

Artefact en instrument: Computeralgebra en algebraïsche schema's

Paul Drijvers, Koeno Gravemeijer
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

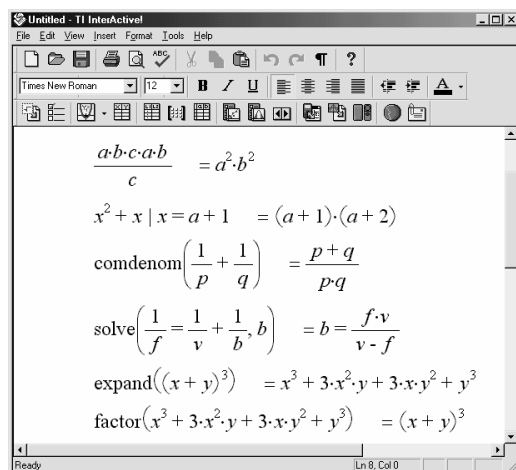
Samenvatting

Dit artikel doet verslag van onderzoek naar het gebruik van computeralgebra bij het leren van algebra. Als theoretisch kader is hierbij de zogeheten instrumentele benadering van ICT-gereedschap gebruikt. Deze theorie maakt onderscheid tussen artefact en instrument. Het instrument omvat het artefact maar ook de mentale schema's die de leerling ontwikkelt om het artefact efficiënt te kunnen gebruiken. In dergelijke mentale schema's zijn technische en conceptuele elementen verweven. De conclusie is dat de instrumentele benadering een vruchtbaar perspectief biedt om de relatie tussen ICT-gebruik en leren in kaart te brengen. Wel moet nader worden onderzocht hoe deze benadering samenhangt met andere theoretische perspectieven, zoals die van het symboliseren en modelleren.

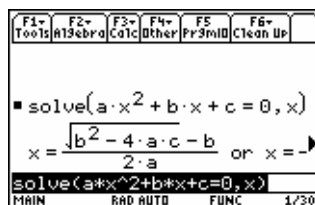
1. Inleiding

De inzet van ICT in het wiskundeonderwijs is al geruime tijd onderwerp van discussie en thema van onderzoek. Men vraagt zich af op welke manier krachtig ICT-gereedschap het leren van wiskunde beïnvloedt en welke effecten dit heeft op handmatige vaardigheden. Leidt de integratie van ICT tot andere accenten in het curriculum? Op welke manier kan de docent ICT in het wiskundeonderwijs integreren en hoe verandert het 'didactisch contract'? Dergelijke vragen zijn niet nieuw: ze kwamen eerder ook aan de orde bij de invoering van de zakrekenmachine in de onderbouw en, wat recenter, bij de invoering van de grafische rekenmachine in de tweede fase van havo en vwo. Hoewel de discussie in zekere zin dus wordt herhaald, heeft elk type ICT-gereedschap eigen kenmerken, wat vraagt om specifieke antwoorden op de gestelde vragen.

Bijzonder prangend zijn deze vragen voor het type software dat wordt aangeduid als computeralgebra. Computeralgebra-software voert vrijwel alle algebraïsche manipulaties uit die in de schoolwiskunde aan de orde komen, en die vaak als de kern van het wiskundecurriculum worden beschouwd. Kenmerkend voor computeralgebra zijn mogelijkheden voor formulemanipulatie (bijvoorbeeld haakjes wegwerken, vereenvoudigen), exact oplossen van vergelijkingen en algebraïsche bewerkingen, inclusief het symbolisch differentiëren en integreren (Fig. 1). Daarnaast biedt computeralgebra ook mogelijkheden voor numeriek rekenen met gewenste precisie, voor het tekenen van grafieken en voor het werken met tabellen. Behalve in de vorm van software voor PC's (Maple, Derive, TI Interactive) is computeralgebra ook beschikbaar op 'handheld' machines zoals de Casio Classpad 300 of de TI-89 van Texas Instruments (Fig. 2).



Figuur 1. Enkele algebraïsche mogelijkheden van computeralgebra.



Figuur 2. Voorkant en scherm van de handheld computeralgebra-machine TI-89.

De algebraïsche mogelijkheden van computeralgebra leiden tot de vraag op welke manier het gebruik ervan interfereert met het leren van algebra. Deze problematiek vormt de achtergrond van het onderzoeksproject 'Algebra leren in een computeralgebra-omgeving' waar dit artikel uit voortvloeit (Drijvers, 2003; Drijvers & Gravemeijer, 2004). Het idee achter dit onderzoek is, dat het inzetten van computeralgebra de leerling niet alleen werk uit handen neemt, maar ook aanleiding kan zijn tot het reflecteren op de algebraïsche concepten en operaties. De centrale onderzoeksvraag luidt dan ook:

Hoe kan het gebruik van computeralgebra het inzicht bevorderen in algebraïsche concepten en operaties?

Deze algemene vraag is gespecificeerd in de volgende twee deelvragen:

1. Hoe kan het gebruik van computeralgebra bijdragen aan een hoger niveau van inzicht in het parameterbegrip?

2. Wat is de relatie tussen geïnstrumenteerde technieken in de computeralgebra omgeving en wiskundige begrippen, zoals die tot stand komt in het instrumentatieproces?

De eerste deelvraag geeft aan dat het parameterbegrip centraal staat. Deze keuze is gemaakt omdat parameters enerzijds op natuurlijke wijze in concrete probleemsituaties naar voren komen en anderzijds aanleiding zijn tot generalisatie en abstractie. De tweede deelvraag betreft de interactie tussen het gebruik van de computeralgebra-omgeving en het wiskundig denken, zoals die in de loop van de tijd vorm krijgt.

In dit artikel gaan we niet verder in op de eerste deelvraag, al speelt het parameterbegrip wel een rol in de opgaven en de voorbeelden die aan de orde zullen komen. We concentreren ons hier op de tweede deelvraag. De hierin gehanteerde term 'instrumentatieproces' verraaft het theoretisch kader dat is gebruikt, namelijk de zogeheten instrumentele benadering van ICT-gebruik. Ons doel in dit artikel is om het onderzoek en de resultaten te beschrijven, maar ook om de kracht en de zwakte van de instrumentele benadering nader te beschouwen. We vermoeden namelijk dat het toepassingsgebied hiervan verder reikt dan het gebruik van computeralgebra.

In paragraaf 2 bespreken we het theoretisch kader van de instrumentele benadering van ICT-gebruik. Paragraaf 3 beschrijft de onderzoeksmethodologie en opzet. Paragrafen 4 en 5 'zoomen in' op de opbrengst van het onderzoek ten aanzien van de identificatie van instrumentatieschema's. Paragraaf 4 bevat het werk van een leerling met computeralgebra en geeft aan hoe de instrumentele benadering ons helpt dit gedrag te interpreteren. Paragraaf 5 geeft een overzicht van de bevindingen met betrekking tot instrumentatieschema's. Paragraaf 6 besluit dit artikel met globalere conclusies en een discussie.

2. De instrumentele benadering van ICT-gebruik

Over de inzet van ICT-gereedschap in het wiskundeonderwijs wordt verschillend gedacht. Van een kant kan men vrezen dat voor de leerling niet veel te doen overblijft als ICT op grote schaal wordt gebruikt, omdat technologie het werk van de leerling overneemt. Van de andere kant kan men optimistisch stellen dat het routinewerk wordt uitbesteed, waardoor meer aandacht kan worden besteed aan begripsvorming, modelleren en het ontwerpen van oplossingsstrategieën in realistische toepassingen. Naar ons idee ligt dit genuanceerd: we zijn van mening dat er mogelijkheden liggen om het wiskundeonderwijs met ICT – in dit geval computeralgebra – betekenisvoller en interessanter te maken, maar zien dat het uitbesteden van werk aan gecompliceerd gereedschap zoals computeralgebra verre van triviaal is, en dat dit vraagt om een ingewikkeld leerproces in de klas. Voor ons onderzoek zijn we dan ook op zoek gegaan naar een theoretisch kader dat recht doet aan de complexiteit van het integreren van gereedschap in het leren van wiskunde.

Artefact en instrument

Een eerste handreiking vinden we bij Vygotsky (1978, 1997). Vygotsky stelt dat gereedschap – 'tool' in het engels – de menselijke activiteit medieert. Zulk

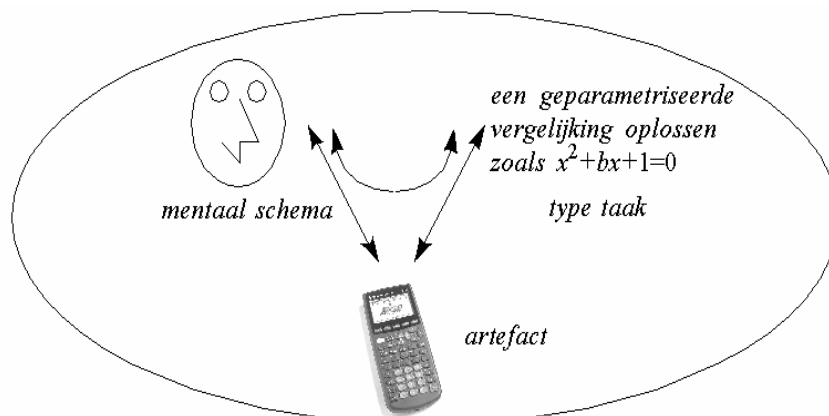
cultureel-historisch ontwikkeld gereedschap kan een materieel artefact zijn, zoals een zeis, een viool, een rekenmachine of een computer, of cognitief gereedschap, zoals taal of algebraïsche symbolen. Een 'instrumentele handeling' omvat bij Vygotsky een probleem dat moet worden opgelost, de mentale processen die op dat oplossen gericht zijn, en het (psychologische) gereedschap dat de coördinatie en de loop van de mentale processen bepaalt. Wat hierin opvalt, is de actieve rol voor het gereedschap, dat immers mede bepalend is voor de mentale processen. Dat gereedschap niet alleen maar passief wacht op de bediening door de gebruiker, maar een rol speelt bij coördinatie is voor het leren van algebra met computeralgebra een belangrijke constatering.

Bij wijze van simpel en concreet voorbeeld kunnen we aan de hamer denken. De hamer is te beschouwen als een verlengstuk van het lichaam. Wie over een hamer beschikt, kan daarmee veel efficiënter en met minder moeite een spijker inslaan dan met de hand het geval zou zijn. De beschikbaarheid van de hamer kan er echter ook toe leiden dat we veel of zelfs alle problemen daarmee proberen op te lossen. In sommige gevallen is een schroevendraaier misschien geschikter, en is de hamer wellicht niet de meest aangewezen weg, maar eerder een kwestie van 'roeien met de riemen die men heeft'. In alle gevallen vraagt het gebruik van de hamer om enige vaardigheid, ervaring en inzicht in de manier waarop het gebruik ervan kan bijdragen aan de oplossing van het probleem of het uitvoeren van de beoogde taak.

Rabardel en collega's hebben deze ideeën binnen de cognitieve ergonomie uitgewerkt door onderscheid te maken tussen artefact en instrument (Rabardel, 2002; Verillon en Rabardel, 1995). Het *artefact* is het kale gereedschap, het materiële of abstracte voorwerp waarover de gebruiker beschikt, maar dat wellicht een betekenisloos object voor hem is zolang hij nog niet weet welk type activiteit het 'ding' op welke manier kan ondersteunen. Pas als de gebruiker heeft geleerd te zien hoe het artefact zijn mogelijkheden bij bepaalde typen voor hem relevante taken kan vergroten en nadat hij de daarbij behorende vaardigheden heeft ontwikkeld, wordt het artefact deel van een waardevol en bruikbaar instrument dat de activiteit medeert.

Het artefact is dus het 'ding' dat wordt gebruikt, maar wat is nu precies het instrument? In navolging van Rabardel spreken we van een *instrument* wanneer er een betekenisvolle relatie bestaat tussen het artefact en de gebruiker voor het uitvoeren van een bepaald type taken – in ons geval wiskundige taken – die de gebruiker wil uitvoeren. Als we ons realiseren dat zich tijdens de interactie met het artefact bij de gebruiker mentale processen afspelen, dan valt op dat de drie 'hoofdrolspelers' – het artefact, de mentale processen en de taak – dezelfde zijn als in de beschrijving van de instrumentele handeling van Vygotsky hierboven. Zeker bij wiskundige artefacten, die immers eerder een verlengstuk van de geest vormen dan van het lichaam, spelen de mentale processen een centrale rol.

In termen van Rabardel omvat het instrument dus het artefact en de mentale schema's die de gebruiker ontwikkelt voor het uitvoeren van een bepaalde klasse van taken. Fig. 3 geeft dit schematisch weer.



Figuur 3. Het instrument als artefact en mentaal schema voor een type taak.

Samengevat zou men dus in telegramstijl kunnen zeggen:

$$\text{Instrument} = \text{Artefact} + \text{Schema voor een klasse van problemen}$$

In Fig. 3 is het enigszins arbitrair of de taak nu wel of niet deel uitmaakt van het instrument. Omdat het schema wel van de taak af zal hangen, ligt het in onze ogen voor de hand dat wel zo te zien. Van belang voor het vervolg is in elk geval dat de term 'instrument' hier dus een specifieke betekenis heeft die door het omvatten van de mentale schema's afwijkt de normale betekenis. Overigens kan het gebeuren dat in een instrument slechts een deel van het artefact een rol speelt. Bij het werken met computeralgebra zullen we ons bijvoorbeeld op de algebramodule richten en de grafische module vrijwel onbesproken laten. We onderscheiden dus artefact en instrument. Het woord 'gereedschap' gebruiken we vanaf nu als een wat gewoner woord voor artefact.

Instrumentele genese en schema's

Een instrument omvat dus behalve het artefact ook de mentale schema's die de gebruiker nodig heeft om een taak met behulp van het artefact tot een goed einde te brengen. De vraag is nu echter hoe zo'n instrument tot stand komt en wat die mentale schema's dan inhouden. Het proces waarin de gebruiker, in ons geval de leerling, het artefact leert kennen, de bij specifieke taken behorende schema's ontwikkelt en het artefact efficiënt leert gebruiken voor bepaalde doeleinden wordt de *instrumentele genese* genoemd, zeg maar de 'instrumentwording'.

Als eerste idee van wat zo'n schema is sluiten we aan bij de definitie van Vergnaud (1987, 1996): een *schema* is een invariante organisatie van gedrag voor een gegeven klasse van situaties. Anders gezegd: een schema is een min of meer vaste manier om met een bepaald type situaties of taken om te gaan. Om te benadrukken dat we ons hier richten op schema's die onderdeel uitmaken van een instrument, spreken we van instrumentatieschema's. Als de taak uit een wiskundig probleem bestaat, omvat het in-

strumentatieschema mentale processen en concepten zoals de globale oplossingsstrategie, de technische middelen waarmee die met het artefact kan worden uitgevoerd, en de begrippen die de basis vormen van de probleemaanpak. Dat betekent dat zo'n mentaal schema enerzijds conceptuele wiskundige elementen bevat en anderzijds technische kennis en inzichten die betrekking hebben op de manier waarop met het artefact kan worden omgegaan. Kenmerkend voor het proces van de instrumentele genese is nu volgens de theorie, dat de begripsmatige en technische elementen samenhangen en zich ook parallel ontwikkelen. Deze constatering houdt in dat het technische werk met het artefact (in ons geval ICT-gereedschap, namelijk computeralgebra) samenhangt met begripsmatig inzicht en dat de kunst voor ons als onderwijsontwikkelaar of docent is om die samenhang uit te buiten voor het leerproces.

Laten we eerst een voorbeeld geven buiten de wiskunde. Bij het verplaatsen van een alinea tijdens het schrijven van een artikel als dit wordt een techniek gebruikt die we knip-en-plak noemen. Een ervaren gebruiker past dit snel en routinematig toe door middel van enkele toetsaanslagen en/of muisklikken. Maar herinnert u zich nog de eerst keer dat u dit deed? U kreeg met zowel technische als begripsmatige aspecten te maken. U moest de weg vinden door een aantal menu's of enkele shortcuts kennen, maar ook het beangstigende feit accepteren dat de te verplaatsen alinea halverwege de procedure even verdwenen lijkt te zijn. Enig inzicht in het verschil tussen de weergave op het beeldscherm en het werkgeheugen van de computer is dus een conceptueel aspect van het bijbehorende schema. Zonder dat is de instrumentele genese van het knip-en-plak schema niet compleet en blijft het toepassen ervan lastig; aan de andere kant roept de knip-en-plak techniek dit inzicht ook zelf op, want in tweede instantie komt de alinea toch weer tevoorschijn.

We onderscheiden twee soorten instrumentatieschema's, gebruiksschema's en schema's van geïnstrumenteerde actie. Het knip-en-plak schema is een vrij elementair instrumentatieschema, dat direct verbonden is met het artefact dat wordt gebruikt. Dat noemen we dan een *gebruiksschema*. Dergelijke gebruiksschema's kunnen als bouwstenen fungeren voor schema's van hogere orde, die *schema's van geïnstrumenteerde actie* worden genoemd en waarin het doel is om de objecten te transformeren. In ons geval gaat het dan om wiskundige objecten zoals formules en grafieken. Een schema van geïnstrumenteerde actie is een coherent en betekenisvol geheel dat is opgebouwd uit gebruiksschema's.

Als voorbeeld van een schema van geïnstrumenteerde actie noemen we het instellen van het kijkvenster van een grafische rekenmachine, een herkenbaar probleem voor veel docenten van de Tweede Fase (Goldenberg, 1988). De technische aspecten die de genese van dit schema veronderstelt, zijn niet moeilijk: het gaat om het vinden van het menu waarin de gewenste afmetingen kunnen worden ingevoerd en het weten wat de verschillende afkortingen in dat menu betekenen. Het invullen van negatieve getallen met de juiste mintoets met het daarbij horende onderscheid tussen de unaire en de binaire min is een voorbeeld van een gebruiksschema dat hier als bouwsteen fungeert. Begripsmatig is er echter meer nodig: de leerling moet zich het idee eigen maken dat het scherm van de rekenmachine slechts een rela-

tief klein kijkvenster of raampje is, waardoor we naar een in theorie oneindig groot tekenvlak kijken. De positie en de afmetingen van het raampje bepalen of we een deel van de ook al weer oneindige grafiek te zien krijgen. Ook moeten we over vaardigheden beschikken om een instelling te vinden die een deel van de grafiek in beeld brengt. Op basis van onze ervaringen vermoeden we dan ook dat de moeilijkheden met dit schema eerder een begripsmatig dan een technisch karakter hebben.

Overigens is het verschil tussen gebruiksschema en schema van geïnstrumenteerde actie eerder relatief dan absoluut. Een schema van geïnstrumenteerde actie kan na de instrumentele genese ook weer als bouwsteen dienen voor een schema waarin het wordt geïntegreerd. Voor het vervolg van dit artikel is het onderscheid niet van groot belang.

Een moeilijk punt bij het spreken over mentale schema's is het feit dat we ze niet rechtstreeks kunnen waarnemen. Onze observatie is beperkt tot technieken die leerlingen met het artefact uitvoeren, en de manier waarop ze die opschrijven en daarover praten. Uit deze gegevens proberen we als het ware het schema te reconstrueren, maar het is goed om ons te realiseren dat het dan ook niet meer dan onze reconstructie betreft.

Tot slot nog even terug naar Fig. 3 die aangeeft dat het artefact bemiddelt tussen de leerling en de taak. De pijlen daar zijn echter niet voor niets tweezijdig. Wat er bij de instrumentele genese van een instrument gebeurt, heeft vaak twee kanten. Aan de ene kant leiden de mogelijkheden en beperkingen van het artefact vaak tot een bepaalde aanpak, die ook een bepaalde kijk op de situatie met zich meebrengt. Het denken van de gebruiker vormt zich dan onder invloed van het artefact. Aan de andere kant zal de gebruiker ook het artefact 'naar zijn hand zetten' en op die manier vorm geven. Wanneer we bijvoorbeeld een nieuwe versie van een tekstverwerkingsprogramma op onze computer installeren, veranderen we de functionaliteit, en breiden we daarmee ons artefact uit. Hetzelfde geldt voor de leerling die een programmaatje in de grafische rekenmachine zet dat de oplossingen van kwadratische vergelijkingen oplevert, of een spelletje dat het artefact van een wiskundige assistent verandert in een gameboy. Het denken van de leerling wordt dus gevormd door het artefact, maar vormt het ook (Hoyles en Noss, 2003). In de theorie van de instrumentele benadering wordt dit onderscheid aangegeven met instrumentatie (het artefact vormt en richt het denken van de gebruiker) en instrumentalisatie (het artefact wordt ingericht door de acties van de gebruiker).

Samengevat construeert de leerling in een proces van instrumentele genese een instrument, waarvan het artefact onderdeel is en waarbij de leerling schema's ontwikkelt voor het gebruik van het artefact voor een bepaald type situaties. Kenmerken van de instrumentele genese zijn het tweerichtingsverkeer dat daarbij plaatsvindt tussen artefact en denken van de leerling en de verwevenheid van technische en begripsmatige aspecten die zich tijdens dit proces parallel ontwikkelen. De ervaringen uit met name Frans onderzoek leren dat de instrumentele genese voor computeralgebra in het algemeen een langzaam proces is (Artigue 2002; Guin et al., 2004; Lagrange, 2004; Trouche, 2004).

3. Methodologie en onderzoeksopzet

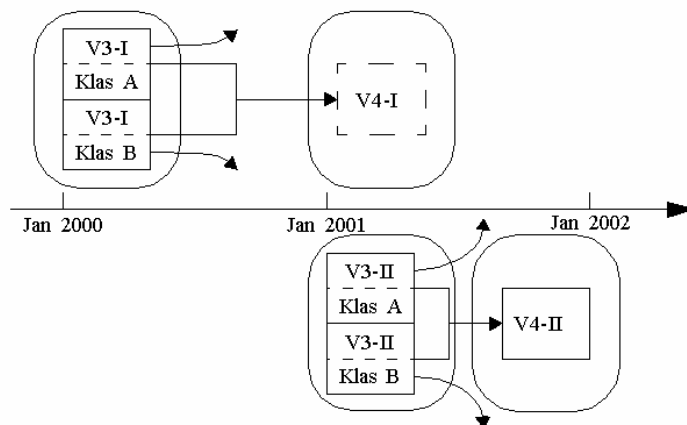
De methodologie van het onderzoek is die van het ontwikkelingsonderzoek of design research (Cobb et al., 2003; Edelson, 2002; Gravemeijer, 1994). Ontwikkelingsonderzoek richt zich op het ontwikkelen van empirisch onderbouwde theorieën over *hoe* de interventie werkt en niet zozeer op de vraag *of* de interventie werkt (Research Advisory Committee, 1996). In ons geval is het doel om te komen tot een locale onderwijstheorie. Zo'n locale onderwijstheorie bestaat allereerst uit een reconstructie van het leerproces, en met name de ontwikkeling in het denken van de leerlingen, die tot de feitelijk leerresultaten heeft geleid. Daarnaast bevat de locale onderwijstheorie een aantal ideeën over hoe bepaalde onderwijsactiviteiten de in het genoemde leerproces cruciale mentale activiteiten hebben opgeroepen. Daarnaast richt de theorievorming zich op overstijgende vragen rond de rol van computeralgebra in het algemeen.

Een karakteristiek van ontwikkelingsonderzoek is het belang dat wordt gehecht aan het ontwerpen van onderwijsactiviteiten. Dit wordt gezien als betekenisvol en geïntegreerd onderdeel van de onderzoeksmethode omdat de onderwijsactiviteiten de beoogde mentale activiteiten van leerlingen, het hypothetisch leertraject en de verwachtingen van de onderzoekers weergeven. Door het ontwerp als onderdeel van het onderzoek te beschouwen, dwingt de onderzoeker zich zijn keuzes op deze punten te expliciteren.

Door de ontworpen onderwijsactiviteiten in onderwijsexperimenten te testen en te verbeteren, krijgt het onderzoek het karakter van een iteratief proces van toetsen en bijstellen van verwachtingen. Een tweede kenmerk van ontwikkelingsonderzoek is dan ook het cyclische karakter. Het onderzoek bestaat uit een aantal macrocycli. Elk van deze macrocycli bestaat uit een voorbereidende fase, een onderwijsexperiment en een retrospectieve analyse.

In de *voorbereidende fase* vindt literatuurstudie plaats. Daarnaast is het de fase van het initiële ontwerp van de onderwijsactiviteiten. Tijdens dit ontwerpproces worden keuzes en verwachtingen bijgehouden, die de observaties tijdens het onderwijsexperiment richten. De tweede fase van een macrocyclus is die van het *onderwijsexperiment*. Tijdens het onderwijsexperiment kan de gang van zaken in de klas doorlopend worden aangepast aan de nieuwe verwachtingen en ervaringen, zodat in feite tijdens het experiment korte empirische cycli plaatsvinden. De derde en laatste fase van een macrocyclus is de fase van de *retrospectieve analyse*, waarin allereerst de gegevens worden verwerkt en geanalyseerd. Het theoretische kader en de verwachtingen die tijdens de voorbereidende fase zijn vastgelegd richten de analyse. Het resultaat is een nieuwe versie van de locale onderwijstheorie met aangepaste verwachtingen. Deze resultaten werpen hun schaduw vooruit op de voorbereidende fase van de volgende cyclus. Op die manier ontstaat een iteratief proces met een groeiend inzicht in de leerprocessen die zich afspelen.

Dit concrete onderzoek bestond uit een drietal macrocycli, V3-I, V3-II en V4-II, en een tussencyclus V4-I. De V3-cycli vonden plaats in een viertal vwo-3 klassen, en de V4-cycli in twee vwo-4 wiskunde B klassen. De leerlingpopulatie van de V4-cycli vormde een deelverzameling van de V3-populatie, bestaande uit die leerlingen uit vwo-3 die in klas 4 wiskunde B



Figuur 4. Arrangement van onderzoekscycli en onderwijsexperimenten.

kozen. In totaal waren 110 leerlingen en 4 docenten bij het onderzoek betrokken, allen van dezelfde school. Fig. 4 visualiseert dit arrangement.

In de voorbereidende fasen is lesmateriaal ontworpen, dat digitaal is gepubliceerd. Dit materiaal had betrekking op het parameterbegrip. Omdat parameters in de huidige methoden nauwelijks expliciet aan de orde komen, vormde het materiaal dus een aanvulling op en geen vervanging van het schoolboek. Vanzelfsprekend speelde computeralgebra een belangrijke rol in het lesmateriaal. Gekozen is voor de symbolische rekenmachine TI-89 (zie linker afbeelding in fig. 2), omdat leerlingen die zowel thuis als op school kunnen gebruiken, en voor de lessen een computerzaal overbodig maakt. In de voorbereidende fase zijn ook schema's benoemd, die leerlingen tijdens de instrumentele genese naar verwachting zouden ontwikkelen, en zogenaamde ijkpuntopgaven, die het gebruik van die schema's en het denken van de leerlingen over parameters zichtbaar zouden moeten maken.

De onderwijsexperimenten duurden ongeveer 20 lessen in vwo-3 en 15 in vwo-4. De leerlingen hadden voor de duur van de experimenten een TI-89 symbolische rekenmachine in bruikleen. Bij het begin van de experimenten in vwo-3 hadden de leerlingen geen ervaring met het gebruik van grafische rekenmachines, en nauwelijks met grafische software. De leerlingen van vwo-4 hadden al meegedaan aan de eerste ronde in vwo-3, dus hadden al enige ervaring met de symbolische rekenmachine. Bovendien beschikten ze inmiddels over een grafische rekenmachine van het type TI-83. Net als anders schreven de leerlingen hun uitwerkingen in het schrift. Tijdens de lessen waren behalve de docent die als gebruikelijk de les gaf, een of twee observatoren aanwezig. Wanneer de leerlingen zelf aan het werk waren, benaderden deze observatoren de leerlingen om hen in zogeheten mini-interviews te bevragen over de vooraf geïdentificeerde ijkpuntopgaven. Behalve uit deze interviewgegevens en video-opnames van klassikale delen van de lessen bestonden de data uit schriftelijk werk van de leerlingen en toetsgegevens. In totaal zijn op deze manier ruim 100 uren geobserveerd.

In de fase van de retrospectieve analyse zijn de gegevens geanalyseerd. Dat gebeurde volgens een coderingssysteem, dat in de voorbereidende fase was ontwikkeld op basis van de verwachtingen bij ijkpuntopgaven, maar dat na een eerste grove coderingsronde is aangepast. De coderingen zijn door twee onderzoekers apart uitgevoerd en vervolgens met elkaar vergeleken. Door patronen in het leerlingengedrag te identificeren ontstonden conclusies, die leiden tot bijstelling van hypothesen en 'feed forward' voor de volgende onderzoeks cyclus.

4. Een schema voor het oplossen van geparametriseerde vergelijkingen

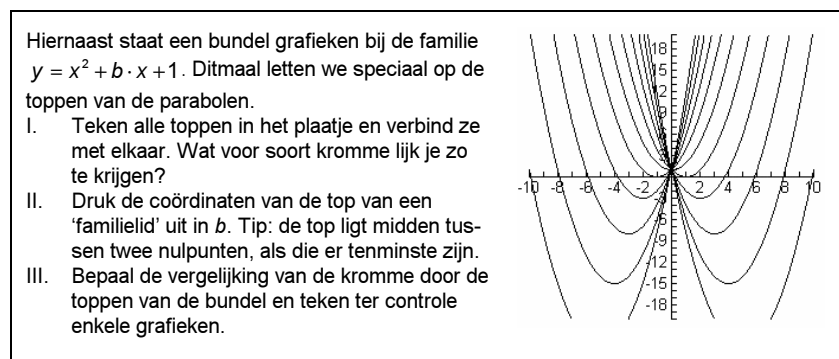
In paragrafen 4 en 5 gaan we nader in op de opbrengst van het onderzoek voor wat betreft de identificatie van instrumentatieschema's. Om de theorie van de instrumentele benadering hierbij handen en voeten te geven, bespreken we eerst een uitgewerkt voorbeeld uit een van de onderwijsexperimenten. Paragraaf 5 geeft een overzicht van de bevindingen op dit punt.

Het voorbeeld heeft betrekking op het oplossen van vergelijkingen waar parameters in voorkomen. In een computeralgebra omgeving lijkt dat een peulenschil te zijn: je typt gewoon *Solve* in en de rest gaat vanzelf. De volgende fragmenten uit de observaties maken duidelijk dat het niet zo eenvoudig is. De eerste opgave betreft de functie f met $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ en luidt: Bepaal in het algemeen de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as. Dat stelt twee leerlingen uit vwo-4, Ada en Maria, voor problemen.

- Maria: Dit is een hartstikke moeilijke vraag. Bepaal de algemene coördinaten, hoe kun je nou coördinaten bepalen van iets als het geen getallen heeft?
- Ada: [leest de opgave voor]
- Maria: Dat is toch onmogelijk?
- Ada: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$... vorig jaar
- Maria: Maar hoe kun je nou algemeen weten waar die snijdt? Dat is toch verschillend per ...
- Ada: Snijpunten met de x -as is gewoon 0 invullen, dat willen ze toch?
- Maria: Maar je kan toch niks invullen in een formule met a 's en b 's en c 's?

Hoewel Maria technisch gesproken in staat is om de geparametriseerde vergelijking op te stellen en die met *Solve* naar x op te lossen, staat een cognitief conflict dat in de weg. De eerste zin van het protocol geeft aan dat zij oplossingen ziet als numerieke resultaten, iets dat 'verschillend is per' waarde van a , b en c in plaats van een en dezelfde algebraïsche uitdrukking. Om deze vergelijking met de TI-89 op te lossen, moet Maria's conceptie van oplossingen van vergelijkingen worden uitgebreid van alleen numerieke antwoorden tot algebraïsche expressies als resultaat. In de literatuur heet dit het 'lack-of-closure' obstakel. Dit komt er kort gezegd op neer dat een opgave nog niet af is zolang je niet weet welk getal eruit komt (Collis, 1975; Küchemann, 1981; Tall & Thomas, 1991). De instrumentele genese van dit schema vraagt dus om een uitbreiding van de visie op oplossen en om een object-kijk op algebraïsche expressies.

Fig. 5 toont de volgende opgave in het lesmateriaal. Onderdeel II is vergelijkbaar met de vorige opdracht, namelijk om de coördinaten van de nulpunten uit te drukken in de parameter b . Dit is een van de ijkpuntopgaven,



Figuur 5. De opgave over de bundel grafieken.

die bedoeld is om na te gaan of leerlingen een instrumentatieschema opbouwen waarin het beeld van 'oplossen van een vergelijking' ook het uitdrukken van een onbekende in andere omvat, en daarmee ook het accepteren van een algebraïsche uitdrukking als oplossing.

Maria voert in $Solve(x^2 + b \cdot x + 1, x)$. Dat geeft een foutmelding, omdat het eerste argument van $Solve$ commando een vergelijking moet zijn in plaats van een uitdrukking.

Maria: Hij haat mij, die rekenmachine!

Ze probeert vervolgens $Solve(x^2 + b \cdot x + 1, b)$ wat evenmin tot resultaat leidt. Dan verandert ze de expressie in een vergelijking: $Solve(x^2 + b \cdot x + 1 = y, b)$. Dat geeft $b = -(x^2 - y + 1)/x$, wat Maria ook niet vrolijk stemt. Ze probeert voor b de waarde 5 te substitueren maar dat lukt niet. Later komt de observator langs voor een mini-interview. Maria voert in $Solve(x^2 + b \cdot x + 1 = 0, b)$ en lost dus op naar b in plaats van naar x .

Maria: Dus je doet zeg maar $0 =$ en dan komma b , want je moet hem naar b oplossen.

Obs: Nou nee.

Maria: Je moest toch uitdrukken in b ?

Obs: Ja maar je wilt de nulpunten weten, je wilt de x weten, maar omdat je b nog niet weet krijg je dan iets met de b erin.

Maria: Ik denk namelijk al, ik dacht dat je b eruit moest halen.

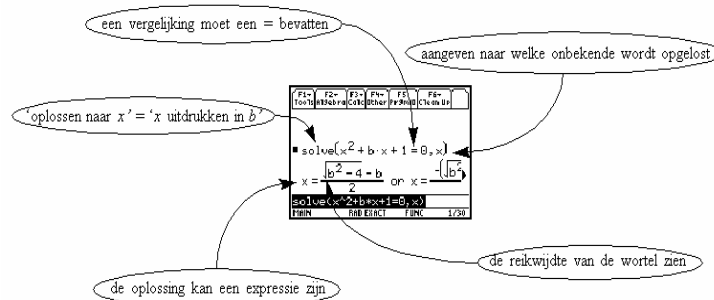
Het idee om één variabele uit te drukken in een andere, of, zoals het in de leerlingentekst wordt genoemd, één variabele te isoleren, is vermoedelijk niet duidelijk voor Maria. Ze onderscheidt de verschillende rollen van de letters niet goed. Misschien ziet ze niet dat je voor b verschillende waarden kunt substitueren, die elk een andere grafiek uit de bundel geven? Ze lijkt ook vrij volgzzaam de opgave af te werken, zonder dat duidelijk is of ze het idee achter de probleemaanpak doorziet.

In tweede instantie, gestuurd door het bovenstaande gesprekje waarin de observator de kern uitlegt, lost Maria de vergelijking wel naar x op. Bij het overschrijven van het resultaat in haar schrift maakt ze vervolgens het wor-

telken in de tweede oplossing te lang (Fig. 6). Ze kijkt niet goed naar de expressies en realiseert zich bijvoorbeeld niet dat in de twee oplossingen wel eens dezelfde wortel zou kunnen voorkomen.

Hoe interpreteren we nu Maria's gedrag vanuit de 'lens' van de instrumentele benadering? Het type taak betreft hier het oplossen van geparametriseerde kwadratische vergelijkingen. Het artefact is de algebra module van de symbolische rekenmachine. Het beoogde mentale schema is een schema van geïnstrumenteerde actie, omdat het om de transformatie van algebraïsche formules gaat. Gebruiksschema's die als bouwsteen fungeren, doen zich hierbij niet voor. Eventueel zou men het hele schema voor het oplossen als gebruiksschema kunnen zien, maar gelet op de grote conceptuele moeilijkheden in deze fase van het leerproces doen we dat niet. We zien een aantal technische elementen van het schema, die met name de syntax van het *Solve* commando betreffen. Deze technische aspecten interfereren met een aantal inhoudelijke punten, die de feitelijke struikelblokken vormen. Dit illustreert de manier waarop technische en conceptuele aspecten zich hand-in-hand ontwikkelen tijdens de instrumentele genese. In feite zien we dat de probleemsituatie en het gebruik van het artefact maken dat Maria tegen de beperkingen van haar inzicht aanloopt, en aanleiding zijn om haar kijk op het oplossen van vergelijkingen op verschillende manieren aan te scherpen. Het gaat dan met name om de volgende punten, die in fig. 7 gevisualiseerd worden:

1. Het inzicht dat *Solve* leidt naar de oplossing van het probleem, en met name dat het gebruikt kan worden om een variabele uit te drukken in andere. Dat betekent een uitbreiding van de conceptie van oplossen, zodat ook expressies als oplossing worden beschouwd.
2. Weten waar het *Solve*-commando op de machine te vinden is, de syntax kennen en in het bijzonder ook het verschil weten tussen een expressie en een vergelijking als het gaat om een vergelijking van het type *expressie = 0*.
3. Zich realiseren dat een vergelijking altijd *naar een onbekende* wordt opgelost, die niet noodzakelijk *x* heet, en daarom de onbekende aan het einde van het commando *Solve*(*vergelijking, onbekende*) niet vergeten.



Figuur 7. Conceptuele aspecten van het gebruik van *Solve*.

4. Het resultaat, met name als het een algebraïsche expressie is, kunnen accepteren en interpreteren als oplossing, en daar met enig gevoel voor expressies naar kunnen kijken.

Dit schetsmatige lijstje geeft aan hoe verweven de technische en conceptuele aspecten van het schema voor het oplossen van vergelijkingen zijn. Zo'n lijstje heeft natuurlijk beperkingen: het kan een rigide indruk maken, houdt geen rekening met individuele verschillen en beschrijft eerder het beoogde eindproduct dan het groeiproces erheen. Toch is onze ervaring dat een dergelijke opsomming van ingrediënten een middel is voor docent en onderzoeker om de relatie tussen technische en begripsmatige aspecten te verhelderen.

Samengevat laat dit voorbeeld zien dat het oplossen van vergelijkingen in de computeralgebra-omgeving om de ontwikkeling van een schema vraagt, waarin een aantal technische en begripsmatige elementen verweven is. Het werken in de computeralgebra-omgeving belicht daarbij andere zaken dan bij het werken met de hand naar voren komen, met name omdat de leerling niet aan het handelen is, maar als het ware aan het artefact moet uitleggen hoe te handelen, en daarin zich zeer precies aan de regels van het artefact dient te houden. Dat is een abstractere manier van werken, die meer nadruk op de conceptuele aspecten kan leggen.

5. Een overzicht van geobserveerde schema's

De vorige paragraaf beschrijft een schema dat betrekking heeft op het oplossen van vergelijkingen in een computeralgebra-omgeving. In ons onderzoek zijn meer van dergelijke schema's geïdentificeerd. Als aanvulling op dit voorbeeld geven we hiervan een beknopt overzicht van de opbrengst van het onderzoek op dit punt, waarbij we beginnen met de essentie van het eerder beschreven schema.

Het oplossen van vergelijkingen.

Een schema voor het oplossen van vergelijkingen is in de vorige paragraaf beschreven. Technische elementen zijn de syntax van het *Solve*-commando. De belangrijkste conceptuele elementen zijn het beseft dat een vergelijking opgelost wordt naar een onbekende en de uitbreiding van het beeld van oplossen met het uitdrukken van een variabele in andere. Als gevolg daarvan worden ook algebraïsche expressies als oplossingen beschouwd.

Het substitueren van expressies

Technisch behelst het substitueren van expressies met de TI-89 het kunnen werken met de substitutiestreep \lfloor . Conceptueel gaat het om het uitbreiden van het idee van substitutie, dat zich niet beperkt tot het vervangen van variabelen door getallen, maar ook het vervangen van variabelen door expressies omvat. Verder vraagt het werken in de computeralgebra-omgeving om een helder beeld van substitutie als een 'zoek-en-vervang' proces, waarin alle instanties van de variabele worden vervangen door de aangegeven expressie. Ook speelt hier de object-kijk op algebraïsche expressies een rol.

Het oplossen van stelsels vergelijkingen met de strategie isoleren-substitueren-oplossen

Dit is een samengesteld schema van geïnstrumenteerde actie. Bij de afstemming en integratie van de verschillende gebruiksschema's die als bouwsteen fungeren, bleek het van belang dat elk van deze onderdelen goed beheerst wordt en dat de leerling in staat is het samenspel ervan in de globale oplossingsaanpak goed in het oog te houden. Daarbij speelt het onderscheiden van de rollen van de verschillende variabelen een rol.

Het schakelen tussen exacte en benaderende oplossingen

Het vermogen van de computeralgebra-omgeving om exact te rekenen en te manipuleren leidt tot een bewustzijn van het verschil tussen exact en algebraïsche werken in vergelijking met de numeriek/benaderende aanpak. Technieken die bij zo'n schema een rol spelen zijn het benaderen van exacte resultaten met de \approx toets, het kiezen van de instelling van de machine en het invoeren van getallen als breuk dan wel decimaal getal. Begripsmatig is er een wereld te winnen, omdat leerlingen tot op dat moment vooral met decimale getallen hebben gewerkt. Voor velen is de waarde van exact en algebraïsch rekenen nog niet duidelijk. Wanneer verband gelegd wordt tussen exacte antwoorden en benaderingen (bijvoorbeeld door een exacte oplossing van een vergelijking te relateren aan de coördinaten van een snijpunt in de grafiek) komt dit schema ook naar voren. Dit punt is ook door andere onderzoekers gesignaleerd (Trouche, 2004).

Het invoeren van expressies

Bij het invoeren van expressies speelt een schema dat als technische component onder meer heeft het vermogen om een formule lineair in te voeren. Immers, de TI-89 beschikt niet over een tweedimensionale 'pretty print' formule editor, al wordt de uitvoer wel tweedimensionaal weergegeven. Conceptueel betekent dit dat de leerling in staat moet zijn om de structuur van de in te voeren expressie te doorzien om die om te kunnen zetten naar een lineaire gedaante, wat in praktijk een behoorlijke drempel kan zijn.

Equivalentie van expressies

Ook dit schema is uit de literatuur bekend. Regelmatig komt het voor dat het resultaat van het werk in de computeralgebra-omgeving er anders uitziet dan men zou denken of op basis van andere informatie (werk met de hand, uitkomst in het boek) verwacht. Technisch gezien kan equivalentie van twee vormen nagegaan worden door ze aan elkaar gelijk te stellen en de vergelijking die zo ontstaat in de computeralgebra-omgeving op te lossen, of door na te gaan of het verschil gelijk aan 0 is. Conceptueel doet het een beroep op het inzicht in de structuur van de expressies, een type algebraïsche expertise die wel als onderdeel van 'symbol sense' wordt beschouwd (Arcavi, 1994; Zorn, 2002).

Het instellen van het kijkvenster

Zoals al opgemerkt in paragraaf 2 is het schema voor het instellen van het kijkvenster niet specifiek voor computeralgebra, maar speelt het ook een rol bij grafische software en grafische rekenmachine. In vergelijking met wat

hierover bekend is, zijn de ervaringen van dit onderzoek eerder een bevestiging dan dat ze nieuwe inzichten hebben opgeleverd.

De kwalitatieve analyse van observaties van leerlingen die deze schema's ontwikkelen, laat zien dat er bij de instrumentele genese een voortdurend samenspel is tussen technieken die leerlingen met de machine uitvoeren, en de conceptuele ontwikkeling die de toepassing van die technieken vereist en oproept.

Deze opsomming van schema's is zowel onderwerp- als artefactafhankelijk. In een ander kader, waarin het onderwerp analyse in plaats van algebra was, hebben we bijvoorbeeld schema's kunnen identificeren voor het opstellen van vergelijkingen van raaklijnen, die binnen het hier gepresenteerde onderzoek niet naar voren kwamen (Drijvers & Klein, 2004). Ook zullen de schema's anders zijn wanneer het artefact andere kenmerken heeft. Als bijvoorbeeld het computeralgebra-pakket niet vereist dat de onbekende bij een het oplossen van een vergelijking wordt geëxpliciteerd, zoals bijvoorbeeld bij Derive het geval is, zal dat tot een andere schema leiden.

6. Conclusies en discussie

Conclusies

Wat is nu het antwoord op de tweede onderzoeksdeelvraag die in dit artikel centraal staat? Deze deelvraag luidde:

Wat is de relatie tussen geïnstrumenteerde technieken in de computeralgebra omgeving en wiskundige begrippen, zoals die tot stand komt in het instrumentatieproces?

We beantwoorden deze vraag niet alleen op basis van de bevindingen die in de vorige paragrafen zijn geschetst, maar op basis van het onderzoek als geheel.

Allereerst hebben we inderdaad geconstateerd dat er een nauwe relatie bestaat tussen machinetechnieken die leerlingen ontwikkelen en de begripsmatige kant van de bijbehorende schema's. Veel moeilijkheden die ogenschijnlijk technisch van aard leken, bleken een conceptuele achtergrond te hebben. Wanneer die begripsmatige kant zich verder ontwikkelde, verdwenen ook de technische moeilijkheden. Het is echter niet zo dat die conceptuele aspecten voorwaarden vormen voor het ontwikkelen van een schema. Analyse van de empirische data liet zien dat het werken in de computeralgebra omgeving vaak de ontwikkeling van de conceptuele aspecten opriep en zo een bijdrage leverde aan het leerproces.

Ten tweede bleek dat de instrumentele genese ofwel het instrumentatieproces een langzaam en soms moeizaam proces was. Dat is in overeenstemming met bevindingen uit eerder onderzoek (Trouche, 1997). Vaak worstelde de leerling tijdens dit proces echter niet met computeralgebra, maar met fundamentele algebraïsche begrippen en eigenschappen. Het ICT-gebruik maakte op die manier problemen zichtbaar, die anders ook spelen, maar wellicht niet zo duidelijk aan het licht zouden komen.

Ten derde bleek de rol van de docent bij de instrumentele genese van cruciaal belang te zijn. Hoewel die geen primair aandachtspunt in het onderzoek was, bleek dat de manier waarop hij of zij omging met de verschillende strategieën en technieken van leerlingen doorslaggevend was voor de schema's die leerlingen uiteindelijk ontwikkelen en adopteren. Tussen klassen met verschillende docenten ontstonden dan ook grote verschillen in schema's en technieken die uiteindelijk gemeengoed werden. Wanneer een docent in staat was om de begripsmatige aspecten van ogenschijnlijk technische moeilijkheden van leerlingen aan de orde te stellen, konden obstakels worden omgezet in kansen voor het leren. Hierbij waren klassengesprekken rond het geprojecteerde scherm van een van de leerlingmachines een geëigende ingang (Drijvers, 2002). Deze werkwijze voorkwam dat leerlingen te zeer hun individuele schema's ontwikkelden zonder dat er sprake is van een convergentie en van een gedeelde klassencultuur in het gebruik van het gereedschap. Het was ten slotte de bedoeling dat er een 'social practice' ontstond in de klas als 'community of practice' (Wenger, 1998).

Twee andere inzichten leverde het onderzoek in dit verband nog op. Het eerste heeft betrekking op het werken met pen en papier. Het bleek vruchtbaar om machinetechniek en inzicht ook in verband te brengen met de papier-en-pen aanpak die leerlingen vaak al kennen. Door die 'traditionele' aanpak naast het schema met computeralgebra te zetten, ontstonden discussies waarin de overeenkomsten en verschillen helder werden. Zoals het werken met twee verschillende types rekenmachines kan leiden tot een beter inzicht in wat wel en niet van een rekenmachine verwacht kan worden, zo leidde het vergelijken van de papier-en-pen methode met de computeralgebra methode tot een 'meta-kijk' op het oplossingsproces en de bijbehorende concepten. Als de twee technieken in de verschillende media enigszins congruent waren, vond transfer plaats, in die zin dat leerlingen strategieën en notaties van het computeralgebra werk overnamen met pen en papier, en andersom.

Verder viel op dat gebruiksschema's die goed ontwikkeld leken te zijn, later als component van een schema van geïnstrumenteerde actie toch nog niet altijd rijp bleken voor integratie in een groter verband. Kennelijk is de instrumentele genese een grillig proces, dat niet lineair verloopt maar ook fases van terugval kent.

Discussie

In deze sectie nemen we enige afstand tot het bovenstaande en reflecteren we op de instrumentele benadering van ICT-gebruik als theoretisch kader. Allereerst vragen we ons af welke bijdrage deze theorie levert, zowel aan het gepresenteerde onderzoek als aan het werk van ontwerper, docent en onderzoeker meer in het algemeen. Ten tweede gaan we na hoe groot de reikwijdte van de instrumentele benadering is en met name of ze ook van toepassing is op ander ICT-gereedschap dan computeralgebra. Als derde punt komt de afstemming van de instrumentele benadering met andere theoretische kaders aan de orde.

Allereerst de bijdrage van de instrumentele benadering. In welke opzichten helpt dit theoretisch perspectief ons verder? Het sterke punt van dit kader is naar ons idee dat het recht doet aan de subtiele complexiteit van het ge-

bruik van artefact en daarmee het wat naïeve idee van 'het denken doet de leerling, het werk doet de machine' overstijgt. De nadruk op de instrumentele genese en de verwevenheid van technische en conceptuele elementen in de mentale schema's die zich daarbij ontwikkelen draagt bij aan een beter beeld van wat er in werkelijkheid gebeurt wanneer een artefact een structurele rol speelt bij het handelen. In het hier beschreven onderzoek functioneerde de instrumentele benadering inderdaad als zodanig. Ze hielp bij het ontwerpen van lesmateriaal door doorlopend de vraag op te werpen hoe de interactie tussen leerling en machine het denken van de leerling zou vormen en hoe dat zou kunnen bijdragen aan het leerproces. We veronderstellen overigens dat hetzelfde geldt voor het ontwerpen van software. Tijdens de onderwijsexperimenten gaven de schema's, die vooraf binnen het hypothetisch leertraject waren onderscheiden, richting aan de observaties en dataverzameling, wat meteen ook kaders voor de analyse bood. Veel leerlinggedrag liet zich duiden in termen van instrumentele genese en op die manier hielp de instrumentele benadering begrijpen wat er zich afspeelde tijdens het werken in de computeralgebra omgeving.

Meer in het algemeen gesproken ligt de waarde van de instrumentele benadering in het verlengde hiervan. Voor een ontwerper of een auteur van lesmateriaal waarin technologie een rol speelt, is de instrumentele benadering een kader om te anticiperen op het verband tussen het werken met het artefact en het beoogde denken. Voor een docent vormt ze een denkraam van waaruit hij kan reageren op leerlingen en tijdens klassengesprekken, zodat de verwevenheid tussen machinetechniek, wiskundig denken en wellicht ook het gebruik van papier en pen een plaats krijgen. Voor de onderzoeker is de instrumentele benadering een hulpmiddel om aandachtspunten voor observaties te plannen, observaties gericht uit te voeren en data-analyse te structureren.

Als tweede punt willen we de reikwijdte van de instrumentele benadering bespreken. Binnen het gepresenteerde onderzoek heeft de instrumentele benadering op een vruchtbare wijze gefunctioneerd. Maar is deze benadering specifiek voor het gebruik van computeralgebra, of kan ze ook worden toegepast bij ander ICT-gereedschap? De eerste ervaringen met de instrumentele benadering van het gebruik van software voor dynamische meetkunde (Cabri, Sketchpad) zijn veelbelovend (Mariotti, 2002; Laborde, 2003). Ook wordt deze benadering momenteel gebruikt in onderzoek naar de inpassing van spreadsheets in het algebraonderwijs (Haspekian, 2003). Voor wat betreft statistische software lijken er ook mogelijkheden te liggen. Bij het kiezen van een adequate statistische operatie of representatie in een digitale statistische omgeving moet de leerling anticiperen op het resultaat en zich realiseren op welke manier dat zou kunnen bijdragen aan het oplossen van het probleem. Dit vraagt statistisch inzicht, maar bevordert dit vermoedelijk ook. Onderzoek heeft aangetoond dat bij de ontwikkeling hiervan ook pedagogische tools zoals applets een rol kunnen spelen (Bakker, 2004; Cobb, McClain & Gravemeijer, 2003). De vraag is nog wel of het instrumentatieperspectief bij dergelijke locale ICT-omgevingen even vruchtbaar is, aangezien ze vaak slechts incidenteel worden gebruikt, waardoor schemaontwikkeling wellicht niet zo aanwijsbaar plaatsvindt. Datzelfde geldt ook voor de applets voor algebra, die bijvoorbeeld op www.wisweb.nl te vinden zijn. Van de toe-

passing van de instrumentele benadering bij grotere omgevingen voor dynamische modellen (Stella, Powersim, Co-lab) verwachten we meer, mits ze lang genoeg worden gebruikt om schemaontwikkeling mogelijk te maken. Al met al is het mogelijk dat de instrumentele benadering krachtiger is als het gaat om breed toepasbaar, 'didactiekvrij' ICT-gereedschap dan wanneer het specifieke didactische tools zoals applets betreft, die slechts op incidentele basis worden gebruikt. Nader onderzoek zal hierover meer duidelijkheid moeten brengen. We vermoeden wel dat de instrumentele genese idealiter moet sporen met de didactische sequentie waarin (delen van) het artefact aan de orde komen.

Ten derde willen we stilstaan bij de samenhang tussen de instrumentele benadering en andere theoretische invalshoeken. Veel onderzoek richt zich tegenwoordig op semiotiek, symboliseren en modelleren (zie bijvoorbeeld Cobb et al., 1997; Gravemeijer, 1999; Gravemeijer et al., 2000; Meira, 1995; Nemirovsky, 1994; Roth & Tobin 1997). Daarbij wordt vaak de dialectische relatie tussen symboliseren en betekenisontwikkeling benadrukt. De beperking van de instrumentele benadering is er mogelijk in gelegen dat ze zich richt op de ontwikkeling van schema's in relatief vaste, bestaande technologische omgevingen, waarin leerlingen weinig ruimte hebben hun eigen symboliseringen te ontwikkelen. Aan een vorm van 'symbolische genese' wordt niet veel aandacht besteed, al omvat de instrumentele genese natuurlijk wel een proces van betekenisontwikkeling bij de gegeven representaties en symboliseringen. Het zou interessant zijn de overeenkomsten en verschillen van de instrumentele benadering en theorieën over symboliseren nader in kaart te brengen. Overigens is het werken met inscripties en representaties niet los te zien van de sociale normen en praktijken die in de klas ontstaan (Gravemeijer, 2002). Dat brengt ons op een tweede theoretische invalshoek die in relatie gebracht zou kunnen worden met de instrumentele benadering, namelijk de handelingstheorie en het idee van de 'community of practice' (Engeström et al., 1999; Wenger, 1998). Het gevaar bestaat immers dat de instrumentele benadering zich te zeer richt op de individuele ontwikkeling en daarbij de sociale en collectieve aspecten uit het oog verliest. In dit verband is ook het werk van Yackel en Cobb interessant, die een interpretatief kader ontwikkelden voor het integreren van een individueel, psychologisch perspectief met het sociale, waarin klassennormen een rol spelen (Yackel & Cobb, 1996). Voor het bestuderen van de rol van de docent zou de instrumentele benadering aangevuld kunnen worden met ideeën over orkestratie (Trouche, 2004b) en privilegiëren (Doerr & Zangor, 2000; Kendal & Stacey, 1999, 2001). Al met al liggen er interessante overeenkomsten en verschilpunten met andere theoretische benaderingen en is nader onderzoek naar de manier waarop de kaders elkaar kunnen aanvullen gewenst.

Samengevat lijkt de instrumentele benadering een krachtig kader om interacties tussen leerling en machine, en met name het samenspel tussen technische vaardigheden en wiskundig inzicht, in kaart te brengen en te bestuderen. Wel is het van belang dat de relatie en de afstemming met andere theoretische perspectieven aan nader onderzoek wordt onderworpen.

leren met computeralgebra' is in de periode 1999–2003 uitgevoerd aan het Freudenthal Instituut en heeft geleid tot het proefschrift van de eerste auteur. Het ontwikkelde lesmateriaal is, met het gehele proefschrift en een deel van de data, beschikbaar via www.fi.uu.nl/~pauld/dissertation. Het project is mogelijk gemaakt door de Nederlandse organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek NWO, projectnummer 575-36-0003E, en maakte deel uit van het PROO-aandachtsgebied 'Wiskunde en ICT', projectnummer 575-36-0003, waarvan de tweede auteur projectleider was. De auteurs bedanken Aad Goddijn voor zijn waardevolle commentaar op een eerdere versie van dit artikel.

English summary

Artefact and instrument: Computer algebra and algebraic schemes

This paper reports on a research study on the use of computer algebra while learning algebra. The theoretical framework consists of the so-called instrumental approach to ICT use. This theory distinguishes artefact and instrument. The instrument includes both the artefact and the mental schemes, which the student develops to be able to use the artefact efficiently. In such mental schemes technical and conceptual aspects are interwoven. The conclusion is that the instrumental approach to ICT use is a fruitful perspective for investigating the relation between the use of technology and learning. Further research is needed to investigate how this approach can be coordinated with other theoretical perspectives, such as theories on symbolizing and modelling.

Referenties

- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14, 24-35.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245-274.
- Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education. On Symbolizing and computer tools*. Utrecht: CDβ- Press.
- Cobb, P., Gravemeijer, K.P.E., Yackel, E., McClain, K. & Whitenack, J. (1997) Mathematizing and symbolising: The emergence of chains of signification in one first-grade classroom. In D. Kirshner & J.A. Whitson (Eds.), *Situated cognition theory: Social, semiotic, and neurological perspectives*, pp. 151-233. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Cobb, P., McClain K. & Gravemeijer K. (2003). Learning About Statistical Covariation, *Cognition and Instruction*, 21, 1-78.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. & Schaube, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32, 9-13.
- Collis, K.F. (1975). *The development of formal reasoning*. Newcastle, NSW: University of Newcastle.
- Doerr, H.M. & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 143-163.
- Drijvers, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34, 221-228.

- Drijvers, P.H.M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment, design research on the understanding of the concept of parameter*. Utrecht: CDβ-Press. Ook beschikbaar via www.fi.uu.nl/~pauld/dissertation
- Drijvers, P. & Gravemeijer, K.P.E. (2004). Instrumentation of computer algebra: Examples of algebraic schemes. In D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*, pp. 171-206. Dordrecht: Kluwer.
- Drijvers, P. & Klein, H. (2004). Een bijzondere (?) derdegraads kromme. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 24, 45-48.
- Edelson, D.C. (2002). Design research: What we learn when we engage in design. *Journal of the Learning Sciences*, 11, 105-121.
- Engeström, Y., Miettinen, R. & Raija-Leena, P. (1999). *Perspectives on activity theory*. New York: Cambridge University Press.
- Goldenberg, E.P. (1988). Mathematics, metaphors, and human factors: Mathematical, technical and pedagogical challenges in the educational use of graphical representation of functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 135-173.
- Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, the Netherlands: CDβ Press.
- Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, 155-177.
- Gravemeijer, K. (2002). Preamble: From Models to Modeling. In: Gravemeijer, K., Lehrer, R. Van Oers, B. & Verschaffel, L. (Eds.) *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education*, pp. 7-22. Dordrecht: Kluwer.
- Gravemeijer, K.P.E., Cobb, P., Bowers, J. & Whitenack, J. (2000). Symbolising, modeling and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolising and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design*, pp. 225-273. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (Eds.)(2004). *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*. Dordrecht: Kluwer.
- Haspekian, M. (2003). Between arithmetic and algebra: a space for the spreadsheet? Contribution to an instrumental approach. *Tools and Technologies in Mathematical Didactics. Conference of the European society for Research in Mathematics Education*, Mars 2003, Italie. Gedownload via: http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG9/-TG9_Haspekian_cerme3.pdf
- Hoyles, C. & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education, Vol 1*, pp. 323-349. Dordrecht: Kluwer.

- Kendal, M. & Stacey, K. (1999). Varieties of teacher privileging for teaching calculus with computer algebra systems. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 6, 233-247.
- Kendal, M. & Stacey, K. (2001). The impact of teacher privileging on learning differentiation with technology. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 143-165.
- Küchemann, D.E. (1981). Algebra. In K.M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16*, pp. 102-119. London: John Murray.
- Laborde, C. (2003). *The design of curriculum with technology: lessons from projects based on dynamic geometry environments*. Paper presented at the CAME 2003 conference, Reims, France. Op 4 februari 2004 gedownload via <http://ltsn.mathstore.ac.uk/came/events/reims/>
- Lagrange, J.-b. (2004). Using symbolic calculators to study mathematics. In D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*, pp. 121-144. Dordrecht: Kluwer.
- Mariotti, M.A. (2002). The influence of technological advances on students' mathematics learning. In L.D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*, pp. 695-723. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Meira, L. (1995). The microevolution of mathematical representations in children's activity. *Cognition and Instruction*, 13, 269-313.
- Nemirovsky, R.C. (1994). On ways of symbolizing: The case of Laura and the velocity sign. *Journal of Mathematical Behavior*, 13, 389-422.
- Rabardel, P. (2002). *People and technology - a cognitive approach to contemporary instruments*. <http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr>.
- Research Advisory Committee (1996). Justification and reform. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 516-520.
- Roth, W. & Tobin, K. (1997). Cascades of inscriptions and the representation of nature: how numbers, tables, graphs, and money come to re-present a rolling ball. *International Journal of Science Education*, 19(9), 1075-1091.
- Tall, D. & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 125-147.
- Trouche L. (1997). *A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans un environnement calculatrice: Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*. Dissertation. Montpellier, France: Université de Montpellier II.
- Trouche, L. (2004a). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. In D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*, pp. 145-170. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Trouche, L. (2004b). Instrumental genesis, individual and social aspects. In D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical*

- instrument*, pp. 207-242. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Vergnaud, G. (1987). About constructivism, a reaction to Hermine Sinclair's and Jeremy Kilpatrick's papers. In J. Bergerson, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th conference of the international group for the psychology of mathematics education, Vol 1*, pp. 73-80. Montreal, Canada: University of Montreal.
- Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation [At the base of learning, conceptualisation]. In R. Noirfalise & M.J. Perrin (Eds.), *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 174-185. Clermont-Ferrand, France: IREM, Université de Clermont-Ferrand II.
- Verillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10, 77-103.
- Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Vygotsky, L.S. (1997). The instrumental method in psychology. In R.W. Rieber & J. Wollock (Eds.), *Problems of the theory and history of psychology, Vol. 3, Collected works of L.S. Vygotsky*, pp. 85-89.
- Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. New York: Cambridge University Press.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.
- Zorn, P. (2002). *Algebra, computer algebra and mathematical thinking*. Contribution to the 2nd international conference on the teaching of mathematics, Hersonissos, Kreta. Beschikbaar via: www.stolaf.edu/people/zorn/