelheid en afgelegde weg. Harder en zachter lopen kan gekoppeld worden aan een steilere en minder steile *s*-*t*-grafiek en aan een hogere en minder hoge *v*-*t*-grafiek. Men spreekt in dit verband ook wel over 'discovery learning' (de Jong, 1998a).



Het effect van SimCalc is tot nu toe onderzocht in formatieve evaluaties. Daaruit komt naar voren dat het programma leerlingen motiveert, en inderdaad leerlingen brengt tot redeneringen over de betekenis van helling en oppervlakte. Bovendien beklijven de dynamische beelden goed en ook later spelen ze een rol in redeneringen van leerlingen (Kaput & Schorr, in press). Het is echter niet duidelijk of die redeneringen alleen gebruik maken van uiterlijke verbanden tussen *v-t*- en *s-t*-grafieken (en de simulaties) of dat ook de achterliggende concepten begrepen zijn. De antwoorden van leerlingen die deze resultaten ondersteunen, zijn gegeven op vragen die varieerden op SimCalc-situaties.

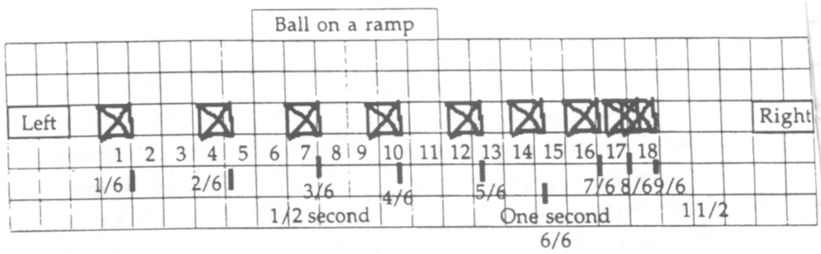
Het is mogelijk dat de redeneringen van leerlingen over de samenhang tussen de wetenschappelijke beschrijvingswijzen en de fenomenen berusten op een ‘guess and check’ strategie. Leerlingen kunnen bijvoorbeeld ontdekken dat een clowntje dat met constante snelheid beweegt telkens een lineaire *s-t*-grafiek levert. Alleen het leggen van een relatie tussen fenomenen en het ontstaan van (continue) grafieken hoeft echter niet te garanderen dat leerlingen alle elementen van die grafieken goed interpreteren, zoals het hoe en waarom van het differentiequotiënt en de relatie met de horizontale *t*-as (Boyd en Rubin, 1996). De Jong e.a. (1998b) merken op dat nog veel onderzoek nodig is voor inzicht in hoe de implementatie van dergelijke programma’s afhangt van een didactische inbedding in het onderwijs.

In feite sluit Kaput’s benadering aan bij een lange didactische traditie waarbinnen getracht werd abstracte wiskunde voor de leerlingen toegankelijk te maken door het aanbieden van concretiseringen van deze abstracte kennis. De ontwerper van het onderwijs kiest het uitgangspunt in het hoge niveau van de abstracte wiskunde en probeert de kloof tussen dit hoge niveau en het niveau van de leerling te overbruggen door de abstracte wiskunde dichterbij de leerling te brengen met behulp van zogenaamde structuurmaterialen. Je zou kunnen beargumenteren dat die structuurmaterialen hier vervangen zijn door computerprogramma's. De activiteiten voor de leerlingen zijn gericht op het exploreren van een computermodel. Het computermodel is gebaseerd op het formele systeem van het betreffende onderwerp. Dit systeem is echter consistent met een expertbeeld van de theorie en het is maar de vraag of leerlingen die consistentie overzien (Gilbert, 1998). Volgens Gilbert is zo'n programma een kunstmatige wereld die laat zien hoe een consensus-model werkt zonder dat leerlingen het proces van het tot consensus komen hebben doorgemaakt. Ze zullen in dergelijke omstandigheden het doel en de beperkingen van het model onvoldoende kunnen beoordelen.

Deze benadering is te contrasteren met een tweede benadering waar niet de wetenschappelijke kennis, maar de eigen informele kennis van de leerling als beginpunt wordt gekozen. Met betrekking tot computergebruik geven Doerr (1997) en Gilbert (1998) een alternatief voor de computer als gereedschap voor het uitdrukken van verbanden, het construeren van modellen door leerlingen. Ze noemen dit 'expressive modeling' in tegenstelling tot het exploreren van wetenschappelijke modellen in de eerste benadering.

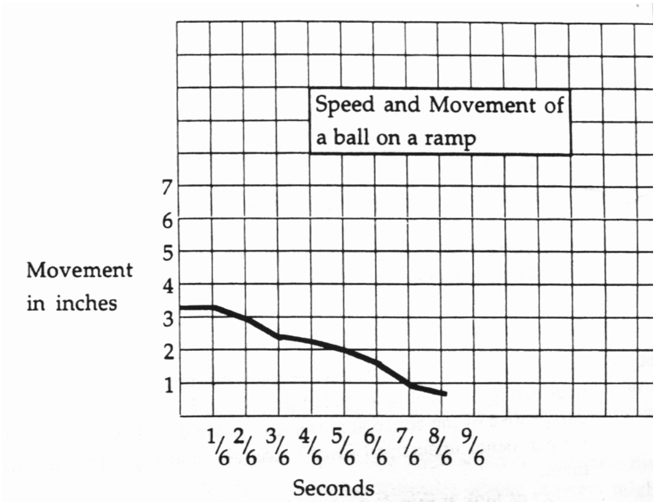
Een voorbeeld van zo'n andere benadering is het onderzoek van Boyd en Rubin (1996). Zij maken gebruik van digitale video die leerlingen de mogelijkheid biedt om filmpjes frame voor frame af te spelen. Leerlingen moeten zelf de beweging op de video zo beschrijven, dat ze vragen erover kunnen beantwoorden. Een leerling die aan het werk was met een filmpje over een rollend balletje dat tot stilstand komt, is uitvoerig geobserveerd.

De video vestigt haar aandacht op de verplaatsingen van het balletje tussen de frames. Deze verplaatsingen blijken een structuurelement voor haar redeneringen over de beweging en haar eerste beschrijvingen van die beweging. Bij die beschrijving gebruikt ze geen 2-dimensionaal assenstelsel met een horizontale tijd-as (die ze wel kende), maar tekent een horizontale ééndimensionale grafiek, terwijl de beweging schuin omhoog is:



Met haar grafiek ontwikkelt ze een taal om over de beweging en haar beschrijving te redeneren. Zo heeft ze het over snelheid als: "hoe lang het duurt om een bepaalde afstand af te leggen". In de sport een vrij natuurlijke manier om over snelheid te praten (afstand is daar vaak constant, de benodigde tijd is maat voor de snelheid).

Gedurende de activiteiten blijft ze voortdurend gebruik maken van haar één-dimensionale grafiek, die ze steeds verder 'aankleedt' tijdens vragen naar meer informatie. Als de observator echter vraagt om een beschrijving van de snelheidsverandering van het balletje, dan pas tekent ze een tweedimensionale grafiek:



Boyd en Rubin stellen dat de vraag naar een andere grootheid haar brachten tot deze andere beschrijving. In de grafiek is echter nog steeds gebruik gemaakt van de verplaatsingen, die nu vertikaal zijn uitgezet. Boyd en Rubin concluderen dat deze activiteiten belangrijk zijn, omdat het verband tussen beweging en het gebruik van grafieken centraal staat in het leren van differentiaalrekening en kinematica.

Als het inderdaad mogelijk is om leerlingen op deze manier de betekenis van kenmerken van afstand-tijd en snelheid-tijd grafieken zelf uit te laten vinden, dan lijkt het waarschijnlijk dat de kloof tussen de wetenschappelijke kennis en hun ervaringen niet ontstaat. Met 'uitvinden' wordt hier het karakter van het leerproces bedoeld. De activiteiten van de leerlingen zijn belangrijker dan de uitvinding als zodanig. De activiteiten moeten ervoor zorgen dat leerlingen hun verkregen kennis zien als uitbreiding van hun eigen kennis; een uitbreiding waarbij van hen een inbreng verwacht wordt en waarvoor ze zelf medeverantwoordelijk zijn. Zo ervaren leerlingen het onderwijs alsof ze het geleerde zelf hadden kunnen uitvinden (Freudenthal, 1991).

In deze visie op wiskundeonderwijs staat het mathematiseren door leerlingen centraal. Met mathematiseren wordt bedoeld: het organiseren van fenomenen vanuit wiskundig perspectief. Tijdens dit organiseren vindt een belangrijke verschuiving plaats, waarbij eerste informele beschrijvingen van leerlingen een 'model van' een specifieke situatie zijn, terwijl later die beschrijvingen functioneren als 'model voor' meer wiskundige structuren en redeneringen. In eerste instantie is het model een informele, context nabije beschrijving *van* fenomenen. Vervolgens staan die beschrijvingen ter discussie en ontstaat consensus over aspecten als gebruik en efficientie. De beschrijvingen zijn dan model *voor*, een organiserend middel *voor* een verzameling fenomenen.

De analyse van de benaderingen hierboven zijn aanleiding voor de volgende onderzoeksvraag: Hoe kunnen begrippen uit de kinematica en differentiaalrekening geintegreerd worden opgbouwd in een leertraject rond het modelleren van beweging met gebruik van ICT, zodat het leerproces als heruitvinden gekarakteriseerd kan worden? In de volgende paragraaf wordt eerst ingegaan op de methode om deze vraag te beantwoorden. Daarna worden de ontwikkeling van het traject en enkele ervaringen in het onderzoek beschreven.

4. Ontwikkelingsonderzoek naar een leertraject

Het doel van dit onderzoek is om te analyseren hoe een bepaalde benadering werkt. Een uitwerking van deze benadering moet dan echter wel eerst worden ontwikkeld. Voor het onderzoek wordt vervolgens een cyclisch proces gevraagd van doordenken, ontwikkelen en beproeven. Zo'n proces start met het beschrijven van een gewenste aanpak in een hypothetisch leertraject (Simon, 1995) of scenario. Deze beschrijving is een lokale uitwerking van de hypothesen en geeft aan hoe we verwachten dat het leerproces zal verlopen en waarom we dat verwachten. Met leerproces bedoelen we dan de mentale activiteiten en de redeneringen van de leerlingen. Vanuit het perspectief van het hypothetische leertraject wordt vervolgens het schoolexperiment uitgevoerd, worden lessen geobserveerd, de data geanalyseerd en gereflecteerd op de verwachtingen. Dit leidt weer tot het bijstellen en uitproberen van de leergang en tot inzichten in de gekozen aanpak (Gravemeijer, 1994, Lijnse, 1995).

De verwachting is dat aan het eind van dit onderzoek empirisch gefundeerde veronderstellingen kunnen worden geformuleerd, zowel over een didactische structuur van dit onderwerp, als meer overstijgende veronderstellingen over de rol van ICT en de onderwijstheorie voor deze leerlingen.

Het onderzoek is gestart met een literatuuronderzoek naar problemen met en benaderingen van de onderwerpen. Vervolgens is een eerste opzet van lesmateriaal ontwikkeld om greep te krijgen op wat mogelijk is in de gekozen onderwijssituatie. Deze eerste exploratieve versie van het lesmateriaal is uitgeprobeerd in twee 4 vwo klassen op één school waar afwisselend individueel, in tweetallen en in groepjes werd gewerkt. De docenten gebruikten ongeveer 25 minuten van de lessen voor klassikale discussies. De lessenserie nam acht lessen in beslag. Na elke twee lessen was er een korte nabespreking met één van de twee docenten. Tijdens deze nabesprekingen werden lessen geëvalueerd en ook werden volgende lessen voorbesproken.

Van alle lessen zijn aantekeningen gemaakt door een observator die tijdens het groepswerk af en toe in de discussies participeerde om leerlingen hun redeneringen te laten verhelderen. De aantekeningen zijn uitgewerkt in lesverslagen. Alle proefwerken van de leerlingen zijn gekopieerd en na het experiment is het leerlingenwerk van vijf leerlingen ingenomen en geanalyseerd. Deze vijf leerlingen zijn geselecteerd op grond van prestatie (een evenwichtige representatie van de klas) en op basis van de informatie die al van die leerlingen verzameld was. Zo is geprobeerd om van het leerproces van die leerlingen een zo goed mogelijk beeld te krijgen.

Na de analyse van de eerste exploratieve fase is een hypothetisch leertraject geformuleerd en uitgewerkt voor een tweede versie van het lesmateriaal. Die versie is in drie vier vwo klassen uitgeprobeerd op drie verschillende scholen. Het lesmateriaal en de verwachtingen zijn met de docenten doorgesproken tijdens twee bijeenkomsten vooraf. Van alle lessen zijn geluidsopnamen gemaakt en van enkele lessen ook nog video-opnamen. Tijdens de lessenserie zijn in enkele gevallen de verwachtingen en het lesmateriaal voor de komende lessen bijgesteld op grond van ervaringen met eerdere lessen en tussentijdse besprekingen met de docenten. Achteraf is van een aantal leerlingen hun werk ingenomen. Van alle leerlingen zijn de proefwerkuitwerkingen gekopieerd. Al deze gegevens worden geanalyseerd en vergeleken met de verwachtingen. Op dit moment bevindt het onderzoek zich in die laatste fase.

In dit artikel wordt het onderzoek bekeken vanuit het perspectief van de opbouw van grafieken en de samenhang tussen snelheid en afgelegde weg. In het bijzonder wordt ingegaan op de rol die het computerprogramma Flits speelt in het leerproces.

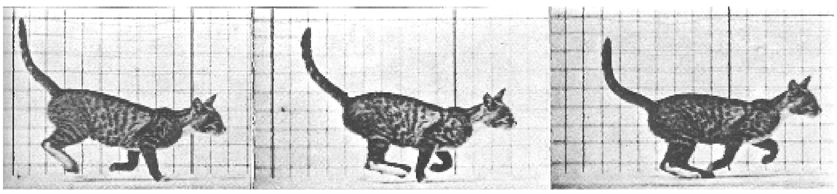
5. De eerste ronde

In het eerste onderwijsexperiment van het onderzoek proberen we greep te krijgen op de mogelijkheden voor een leerproces dat als heruitvinden door leerlingen kan worden gekarakteriseerd. De randvoorwaarden voor deze ex-ploratieve fase zijn dat we circa 10 lessen in vier vwo kunnen vullen.

5.1. ontwerp en verwachtingen

In het eerder genoemde artikel over dit onderzoek (Doorman en Gravemeijer, 1999) is een lesmateriaal gepresenteerd dat gebaseerd is op de geschiedenis van het onderwerp en op ervaringen met een bestaand leerstof pakket (Kindt, 1996). Dit lesmateriaal sluit aan bij een hoofdstuk uit het wiskundeboek van deze leerlingen en start met situaties waarin metingen aanleiding vormen tot vragen over snelheid en afgelegde weg.

Als situatie is een fotoserie van Muybridge (1985) gekozen (geïnspireerd door ideeën van Speiser 1994). Deze fotograaf bestudeerde aan het eind van de 19e eeuw bewegingen van mensen en dieren met behulp van fotoseries. De bewegingen werden gefotografeerd met een vaste frequentie en voor een rooster waarvan de maten gegeven zijn. Hieronder staan enkele foto's uit zo'n serie van een kat die begint te rennen.



Een van de vragen is om de overgang van het wandelen naar rennen van de kat te beschrijven en aan te geven binnen hoeveel seconden de kat op top-snelheid is. De verwachting is dat leerlingen in eerste instantie verplaatsingen gaan meten. Leerlingen interpreteren die meetwaarden als een maat voor de verandering van positie, een maat voor de veranderende snelheid. Ze gebruiken deze meetwaarden in hun redeneringen en voor het tekenen van grafieken. Bij een opgave over een eenparig versnelde beweging ontstaat dan discussie over wat er tussen twee tijdopnamen gebeurt. Dit roept de vraag op: hoe kun je beter voorspellen? Leerlingen komen met het idee voor het extrapoleren van patronen in verplaatsingen (eenparig versneld) en vragen om meer metingen om beter de veranderende snelheid te kunnen beschrijven. Deze vragen geven aanleiding tot beschrijvingen van bewegingen met een formule.

Vervolgens wordt bekeken of je preciezer kunt zijn over momentane snelheid en uiteindelijk zal die benaderd worden met het differentiequotiënt. Bovendien kun je daarmee de helling in een punt van een grafiek benaderen.

Zo ontstaat een keten van schematiseringen vanuit de fotoserie van de kat naar het differentiequotiënt. De betekenis die leerlingen aan iedere schakel in deze keten zullen geven wordt ontleend aan voorgaande activiteiten. De discrete grafieken komen eerst naar voren als modellen die de relaties tussen afstand, verplaatsingen en tijd van de fotoseries beschrijven. Deze discrete grafieken ontlenen hun betekenis aan de posities in de foto's, en staan later model voor redeneringen met continue grafieken. Geleidelijk aan wordt de grafiek een meer en meer opzichzelfstaand object voor de leerlingen. De grafiek kan gaan functioneren als model voor meer natuurkundige en wiskundige redeneringen en dat kan alleen als de visuele representatie meer is dan alleen maar een plaatje (Gravemeijer en Doorman, 1999).

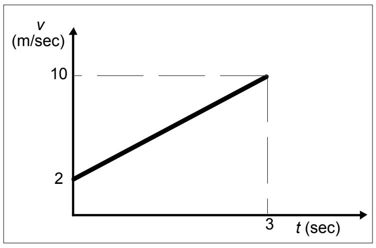
5.2. Ervaringen uit de eerste ronde

Tijdens de eerste lessen hadden leerlingen problemen met het meten in de verschillende foto's. Dit werd onder andere veroorzaakt door het ontbreken van een vast oriëntatiepunt. Leerlingen kwamen wel met grafieken, waaronder grafieken van verplaatsingen. Opvallend was dat een paar leerlingen horizontaal de afgelegde weg hadden gekozen en verticaal de tijd. Een keuze die voor de hand ligt, omdat de horizontale as dan de weg van de kat representeert.

De klassendiscussie rond deze context blijkt gedachten op te roepen die anticiperen op het vervolg. Er wordt gediscussieerd over de verschillende grafieken op grond van de data en er ontstaat de behoefte naar meer gegevens om preciezer te zijn over het snelheidsverloop. Het lukt echter niet om in volgende opdrachten leerlingen op de samenhang tussen verplaatsingen en afgelegde weg te richten. Uit observaties van groepsdiscussies tussen leerlingen volgt bijvoorbeeld dat constante snelheid in een grafiek gezien wordt als "gelijkmatige snelheid" en "bij die hobbels verandert hij voortdurend". De leerlingen gebruiken echter niet de grootheden langs de assen, wat zou blijken uit uitspraken als "daar doet hij gelijke verplaatsingen in dezelfde tijd". Hun redeneringen blijven steken bij grafische kenmerken: "drie plaatjes ongeveer dezelfde snelheid (...) drie dezelfde stijgingen dus". Als gevraagd wordt de snelheid te benaderen, dan lukt dat meestal niet. Een paar lessen later werken leerlingen met continue *s-t*-grafieken en bestuderen vragen over gemiddelde en momentane snelheden ("hoe zou de grafiek verder gaan als vanaf dan de snelheid niet meer verandert?"). Uit het leerlingenwerk en de klassendiscussies blijkt dat het voor veel leerlingen niet duidelijk is dat een lineaire *s-t*-grafiek voor een beweging met constante snelheid staat die met een differentiequotiënt te berekenen is. Bovendien is het voor de docent moeilijk om redeneringen en berekeningen te illustreren met resultaten uit eerdere lessen.

We concluderen dat de redeneringen teveel gebaseerd zijn op grond van grafische kenmerken zonder dat de leerlingen begrijpen waarom die kenmerken gebruikt kunnen worden. Iets wat we juist wilde voorkomen. Het lukte niet om grafieken volledig te laten functioneren als model voor redeneringen over verplaatsingen in tijdsintervallen of totale afgelegde weg in de doorlopen tijd.

Tijdens de bespreking van de les rond gemiddelde snelheid wees de docent op het verwarrende van de berekening van een gemiddelde hierbij. Leerlingen zijn gewend, zeker in de wiskundeles, om een gemiddelde van een serie waarden van één grootheid uit te rekenen volgens $(n_1 + n_2 + ... + n_k)/k$. Terwijl we bij dit onderwerp een gemiddelde associëren met grafieken en een deling van intervallen van twee verschillende grootheden ($\Delta s/\Delta t$). Dat is iets heel anders en de relatie tussen die twee gemiddelden blijft meestal onbesproken.



Naar aanleiding van die bespreking zijn nog eens enkele verslagen van natuurkundelessen geanalyseerd. Daaruit bleek inderdaad dat leerlingen bij bovenstaande grafiek dachten een gemiddelde snelheid te kunnen berekenen met $\Delta v/\Delta t$ (nadat ze geleerd hadden dat je gemiddelde snelheid 'altijd' kon berekenen met de deling: $\Delta s/\Delta t$). Bij deze grafiek werd verwacht dat ze de gemiddelde snelheid berekenen met: $(v_{begin} + v_{eind}) / 2$. Dat werd door de docent gemotiveerd met: "zo bereken je toch ook het gemiddelde van je proefwerkcijfers!" Terwijl het hier eigenlijk om een gemiddelde van oneindig veel verschillende snelheden gaat. Bovendien werkt die berekening alleen bij een eenparig versnelde beweging (wat de docent ook terloops noemde).

Tot slot kan worden opgemerkt dat de opgaven in het lesmateriaal waarschijnlijk niet voldoende hebben duidelijk gemaakt waarvoor het differentiequotiënt nodig is. Leerlingen konden het materiaal doorwerken dankzij veel kleine en, vanuit het leerlingenperspectief, ongerichte vragen. Om de vragen beter te richten, helpt een duidelijkere probleemstellende benadering (Vollebregt, 1998). Centraal staat daarbij de kernvraag van het hoofdstuk. Die vormt een globale motivering van de leergang. Zorg vervolgens dat duidelijk is hoe de opgaven je verder helpen bij het beantwoorden van de kernvraag (lokale motieven). Het beantwoorden van een opgave uit de leergang moet bij leerlingen, denkend aan de kernvraag, het volgende probleem oproepen dat moet worden opgelost.

Op grond van deze ervaringen proberen we het lesmateriaal voor leerlingen en docent zo te verbeteren dat er een concretere basis ontstaat voor grafieken van verplaatsingen en afgelegde weg die functioneren als model voor het redeneren over de samenhang tussen snelheid en afgelegde weg. Zodat bijvoorbeeld het verband tussen lineariteit in een grafiek van de afgelegde weg en constante snelheid echt gebaseerd is op telkens dezelfde verplaatsingen in gelijke tijdsintervallen. Voor leerlingen is daarbij de verschillende 'rol' van de horizontale tijd-as bij *s-t-* en *v-t*-grafieken duidelijk en bovendien is het gemiddelde meer in verband met voorkennis en hoe hierbij de grafieken te gebruiken. Zo ontstaat een samenhangend traject van problemen en zich ontwikkelende inzichten en hulpmiddelen met als eindpunt de beoogde inzichten zoals het nut en gebruik van het differentiequotiënt.

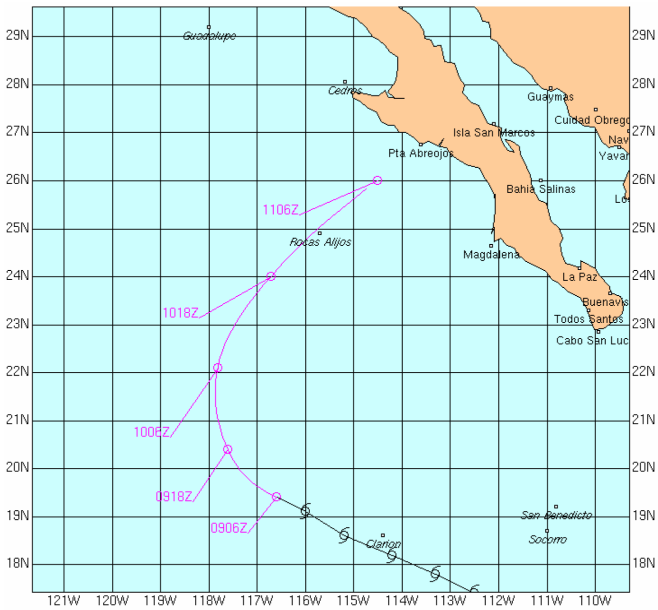
6. De tweede ronde

De ervaringen uit de eerste ronde vormden aanleiding voor een revisie van het materiaal met dit maal duidelijk omschreven verwachtingen over het leerproces. Het materiaal, de verwachtingen en een motivatie van die verwachtingen staan beschreven in een hypothetisch leertraject. De realisering van dit traject en de ervaringen ermee worden in deze paragraaf beschreven.

6.1. Vorming van een hypothetisch leertraject

Voor de herziene versie is gezocht naar een duidelijker centraal thema voor de lessenserie: het krijgen van greep op veranderingen. Hoe kunnen we veranderingsprocessen beschrijven, begrijpen en voorspellen? Enerzijds zou de context een basis moeten bieden voor leerlingen om met verplaatsingen over bewegingen te redeneren, en anderzijds moet hij de behoefte oproepen om met continue modellen te gaan werken. Dit thema met een globale probleemstelling vormt dan een reflectiekader voor de stof waar voortdurend naar terug gekeerd kan worden. Reflectie tijdens klassendiscussies kan dan voorkomen dat inzicht in grafische kenmerken en begrippen als gemiddelde snelheid en het differentiequotiënt op raden of accepteren berust.

De foto's van Muybridge gaven problemen doordat het meten in de verschillende foto's niet eenvoudig was en een vast oriëntatiepunt ontbrak. In plaats daarvan is vervolgens gezocht naar weergaven met alle informatie in één plaatje, zoals bij weerkaarten (animaties) en stroboscopische foto's. Daarmee werd gekozen voor een nadruk op het oproepen van redeneringen met verschillende grafische voorstellingen van bewegingen. Redeneringen in situaties en met hulpmiddelen die leerlingen op de samenhang tussen achtereenvolgende verplaatsingen en de afgelegde weg richten.



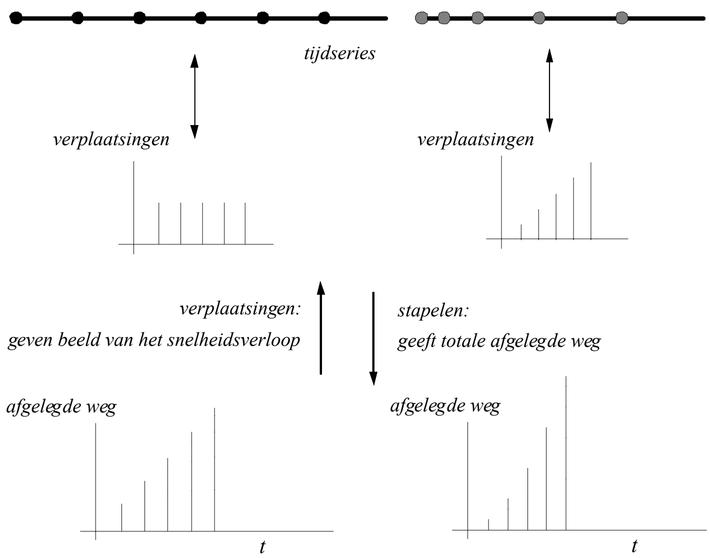
Dit is uiteindelijk geconcretiseerd in de context van een naderende orkaan. De vraag voor de leerlingen is: hoe kun je voorspellen wanneer de orkaan land zal treffen? Die situatie wordt gepresenteerd in het begin van het materiaal en gedurende de lessenserie wordt daar een aantal keren op teruggeblikt: wat kunnen we nu beter? Hoe zouden we nog preciezer kunnen zijn?

De beweging van deze orkaan wordt ingeleid met satellietopnamen. Bij het probleem werken leerlingen in eerste instantie met een zogenaamde stippengrafiek van de beweging van de orkaan. Het idee is dat het meten van de afstanden tussen de opeenvolgende posities een intuïtieve ingang vormt voor redeneringen over snelheidsverandering. Vervolgens moeten besprekingen van uitwerkingen van leerlingen leiden tot consensus over het nut en gebruik van grafieken. Grafieken van verplaatsingen in tijdsintervallen en van de hele afgelegde weg voor het beschrijven van snelheidsverandering en voor het doen van voorspellingen over bewegingen. De veronderstelling is dat tijdens de redeneringen met deze grafieken leerlingen inzicht vormen over de samenhang tussen snelheid, afgelegde weg en de grafieken.

In het begin van de lessenserie wordt vanuit situatie van de orkaan een overgang gemaakt naar het onderzoeken van bewegingen met behulp van stroboscopische foto’s.

Metingen geven een indruk van het globale karakter van een beweging. De afstanden tussen de stippen, de verplaatsingen, geven een beeld van het snelheidsverloop. Leerlingen kunnen de beweging beschrijven en voorspellingen doen met patronen in stippengrafieken. Maar ze ervaren ook dat als verplaatsingen toe- of afnemen, het moeilijk te zien is hoe dat precies gaat. Is het aannemelijk om de beweging van de orkaan voort te zetten met de laatste verplaatsing? Dit is aanleiding voor het vertikaal naast elkaar zetten van verplaatsingen in een grafiek. Zo krijg je een goed beeld van het snelheidsverloop van een beweging.

Deze opzet is weer te geven met de volgende volgorde van grafieken:



In deze aanpak sluiten we niet aan bij intuïties van leerlingen over snelheid en gemiddelde snelheid als samengestelde grootheid, maar wel bij intuïties over verplaatsingen als maat voor een actuele snelheid.

Tijdens een onderzoek naar de valbeweging wordt een continu model geïntroduceerd als veronderstelling van Galileï. Met de bijbehorende continue grafiek kunnen leerlingen redeneren door gebruik te maken van discrete benaderingen. De verwachting is dat leerlingen bij die redeneringen gebruik maken van de samenhang tussen verplaatsingen en afgelegde weg.

Nieuw ten opzichte van het eerste experiment is dat binnen deze opzet computerprogramma's zijn ingezet. Leerlingen krijgen onder andere een het programma Flits waarmee ze kunnen redeneren over bewegingen die zijn vastgelegd met stroboscopische foto's, zonder belemmerd te worden door de tijdrovende activiteit van het meten zelf. Hierdoor kunnen ze sneller in gaan op kenmerken van de beweging en van de grafieken.

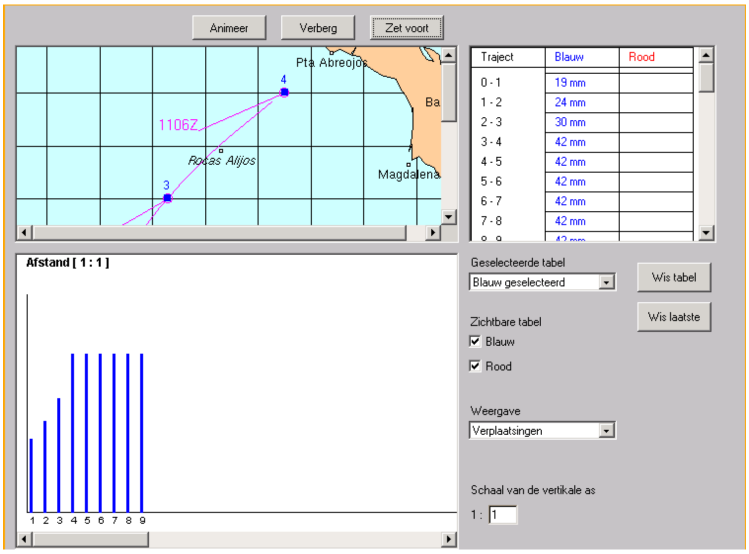
6.2. ICT als hulpmiddel tijdens modelleren

In de vorige paragraaf is de volgorde van problemen en grafieken voor het herziene materiaal in kaart gebracht. Er is echter nog nauwelijks aandacht besteed aan de hulpmiddelen die leerlingen hebben tijdens hun activiteiten. De historische ontwikkeling van de betreffende kennis laat zien dat niet alleen de problemen een leidraad vormen, maar dat inhoudelijke doorbraken een samenspel zijn van culturele factoren, van relevante problemen en de middelen die men tot hun beschikking had (Confrey, 1996). Voor het onderwijs geldt natuurlijk ook dat de ontwerper moet bedenken welke middelen leerlingen hebben bij hun activiteiten.

> *In designing curriculum materials you need to pay particular attention to the tools students are to use for producing inscriptions. Each tool has its own set of affordances for the kind of activity in which students engage (Roth, 1998, p. 53).*

De effectiviteit van de mogelijkheden van een computerprogramma zijn afhankelijk van de vormgeving van de interface, van de voorgeschiedenis van de leerlingen en van de activiteit waarbinnen ze het gereedschap gebruiken (Cobb 1999).

In de tweede opzet is voor een context met stroboscopische afbeeldingen gekozen. Om nu niet de activiteit van het meten te laten overheersen, maar de redeneringen van leerlingen te richten op de grafische modellen is het computerprogramma Flits ontworpen. Met het programma kunnen leerlingen klikken op achtereenvolgende posities in de foto. De afstanden tussen de klikpunten verschijnen in een tabel en als staafjes in een grafiek. De foto, de discrete staafjes-grafiek en de tabel staan bij elkaar op het scherm. Hieronder zie je het resultaat van het volgen van de orkaan door te klikken op de achtereenvolgende posities en vijf voortzettingen van de laatste verplaatsing.



De bedoeling van Flits is dat het een hulpmiddel is voor leerlingen bij hun redeneringen over bewegingen. Een hulpmiddel dat redeneringen richt op het gebruik grafieken van verplaatsingen en grafieken van de afgelegde weg. Bovendien ondersteunt het werk met Flits dat die redeneringen een concrete basis hebben: leerlingen zien voortdurend het verband tussen een stroboscopische foto, de stippengrafiek in de foto en de tabel en grafiek van verplaatsingen en afgelegde weg.

De verwachting dat Flits effectief is, is gebaseerd op strategieën rond het meten van verplaatsingen en de bruikbaarheid daarvan voor redeneringen met grafieken. Flits sluit aan bij die intuïtieve strategie doordat je een beweging kunt volgen met klikken op achtereenvolgende posities. Het klikken in de foto staat voor het meten van verplaatsingen tussen die posities. Tijdens het klikken worden ook de tabel gevuld en een grafiek getekend. Over deze grafiek als middel voor het beschrijven van bewegingen is vooraf in de klas consensus ontstaan. Desondanks kunnen leerlingen met Flits de betekenis van de verticale staafjes direct achterhalen door de verbinding met de tabel en de foto. De activiteiten met Flits verschuiven van het beschrijven of voorspellen van specifieke bewegingen naar vragen over de samenhang tussen grafieken en die kenmerken. In feite wordt met Flits georganiseerd wat de leerling in het onderzoek van Boyd en Rubin (1996) spontaan deed. Dit is een top-down element in de leergang waarvan we veronderstellen dat leerlingen het als 'zelf uitvinden' ervaren.

De effectiviteit van Flits moet te zien zijn in de redeneringen van de leerlingen. Ze kunnen zonder hulp de betekenis van de twee mogelijke grafieken achterhalen. De redeneringen over de beweging zullen in eerste instantie vooral betrekking hebben op de afstanden tussen stippen in de foto of het kaartje, terwijl later de redeneringen meer gebruik maken van kenmerken van de grafieken. Als ze vastlopen bij het interpreteren van de grafieken zullen ze terugvallen op de stippengrafiek, de stroboscopische foto of de beweging zelf, om de goede betekenis te achterhalen.

6.3. Ervaringen met Flits

In deze paragraaf worden twee protocollen van de computerlessen gepresenteerd. De protocollen zijn geselecteerd, omdat ze een beeld geven van redeneringen van leerlingen tijdens het werken met Flits. Op dit moment is nog onvoldoende duidelijk hoe representatief de protocollen zijn voor alle leerlingen. De twee leerlingen presteren gemiddeld voor wiskunde volgens de docent.

Het tweetal (M en J) en een participerende observator (O) zijn bezig met een opgave rond een stroboscopische foto van een stok die weggeworpen wordt. De stok maakt daarbij een draaiende beweging. De vraag is of met de foto te achterhalen is of het uiteinde meer aflegt dan het midden van de stok. Ze hebben inmiddels op beide punten van de stok klikpunten gezet en kunnen in de tabel en de grafiek representaties van de beweging zien.

O: (...) zou je hier, uit deze tabel, kunnen afleiden of het midden meer aflegt in totaal dan het uiteinde?

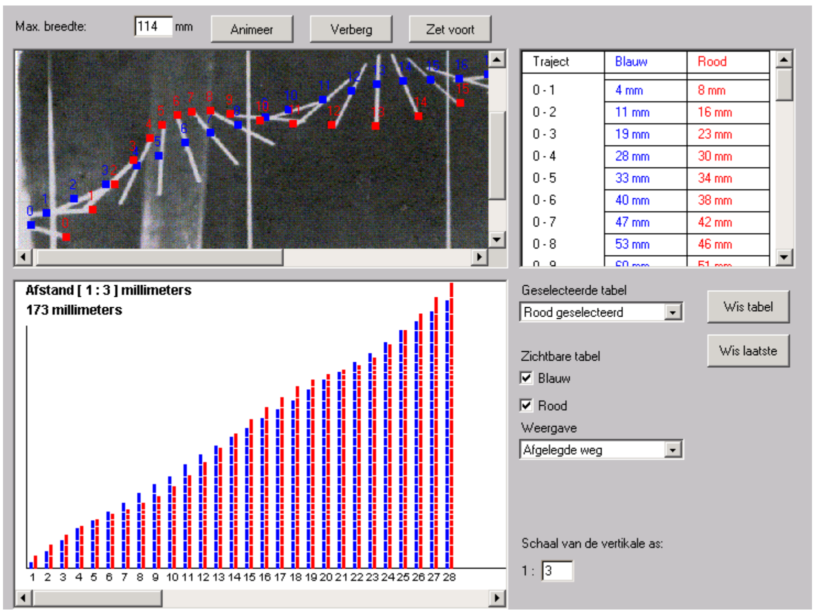
M: Nee, de rode. *(Voor het uiteinde hebben ze de rode serie, grijs in de grafiek hieronder.)*

O: Waarom denk je dat?

M: Waarom denk je dat? Nou, ga eens naar beneden… *(J gaat naar grafiek onder foto, met de muis)* Die rode die is, als je dat allemaal bij elkaar optelt, is ie meer dan als je de blauwe bij elkaar optelt. (...)

Vervolgens kiezen ze voor de grafiek met de totale afgelegde weg.

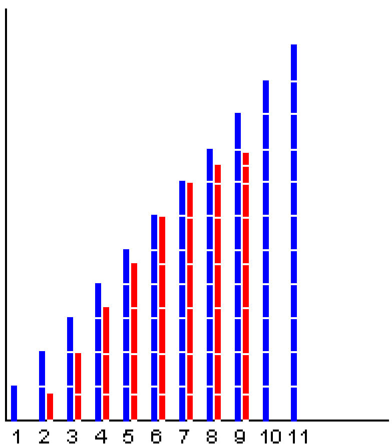
J: Hij gaat niet hoger. *(Die blauwe.)*



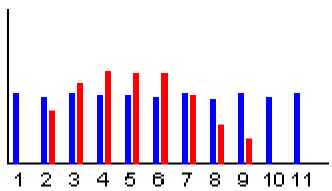
M: Dan heeft die rode meer afgelegd. *(O en J bevestigen dat)* (...)
O: Wat je daarnet zag (*bij de verplaatsingen*) was dat die rode rond die blauwe golfde en dat die blauwe redelijk constant was. Hoe zie je hier dat die blauwe redelijk constant is?
J: Dat als je er een lijn zou zetten, dat ie dan recht zou zijn. *(M wijst lijn door toppen op scherm)*

In deze laatste formulering legt J een verbinding tussen constante verplaatsingen en een lineaire grafiek van de afgelegde weg. Dit bevestigt de verwachting dat het werken met het programma een dergelijk inzicht ondersteunt. In het volgende protocol vergelijken ze de bewegingen van een cheetah die een zebra achtervolgt. De vraag is of de cheetah de zebra in zal halen. In eerste instantie hebben ze gekozen voor de grafiek van de afgelegde weg om dit te beredeneren. Als de observator vraagt of je dit niet ook kunt zien aan het snijpunt van de grafiek van de verplaatsingen (die later model staat voor de snelheid-tijd grafiek) antwoordt M dat die grafiek geen informatie geeft over de locatie.

M: Ehh, dan zet je er hier twee op elkaar en dan zie je hier dat ze allebei gelijk zijn. *(De twee grafieken komen uiteindelijk even hoog.)*
O: Ja. En welke van de twee grafieken is dat?
J+M: Dat is de afgelegde weg.
O: O ja. Want waarom heb je die van de afgelegde weg gekozen?
J: Ja, omdat het de weg is die ze afleggen en dan kan je…
M: Dan kan je zien of ze elkaar inhalen.
O: En bij die andere kun je dat niet zien dan? Daar kan je toch ook zien dat de rode de blauwe inhaalt?
J: Ja maar…
M: Ja maar dat is dan op 1 moment. Dat betekent alleen dat hij op dat moment harder gaat, maar niet dat ie ook de zebra inhaalt.



afgelegde weg



verplaatsingen

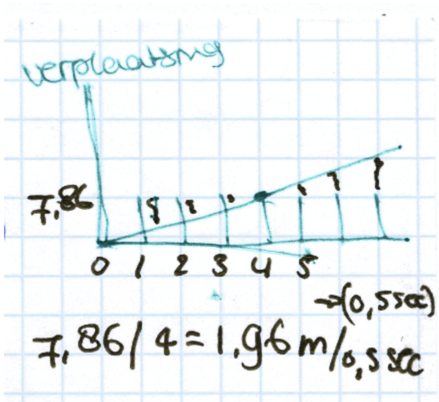
Kennelijk verwarren ze op dit moment niet kenmerken van de probleemsituatie (het passeren) met kenmerken van de grafiek (het 'snijden'), zoals de opmerking bij de grafiek aan het begin van dit artikel: "***a** passeert **b** na 5 seconden*". De laatste opmerking van **M** bevestigt de verwachting dat leerlingen dankzij de geleidelijke opbouw van de representaties en de rol van het programma de juiste betekenis aan de grafieken toekennen. Een betekenis die is gebaseerd op concrete meetwaarden en afstanden in de stroboscopische foto.

6.4. Reflectie op de rol van Flits

Voorafgaand aan het werken met Flits hebben leerlingen de situatie van de orkaan en de stroboscopische foto van een vallend balletje bekeken. Daarbij konden ze grafieken maken om te analyseren hoe het "versnellen" gaat. Veel verschillende vormen van grafieken kwamen naar voren: discrete en continue grafieken met verschillende grootheden bij de assen (tijd-hoogte van het balletje, tijd-afgelegde weg vanaf begin, tijd-verplaatsing tussen 2 tijdsintervallen, de tijd verticaal). Tijdens een klassendiscussie werden voor- en nadelen van de diverse grafieken besproken en kwam bovendien aan de orde hoe de grafieken samenhangen en met welke twee type grafieken Flits werkt. De volgende les vindt het computerpracticum met Flits plaats. In het begin van dit practicum gebruiken leerlingen vooral de grafieken om patronen te herkennen in de beweging die in het plaatje wordt weergegeven.

Opvallend is dat in alle klassen enkele leerlingen de verplaatsingengrafiek interpreteren als een beschrijving van de hoogte van de stip in de foto. Kennelijk is ook hier de grafiek met de verticale staafjes suggestief. In de meeste gevallen kwamen leerlingen er zelf uit door het verloop van de grafiek te vergelijken met de verplaatsingen in het plaatje of met de beweging zelf. Bij een paar tweetallen was het ingrijpen van observator of docent nodig om ze op het goede spoor te zetten. Voor die leerlingen moeten de grafieken van Flits eerst worden geproblematiseerd om te voorkomen dat ze via 'guess and check een betekenis krijgen.

Gedurende de opgaven worden steeds sneller uitspraken gedaan op grond van kenmerken van de grafieken. Tijdens het werken met Flits ontwikkelen leerlingen inzicht in de samenhang tussen begrippen en grafieken, zoals de samenhang tussen een constante grafiek van verplaatsingen, een constante snelheid en een lineaire grafiek van de afgelegde weg. Eenzelfde ontwikkeling is te zien in redeneringen over gemiddelde snelheid en de relatie met grafieken. Een volgende les krijgen leerlingen een opgave waarbij ze van een beweging de constante gemiddelde snelheid bepalen. De meeste leerlingen bepalen de totale afgelegde weg om daarmee het gemiddelde te berekenen. Er zijn echter ook leerlingen die in de grafiek van de verplaatsingen met een horizontale lijn de gemiddelde verplaatsing tekenen en daarmee een gemiddelde snelheid berekenen. En dat zijn precies redeneringen die voorbereiden op interpretaties van *s-t*- en *v-t*-grafieken met betrekking tot gemiddelde snelheid.



De veronderstelling is dat leerlingen zo gelijktijdig met het ontwikkelen van inzicht in die samenhang tussen grafieken van verplaatsingen en afgelegde weg, inzicht in de natuurkundige begrippen en wiskundige begrippen zelf ontwikkelen (zie bijvoorbeeld ook: Meira, 1995). De titel van dit artikel zou daarom ook kunnen zijn: inzicht in grafieken via snelheid en afgelegde weg.

Kenmerkend voor het type inzicht waarvan we hopen dat het zich ontwikkeld wordt geïllustreerd door het protocol bij de opgave over de cheetah. Het tweetal maakt duidelijk dat het snijpunt van verplaatsingen in een tijdsinterval weinig zegt over het daadwerkelijk passeren. Bij deze leerlingen is een verschuiving te zien van redeneringen over bewegingen met de grafieken als model *van* bewegingen naar redeneringen over de samenhang tussen snelheid en afgelegde weg waarbij die grafieken dienen als model *voor* die samenhang en *voor* redeneringen over gemiddelde snelheid en gemiddelde verandering. Zo ontstaat een keten van modelleer-activiteiten, waar bij een aantal keer software wordt ingezet om redeneringen te richten en het gebruik van modellen bij die redeneringen te stimuleren. Hiermee hopen we te voorkomen dat leerlingen uiteindelijk de fouten maken die in het begin van dit artikel zijn gepresenteerd.

7. Discussie

Tegenwoordig wordt op brede schaal gepleit voor onderwijs dat start met voor de leerlingen concrete probleemsituaties van waaruit ze op een betekenisvolle manier kennis en strategieën kunnen ontwikkelen. De uitdaging is echter om er vervolgens voor te zorgen dat de leerlingen deze informele aanpakken ontwikkelen tot gewenste onderdelen van het formele kennis systeem. Ze ervaren deze ontwikkeling alsof ze de nieuwe begrippen en inzichten zelf hadden kunnen uitvinden.

De onderzoeksmethode van een cyclisch proces van doordenken en beproeven van een hypothetische leerroute geeft inzicht in de manier waarop een dergelijk leerproces te realiseren is. In dit onderzoek gebeurt dat door discrete grafieken naar voren te laten komen als model van bewegingen en deze later te laten functioneren als model voor redeneringen over snelheid. De mogelijkheden die computerprogramma's leerlingen bieden om kenmerken van situaties uit te drukken worden daarbij benut. Tijdens dit proces krijgen leerlingen steeds meer greep op veranderingsprocessen door het beschrijven en voorspellen van bewegingen. In vergelijking met Roth:

> *Our research shows that competent readings are related to understanding of both the phenomena signified and the structure of the signifying domain, familiarity with the conventions relating the two domains, and familiarity with translating between the two domains. Graphs are not significant (signifying!) signs on their own.* (Roth, 2001, p. 189)

Een discussiepunt hierbij is in hoeverre 'top-down' geïntroduceerde hulpmiddelen kunnen functioneren in een leerproces dat als 'bottom-up' ervaren moet worden. Een oplossing is om een verbinding tussen de achtereenvolgende stappen te leggen met de model van-voor heuristiek en een probleemstellende benadering.

In deze opzet heeft de kinematica en differentiaalrekening haar aanleiding in de alledaagse realiteit. Het leren over deze onderwerpen is in principe het uitbreiden van kennis over (beschrijvingen van) waargenomen fenomenen. De problematisering van begrippen ten aanzien van een globale probleemstelling zorgt voor de behoefte aan nieuwe instrumenten en inzichten en voor overzicht over de leerstof. De kracht van deze benadering is dat leerlingen, idealiter, de relevantie van ieder nieuw begrip ervaren en een concrete basis ervoor hebben. De ervaringen zijn indicaties dat binnen deze didactische structuur leerlingen de representaties goed interpreteren en gebruiken om tot nieuwe inzichten te komen. Inzichten waarvan we veronderstellen dat ze problemen uit het begin van dit artikel zullen voorkomen.

De ervaringen in dit onderzoek geven ook aanleiding tot twee kanttekeningen bij de uitgangspunten. Het eerste punt betreft een criterium om na te gaan of inderdaad een volgende representatie haar betekenis ontleent aan een voorgaande. Bij onderzoek rond rekenen in het basisonderwijs wordt dit bevestigd door regelmatige observaties van leerlingen die terugvallen op eerdere representaties in situaties waar ze vast dreigen te lopen. Dat is in dit onderzoek slechts incidenteel waargenomen. Dit zou te maken kunnen hebben met de observatie van Dekker dat deze leerlingen snel genoegen nemen met een oppervlakkig antwoord of met het vastlopen. Misschien sneller dan basisschool leerlingen.

Ten tweede bleek dat in de leergang te weinig oefenmateriaal zat om leerlingen voldoende vertrouwd te maken met begrippen en representaties. Tijdens het experiment is hiertoe ingegrepen. De nadruk op een volgorde van representaties kan kennelijk als gevaar hebben dat er te weinig rustpunten in het lesmateriaal worden opgenomen. Dit is misschien mede een oorzaak van het eerste punt dat hierboven is genoemd. Het kan zijn dat de noodzakelijke vertrouwdheid met begrippen en representaties ontbrak om erop terug te kunnen vallen.

In dit artikel is nauwelijks ingegaan op een belangrijke factor in dit type onderwijs: de rol van de docent. Tijdens de twee uitvoeringen in twee klassen op verschillende scholen bleek bijvoorbeeld dat schoolcultuur, klassenklimaat (leerlingen durven te proberen en nemen er de tijd ervoor) en de rol van de docent daarbinnen (die geeft leerlingen een kans en laat tijdens discussies in de klas consensus ontstaan) belangrijke factoren zijn voor het leerproces van de leerlingen. De docenten spelen een cruciale rol bij het zich toe-eigenen van gereedschappen als computerprogramma's door leerlingen (Kanselaar e.a.

1999, Doerr 2000) en tijdens klassendiscussies waar consensus over grafische representaties, bijbehorende taal en begrippen naar voren komen (Treffers, 1990, Klaassen, 1994). Bovendien heeft Freudenthal al eens gesignaleerd dat zelfs zorgvuldig opgebouwde begrippen een eigen leven kunnen gaan leiden als niet af en toe teruggekeerd wordt naar de oorsprong van die begrippen. Essentieel hierbij is dat leerlingen leren reflecteren op hun eigen activiteiten (Freudenthal, 1981).

Met dit onderzoek is een begin gemaakt aan een opbouw van kinematica en differentiaalrekening. Het onderzoek geeft inzicht in de problematiek met het onderwijzen van deze onderwerpen en geeft aanknopingspunten voor het verhelpen van die problemen.

Correspondentie over dit artikel aan Michiel Doorman, Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht, Postbus 9432, 3506 GK Utrecht. E-mail: michiel@fi.uu.nl. Dank aan de docenten Rob ten Broeke, Albert Dorresteijn, Gerard Huls en Jeroen Zijlstra voor het geven van de lessen in dit experiment. Dit artikel komt voort uit het onderzoek Calculus en kinematica in het aandachtsgebied Wiskunde en ICT dat mogelijk gemaakt is door NWO, projectnummer 575-36-03C. Tot slot dank aan de referenten voor hun constructieve commentaar op een eerdere versie.

English summary

Understanding velocity and distance travelled through graphs

Traditionally graphs play an important role in the teaching of calculus and kinematics. Distance-time graphs are used in mathematics education to give meaning to the difference quotient as a measure of velocity. This presupposes that students understand the relation between velocity and distance travelled. However, this relationship is taught in physics education with the use of graphs and the difference quotient. We argue that an overestimation of the role of graphs is the cause of many problems with the learning of these topics for students. Many computer environments seem to implement a similar approach. It is expected that students learn the meaning and the use of formal representations by exploring a simulation where specific elements of the simulation are dynamically connected with these representations. Instead, we suggest an approach where students are involved in a development from informal inscriptions to formal representations. This article describes a research for the possibilities of such an approach for an integrated approach of calculus and kinematics. We developed a hypothetical learning trajectory in which inscriptions and concepts develop in a dialectic process. We especially focus on the role of ICT-use that affords students to make the desired steps on the learning route. The experiences give insight in the possibilities of an approach to calculus and kinematics that prevents the described problems with graphs. It appears that students develop language and reasoning during the use of ICT, and that this development concurs with a development in graphical representations and concepts.

Literatuur

Berg, C. A. & Smith, S. (1994). Assessing students' abilities to construct and interpret line graphs: disparities between multiple-choice and free-response instruments. *Science Education, 78*, 527-554.

Beth, H.J.E. (1928). Het experimenteel georienteerde onderwijs in mechanica.

Euclides, jrg 5, pp. 49-60.

Boyd, A. & Rubin, A. (1996). Interactive Video: A Bridge Between Motion and Math. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1*, 7-93.

Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing*, Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, L. Streefland (ed), Utrecht University, pp. 369-375.

Cobb, P. (1999). Individual and Collective Mathematical Development: The Case of Statistical Data Analysis. *Mathematical Thinking and Learning, 1*, 5-44.

Confrey, J. & Costa, S. (1996). A critique of the selection of “mathematical objects” as a central metaphor for advanced mathematical thinking. *International Journal of Computers for Mathematics Learning, 1*, 139-168.

Dall’Alba, G., Walsh, E., Bowden, J., Martin, E., Masters, G., Ramsden, P. & Stephanou, A. (1993). Textbook Treatment of Students’ Understanding acceleration *Journal of Research in Science Teaching, 30*, 621-635.

Dekker, J. (1993). *Wendbaarheid in Beweging*. Amsterdam: CMA.

DiSessa, A. A., Hammer, D. Sherin, B & Kolpakowski, T. (1991). Inventing Graphing: Meta- Representational Expertise in Children. *Journal of Mathematical Behavior, 10,* 117-160.

Doerr, H. M. (1997). Experiment, simulation and analysis: an integrated instructional approach to the concept of force. *International Journal of Science Education, 19,* 265-282.

Doerr, H. M. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies*, *41*, 143-163.

Doorman L. M. (2002). Een opbouw in grafieken. *Nieuwe Wiskrant*, *21,* 32-37.

Dijksterhuis, E. J. (1950). *De mechanisering van het wereldbeeld.* Amsterdam: Meulenhoff.

Freudenthal, H. (1981). Major Problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 133-150.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

Gilbert, J. K. & Boulter, C. J. (1998). Learning Science Through Models and Modeling. In: Fraser B.J., K.G. Tobin (eds.), *International Handbook of Science Education*, pp 53-66. Kluwer.

Goddijn, A. J. (1978). Lijngrafieken in de Gansstraat, *Wiskrant*, *3,* 1-3.

Gravemeijer, K. (1994). Educational Development and Educational Research in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25,* 443-471.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context Problems in Realistic Mathematics Education. A Calculus Course as an example, *Educational Studies in Mathematics, 39*, 111-129.

Halloun, I. A. & Hestenes, D. (1985). Common sense concepts about motion, *American Journal of Physics*, *53*, 1056-1065.

Jong, T. de & Joolingen, W.R. van (1998a). Scientific discovery learning with computer simulations of conceptual domains, *Review of Educational Research*, 68, 179-201.

Jong, T. de, Ainsworth, S., Dobson, M., van der Hulst, A., Levonen, J., Reimann, P., Sime, J.A., Someren, M van, Spada,. H. & Swaak, J. (1998b).

Acquiring Knowledge in Science and Mathematics: The Use of Multiple Representations in Technology-Based Learning Environments. In M. van Someren & H. P. A. Boshuizen & T. de Jong & P. Reimann (Eds.), *Learning with Multiple Representations* (pp. 9-40). Oxford, UK: Elsevier.

Kanselaar, G., Galen, F. van,. Beemer, H., Erkens, G., Gravemeijer, K. (1999). *Grafieken leren met de computer*. Utrecht: Universiteit Utrecht, Onderwijskunde, ISOR.

Kaput, J. J. (1994). The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience, R. Biehler e.a. (Eds*.), Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 379-397). Dordrecht: Kluwer.

Kaput, J. & Schorr, R. (in press). *Changing representational infrastructures changes most everything*: The case of SimCalc, Algebra, and Calculus. In G. Blume & K. Heid (Eds.), Research on technology in the learning and teaching of mathematics: Syntheses and perspectives, Mahwah, NJ: Erlbaum. (Available at: http://www.simcalc.umassd.edu/NewWebsite/downloads/ChangingInfrastruct.pdf)

Kindt, M. (1995). Differentiëren, dat begrijp ik wel, maar wat die productregel daarmee te maken heeft ...? *Nieuwe Wiskrant*, 14, 50.

Kindt, M. (1996). *Som & verschil, afstand & snelheid. Differentiaal- en Integraalrekening deel 1*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Klaassen, C. W. J. M. (1994). Knowledge acquisition as interpersonal understanding. In P. L. Lijnse (ed.) *European Research in Science Education*. Utrecht: CDβ-Press.

Lijnse, P. L. (1995). “Developmental research” as a way to an empirically based “didactical structure” of science. *Science Education*, *79*, 189-199.

Machold, D. K. (1992). Is Physics Worth Teaching? *Science & Education, 1*, 301-311.

McClosky, M. (1983). Intuitive Physics, *Scientific American, 248,* 114-122.

McDermott, L. C., Rosenquist, M. L. & Zee, E. H. van (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics, *American Journal of Physics*, *55*, 503-513.

Meira, L. (1995). The Microevolution of Mathematical Representations in Children’s Activity, *Cognition and Instruction*, *13,* 269-313.

Muybridge, E. (1985). Horses and Other Animals in Motion. New York: Dover.

Roth, W. M. & McGinn, M. K. (1998). Inscriptions: Toward a Theory of Representing as Social Practice, *Review of Educational Research*, *68*, 35-59.

Roth, W. M. & Bowen, G. M. (2001). Professionals Read Graphs: *A Semiotic Analysis, Journal for Research in Mathematics Education, 32,* 159-194.

Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*, 114-145.

Streefland, L. (1981). Zoals eenvoudig valt in te zien. *Nieuwe Wiskrant 1,* 3-7.

Streefland, L. (1985), Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron. *Nieuwe Wiskrant*, *5*, 60- 67.

Speiser, B. & Walter C. (1994). Catwalk: First-Semester Calculus, *Journal of Mathematical Behavior, 13*, 135-152.

Treffers, A. (1990) Wiskunde onderwijstheorie of β-onderwijstheorie. In P. L. Lijnse en W. de Vos (ed.), *Didactief in Perspectief.* Utrecht: CDβ Press.

Vollebregt, M. J. (1998). *A Problem Posing Approach to Teaching an Initial Particle Model.* Utrecht: CD-β Press.