

Functionies: de ontwikkeling van een veelzijdig concept

Peter Kop en Willem Hoekstra

Inhoud

1 Oriëntatie.....	2
1.1 Wat is een functie?.....	2
1.2 Het gebruik van functies	3
2 Probleemstelling	4
3 Probleemverkenning	5
3.1 Definitie en beelden	5
3.2 Representaties	8
3.3 Symbolen en conventies.....	9
4 Wat weten we al?.....	10
4.1 Definities en beelden.....	10
4.2 Representaties	13
4.3 Symbolen en conventies.....	15
5 Ontwerpen.....	16
5.1 Onderbouw	17
5.2 Bovenbouw.....	22
2 Afsluiting.....	24
Bijlage 1	26
Referenties	28

'The function is a special kind of dependence, that is, between variables which are distinguished as dependent and independent. – an old-fashioned-looking terminology, which, however, stresses the phenomenologically important element: the directedness from something that varies freely to something that varies under constraint.' H. Freudenthal(1983 p. 496)

1 Oriëntatie

In dit katern kijken we naar functies in de wiskunde. Ze vormen het geraamte van de wiskunde die in het voortgezet onderwijs onderwezen wordt. Het functiebegrip is sterk verweven met concepten uit de algebra: aan de ene kant ondersteunt de algebra het functiebegrip en aan de andere kant worden door het werken met functies de algebraïsche technieken onderhouden. Daarnaast is het functiebegrip onontbeerlijk voor de differentiaalrekening.

In de huidige schoolboeken zie je nauwelijks meer een definitie van een functie. Leerlingen krijgen voorbeelden van functies, zoals lineaire, kwadratische, exponentiële, gebroken, goniometrische, wortel- en machtsfuncties. Hoe anders was dat begin jaren '70 in de vorige eeuw. Het boek startte met beschouwingen van relaties tussen twee verzamelingen, waarna een functie f als een bijzondere relatie gedefinieerd werd. De ervaring was vaak dat het overgrote deel van de leerlingen deze stukken wiskunde over zich heen liet komen en vervolgens met de voorbeelden van functies aan de slag ging. Centraal hierbij stond het zogeheten functieonderzoek, een opdracht waarin via een vast stappenplan domein, nulpunten en tekenoverzicht van de functie, de afgeleide en het tekenoverzicht van de afgeleide en de asymptoten bepaald moesten worden. Dit geheel moest leiden tot een grafiek. Op ieder centraal eindexamen kwam minstens één opgave voor met 'Onderzoek de functie en teken de grafiek' (zie bijvoorbeeld figuur 1). Het formele aspect van functies en het belang ervan kwam nauwelijks over bij leerlingen.

Examen 1974 eerste tijdvak

1. Gegeven zijn de functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$

$$f : x \rightarrow x^2 \quad \text{en} \quad g : x \rightarrow \frac{x^3 + 2}{x}.$$

- a. Onderzoek de functie g en teken in één figuur de grafieken van f en g .
Bewijs dat deze grafieken geen enkel punt gemeen hebben.
Bewijs dat de grafiek van g één buigpunt heeft.
- b. De lijnen $x = k$ en $x = 2k$ en de grafieken van f en g sluiten een vlakdeel V in.
Bewijs dat de oppervlakte van V voor $k > 0$ onafhankelijk is van k .
Onderzoek of deze onafhankelijkheid ook geldt voor $k < 0$.

Figuur 1 Examenopgave vwo wiskunde I 1974

1.1 Wat is een functie?

Het woord 'functie' heeft vele betekenissen. In Van Dale zie je onder meer: ambt (een leidinggevende functie), werking, rol (de functie van de maag), (wiskundige) grootheid die in haar veranderlijkheid afhangt van een of meerdere andere grootheden.

De functie van een kraan is dat er water uitkomt als je hem opendraait; de functie van een thermostaat is dat het warmer wordt als je hem hoger zet. Kennis van dergelijke afhankelijkheidsrelaties helpt om de wereld om je heen te ordenen, te begrijpen en naar je

hand te zetten. Er is hier steeds sprake van een oorzaak-gevolgrelatie: de onafhankelijke invoergrootte (kraan, thermostaat) bepaalt de afhankelijke uitvoergrootte (waterstroom, temperatuur).

Een functie geeft aan hoe een verandering van de ene grootte een verandering van een andere ten gevolg heeft. Dit is het dynamische functiebegrip. Daarnaast roept het woord ‘functie’ ook een statisch beeld op in de betekenis van ‘taak’ of ‘ambt’. Een functie geeft dus zowel een ‘actie’ als een ‘ding’ aan. Ook in de ontwikkeling van het functiebegrip in de geschiedenis zie je deze aspecten terug.

Opdracht 1

Formuleer een definitie van functie die je in 4 vwo zou gebruiken.

Het woord ‘functio’ wordt voor het eerst in de huidige wiskundige betekenis door Leibniz (1673) gebruikt. Het is afgeleid van het werkwoord ‘fungor’ (ik voer een taak uit). Later spreekt Euler (1755) over een grootte die een functie is van een andere grootte, als de eerste grootte bepaald wordt door de tweede grootte. Anders gezegd: Als x staat voor een variabele grootte dan zullen alle grootheden die op een of andere manier afhangen van x of die bepaald worden door x , een functie van x genoemd worden.

Pas later, in de 19^e eeuw komen de verzamelingen in beeld. Een functie $f : A \rightarrow B$ wordt beschreven als verzameling van geordende paren $(x, y) \in A \times B$ met $x \in A, y = f(x) \in B$. Een functie koppelt een verzameling aan een andere verzameling. Dit heeft geleid tot de zogeheten Dirichlet-Bourbaki definitie: *f is een functie van een verzameling A naar een verzameling B als f een deelverzameling is van het Cartesisch product $A \times B$, zodat voor elke $x \in A$ er precies één $y \in B$ is, zodat $(x, y) \in f$*

In eerste instantie denken we hierbij vaak aan functies tussen verzamelingen van getallen, maar andere verzamelingen zijn ook mogelijk: zo is bijvoorbeeld $\frac{d}{dx}$ een functie tussen verzamelingen van functies en is een puntspiegeling in het platte vlak een functie tussen verzamelingen van punten in dit vlak

1.2 Het gebruik van functies

De Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO) heeft in haar Visiedocument (2007) aangegeven welke aspecten van het functiebegrip zij belangrijk acht voor leerlingen:

Het gaat enerzijds om het beeld van de functie als procedure die een invoergetal afbeeldt op een uitvoergetal en als manier om gekoppelde verandering te beschrijven. Anderzijds is de functie een wiskundig object, dat deel uitmaakt van een klasse van functies die op globaal niveau onderzocht kan worden. Verschillende functierepresentaties, elk met eigen kracht en beperking, geven een verschillende kijk op hetzelfde object. Bij het functiebegrip hoort een overzicht van de verschillende typen functies in hun onderlinge relaties en een exemplarische verdieping van een bepaalde klasse van functies (bijvoorbeeld de exponentiële functies).

(p. 22/23)

Freudenthal (1983) legt nadruk op de functie als manier om afhankelijkheid weer te geven:

'Indeed, the very origin of function is stating, postulating, producing, reproducing dependence (or connection) between variables occurring in the physical, social, mental world, that is, in and between these worlds.' (p.494)

Voorbeelden van een dergelijke afhankelijkheid zijn:

- Als je van een lamp vandaan loopt, neemt de lichtsterkte af.
- Hoe groter de hoogte waarop je een voorwerp loslaat, hoe harder het op de grond valt.
- Hoe langer je wacht met het drinken van de koffie, hoe meer deze zal zijn afgekoeld.

In deze voorbeelden zijn het fysische wetten die de afhankelijkheid bepalen. Maar we kunnen de afhankelijkheid ook zelf definiëren, bijvoorbeeld als we aan een persoon zijn leeftijd koppelen, of voor elk rondje in de sponsorloop € 1,- vragen.

Functies worden zo gebruikt om processen en verschijnselen te modelleren en met behulp van technieken als interpoleren, extrapoleren, differentiëren of het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden antwoord te geven op vragen die voor het proces relevant zijn.

Daarnaast kunnen we functies ook zelf onderzoeken. We kunnen kijken naar de verschillende representaties (grafisch, numeriek, algebraïsch) en de samenhang daartussen. Door functies samen te stellen (optellen, vermenigvuldigen, schakelen) en te inverteren ontstaan nieuwe functies die nieuwe vragen oproepen. Zo generaliseren we bij het inverteren van een functie in feite een hele klasse van problemen: het oplossen van vergelijkingen.

We kunnen functies indelen in verschillende families en dan de kenmerken van de families onderzoeken. Als we weten dat een functie tot een bepaalde familie behoort, weten we direct ook een aantal kenmerken.

Uit bovenstaande voorbeelden blijkt dat het functiebegrip veel verschillende aspecten omvat die onderling sterk verweven zijn. Alle componenten van de wiskundige competentie (weten dat, hoe, waarom en weten over weten) spelen hierbij een rol. In dit katern zullen we ons vooral bezig houden met de aspecten van functies die cTWO in haar visiedocument noemt. Daarin speelt de formele definitie van functie als deelverzameling van het Cartesisch product een ondergeschikte rol. Het is van belang dat leerlingen uit al deze begrippen, representaties, eigenschappen en procedurele technieken een rijk cognitief schema opbouwen dat ze flexibel kunnen gebruiken bij het oplossen van problemen. In dit katern zullen we aandachtspunten formuleren voor het onderwijs in functies dat hierop gericht is.

Opdracht 2

Maak een kennisgraaf (of conceptmap) met aspecten van het concept 'functie'; die voor leerlingen in het VO van belang zijn. Neem in ieder geval de volgende aspecten op:

- Definitie van een functie;
- De verschillende representaties van functies;
- Het gebruik van functies (waar, wanneer, hoe);
- Wat moeilijk is aan functies;
- Verschillende families van functies.

2 Probleemstelling

Uitgangspunt van dit katern is dat de functie een complex concept is, dat expliciete aandacht verdient in het voortgezet onderwijs. Leerlingen ondervinden op verschillende niveaus problemen met dit concept:

- Ze hebben onvolledige beelden of misconcepties;
Is bijvoorbeeld $f : x \rightarrow 3$ een functie, ook al zit er geen x in? Waarom is $3x + 5y = 7$ wel een weergave van een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, maar $x^2 + y^2 = 1$ niet, terwijl de grafiek van de laatste wel weer gedefinieerd kan worden door een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^2$ via $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$
- Ze hebben moeite om de samenhang tussen verschillende representaties te zien en deze te benutten bij bijvoorbeeld probleem oplossen;
- Ze hebben moeite om onderscheid te maken tussen verschillende families van functies (lineair, kwadratisch, gebroken, exponentieel, goniometrisch,...).
Wat zijn kenmerkende eigenschappen van deze families en hoe verhouden deze zich tot elkaar? Daarnaast spelen in de natuurwetenschappelijke vakken evenredigheden (rechtevenredig, omgekeerd evenredig, omgekeerd kwadratisch evenredig,...) een belangrijke rol. Hoe verhouden deze zich tot de verschillende families van functies?
- Ze moeten beschikken over voldoende inzicht en vaardigheden bij het werken met de symbolische representaties.
- Ze ervaren een kloof tussen de wijze waarop in de onderbouw en in de bovenbouw met functies omgegaan wordt.
In de onderbouw worden functies vaak beschouwd als ‘machientjes’, die bij een gegeven invoer een uitvoer produceren (proceskarakter van functies). Aan het eind van de onderbouw en in de bovenbouw moet een functie ook als object beschouwd worden om hem bijvoorbeeld te kunnen differentiëren of in te delen in een familie van functies

Deze aspecten brengen ons naar de centrale probleemstelling van dit katern:

Welke elementen zou een rijk mentaal schema van het concept ‘functie’ voor leerlingen moeten bevatten en welke aspecten spelen een rol bij een zorgvuldige opbouw daarvan?

We zullen in dit katern dus niet een volledige leerlijn beschrijven, maar aandachtspunten formuleren voor het ontwerpen van onderwijs over het concept functie.

3 Probleemverkenning

3.1 Definitie en beelden

In het cognitieve schema dat een leerling bezit van het concept functie wordt een belangrijk onderdeel gevormd door wat een functie *is*. Alleen is het niet zo duidelijk wat dat betekent: “wat het *is*”. In de oriëntatie van dit katern is al aangegeven dat alleen een definitie niet voldoet. Om hier meer zicht op te krijgen, wordt in onderzoek van Tall & Vinner (1981) en Vinner (1992) onderscheid gemaakt tussen de begrippen concept image en concept definition.

We shall use the term concept image to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures [...] We shall regard the concept definition to be a form of words used to specify that concept. It may be learnt by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater or lesser degree to the concept as a whole. It may also be a personal reconstruction by the student of a definition.. (Tall & Vinner 1981 p.2)

Zij stellen deze begrippen en de interactie daartussen als volgt voor (Vinner, 1992)

"[...] assume the existence of two different "cells" in our cognitive structure (to avoid confusion, we do not mean biological cells). One cell is for the definition(s) of the concept and the second one is for the concept image. One cell or even both of them might be void. (The concept image cell is considered to be empty as long as some meaning is not associated with the concept name. This can happen in many situations where the concept definition is memorized in a meaningless way.) There might be some interaction between the two cells although they can be formed independently." (p.69, 70)

Het ontbreken van interactie tussen deze twee "cellen" kom je bij uitstek bij het concept functie tegen. Het is goed mogelijk dat een leerling een foutloze definitie van functie kan verwoorden, maar moeite heeft om $f(x) = 3$ als functie te herkennen. Andersom zijn er op dit moment leerlingen die een rijk ontwikkeld beeld van het functiebegrip hebben, maar nauwelijks een definitie kunnen formuleren.

Opdracht 3

In het vorige hoofdstuk heb je bij opdracht 2 een definitie van een functie gegeven en een beeld van het concept functie gegeven. In hoeverre is daar sprake van een relatie tussen de definitie en het concept image?

Wanneer leerlingen gevraagd wordt wat een functie is, noemen ze doorgaans enkele aspecten van een functie (machientje, formule of iets waarmee je tabellen, formules en grafieken kunt maken) of ze noemen voorbeelden van functies. Functie is voor hen vaak de formule die hoort bij een continue grafiek zonder knikken. Het beperkte beeld van functies wordt ook bevestigd door antwoorden op vragen als 'hoeveel functies zijn er te bedenken door twee gegeven punten?' Veel leerlingen zullen slechts een beperkt aantal functies geven (Bloch, 2003; Skaja, 2003).

Een leerling uit 5 vwo met wiskunde B omschreef een functie als volgt:

*'Een functie is iets waarbij je bepaalde waardes voor x kan invullen (dit zijn niet altijd alle getallen) waarvoor er een bijbehorende waarde voor y uitkomt. Ook wel verband. In de functie kunnen allerlei rekenkundige bewerkingen voorkomen. Elke functie kan getekend worden als grafiek. De vorm van de grafiek wordt bepaald door de 'vorm' van de functie.
Een aantal functies zijn: lineaire, kwadratische, wortel, gebroken, machtsfunctie.'*

Wanneer we naar schoolboeken kijken, zien we daar een verlegenheid om het begrip functie vast te leggen. De formele definitie wordt niet meer verwoord. Er wordt gekozen voor omschrijvingen die impliciet zijn of aansluiten bij het spraakgebruik rond het woord functie. Dit zal zeker gevolgen hebben voor het mentale schema dat een leerling opbouwt. Hieronder staan een aantal voorbeelden van 'definities', zoals ze in de laatste tijd in schoolboeken voorkomen.

Sommige methoden spreken in de onderbouw over verbanden en noemen het begrip functie niet. Er wordt over lineaire, kwadratische, hyperbolische, wortel- en machtsverbanden gesproken. Deze begrippen worden dan ingevuld als:

De formules $s = 5t^2$ en $y = x^2 + 2$ zijn kwadratische verbanden.

Nadat een tabel en een grafiek hiervan gegeven zijn, worden de kenmerkende eigenschappen, die zichtbaar zijn in de tabel en in de grafiek verteld. Al met al een vrij impliciete omschrijving van het begrip ‘kwadratisch verband’.

Een andere methode bevat na enkele paragrafen over lineaire formules een paragraaf lineaire functies. Daarin wordt gestart met een machientje waarmee een chauffeur de ritprijs kan berekenen aan de hand van het aantal kilometers. In een blok theorie volgt dan dat aan elk aantal kilometers de ritprijs wordt toegevoegd.

Aan 12 km voegt het machientje 32 euro toe. Notatie $12 \rightarrow 32$.

In $12 \rightarrow 32$ heet 12 het origineel en 32 het beeld. De pijl wijst van origineel naar beeld. Zo'n toevoegingsmachine heet een functie.

Even later staat er:

De functie $x \rightarrow 2x + 5$ komt op hetzelfde neer als de formule $y = 2x + 5$.

Gevolgd door:

Het is handig een functie een naam te geven. We kiezen daarvoor meestal een van de letters f , g , h of k .

Zo zou je de functie $x \rightarrow 2x + 5$ de naam f kunnen geven. Bij deze functie f is het beeld van 4 gelijk aan $2 \cdot 4 + 5 = 13$. We zeggen: bij de functie f is de functiewaarde van 4 gelijk aan 13. Notatie $f(4) = 13$.

In een vierde-klasboek van een weer een andere methode staat het meer impliciet:

Omdat in $H = 3 + 0,2\sqrt{t}$ de hoogte H afhangt van de groeitijd t zeg je:

H is een functie van t . Notatie $H = f(t)$.

Bij een functie kun je een tabel of grafiek maken. Dat kan automatisch door de grafische rekenmachine te gebruiken.

Ondanks het feit dat functies dus niet vaak expliciet aan bod komen, staan de schoolboeken vol met aan functies gerelateerde zaken: lineaire, kwadratische functies, formules substitueren, (lineaire, exponentiële) formules opstellen bij gegeven punten, grafieken tekenen, tabellen maken, helling van rechte lijnen, domein van functies, vergelijkingen opstellen en oplossen, inverse functie, afgeleide functie, notaties van functies en formules, lijnen die evenwijdig of loodrecht zijn, enz.

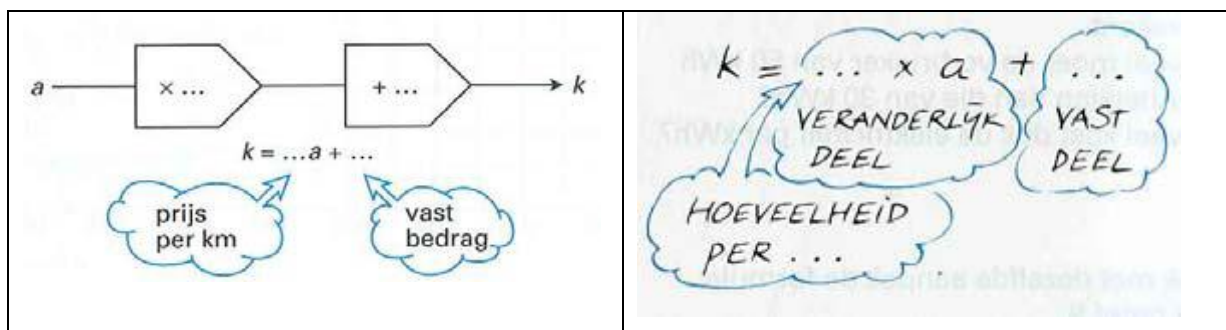
Naast de hiervoor genoemde voorbeelden, zijn er andere bekende problemen bij leerlingen die voortkomen uit een onvolledig beeld van het functieconcept (o.a. Skaja, 2003):

- geen onderscheid kunnen maken tussen een functie, een verband (waarin geen sprake hoeft te zijn van een eenduidige afhankelijkheid zoals bij het verband tussen x en y bij $x^2 + y^2 = 1$) en een formule (een van de mogelijke representaties van een functie);
- niet inzien dat in de natuurkunde $V = I \cdot R$ en $\frac{V}{I} = R$ hetzelfde verband weergeven;
- problemen met het doorzien van notaties: wat betekent f in de notatie $f(x)$, waarom is $f(x+h) = f(x) + f(h)$ geen voorbeeld van het uitwerken van haakjes, maar een eigenschap van bepaalde functies, wat is er mis met de notatie $f(x) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$?
- het letterlijk nemen van de uitspraak ‘Je loopt over de grafiek’.
- ...

3.2 Representaties

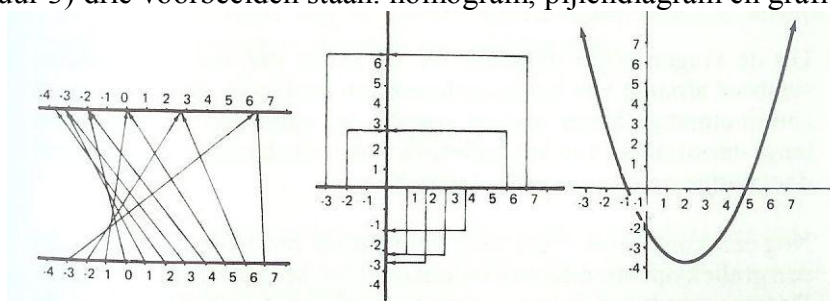
Een functie kan op verschillende manieren gerepresenteerd worden. Bekende representaties zijn tabel, grafiek en formule. Naast deze drie veelvoorkomende representaties zijn er meer manieren waarop een functie kan worden weergegeven.

De pijlenketting is nauw verbonden met de formule. Het voorschrift ‘tel er drie bij op en vermenigvuldig vervolgens met vijf’ geeft de pijlenketting: $x \rightarrow x + 3 \rightarrow 5(x + 3)$ horend bij de formule $f(x) = 5(x + 3)$



Figuur 2 Functierepresentaties

Daarnaast zijn er zijn verschillende manieren om een functie grafisch weer te geven, waarvan hieronder (figuur 3) drie voorbeelden staan: nomogram, pijlendiagram en grafiek.



Figuur 3 Visualiseringen van functies

Opdracht 4

(Van Dormolen, 1976, blz. 181)

Bij de hier vermelde vragen kan men de plaatjes als hulpmiddel gebruiken.

Welk van de drie plaatjes past het best bij onderstaande vragen?

- Onderzoek of de functie symmetrisch is.
- Onderzoek of de functie een inverse functie heeft.
- Lees de kleinste waarde die de functie kan aannemen af.
- Bepaal de vergelijking van de raaklijn in $(1, f(1))$ aan de grafiek.

Elke representatie heeft zijn eigen voordelen en beperkingen, die samenhangen met het soort eigenschap dat je over het voetlicht wilt brengen. Voor lokale eigenschappen, die met name gericht zijn op een 1-1 koppeling tussen (onafhankelijke) invoer en (afhankelijke) uitvoer, zijn een tabel en een formule bij uitstek geschikt. Nadeel van een tabel is dat er vaak maar een beperkt deel van het domein weergegeven kan worden. Nadeel van een formule is dat deze in

directe vorm niet voor elke functie te geven is, zoals bij $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ of bij bepaalde recursieve verbanden.

Bij globale eigenschappen, zoals covariatie van de functie (d.w.z. hoe verandert de uitvoer y als invoer x verandert) zijn grafieken en nomogrammen meer geschikt. In grafische en numerieke representaties kun je daarentegen weer moeilijk iets zeggen over continuïteit of differentieerbaarheid. Daarvoor is een algebraïsche representatie meer geschikt.

Bij het oplossen van problemen speelt vaak meer dan één representatie een rol. Een andere representatie, een ander beeld, kan je helpen om een idee te krijgen over het verband tussen grootheden. Zo kan een grafiek je bijvoorbeeld een idee geven over het ‘soort’ verband tussen de grootheden. Het kunnen overstappen op een andere representatie is dus een belangrijke vaardigheid van probleemoplossers.

De verschillende representaties kunnen ook betekenis geven aan (het manipuleren met) algebraïsche expressies. Door middel van algebraïsche identiteiten kunnen formules herschreven worden om bepaalde (grafische) kenmerken van de functie naar voren te laten komen. Bijvoorbeeld:

- Uit $y = 2x^2 - 6x + 4$ volgt het snijpunt met de y -as (0,4) en het type dal- of bergparabool.
- Uit $y = 2x(x - 3) + 4$ volgen de punten (0,4) en (3,4) met de symmetrieas $x = \frac{1}{2} \cdot 3$.
- Uit $y = 2(x - 1)(x - 2)$ volgen de snijpunten met de x -as en de symmetrieas $x = \frac{1}{2} \cdot (1 + 2)$.
- Uit $y = 2(x - 1\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}$ volgt de symmetrie as $x = 1\frac{1}{2}$ en de top $(1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Dat dit manipuleren niet vanzelf gaat, is terug te lezen in het katern Vergelijkingen vergelijken (Drijvers & Kop)

3.3 Symbolen en conventies

Het functieconcept is omgeven met symbolen en conventies waar experts raad mee weten (en ook vrijelijk tegen zondigen), maar die voor leerlingen vaak een ondoordringbare kluwen letters en afspraken zijn.

Zo is $y = x^2$ niet een parabool, maar de *vergelijking* van een parabool, en is een parabool een *grafiek* van de *functie* f met als *functievoorschrift* $f(x) = x^2$, waarvan het *minimum* gelijk is aan 0, dat weer overeenkomt met de *top* van de parabool op (0,0)

Of bekijk eens het volgende functievoorschrift: $f(x) = a \cdot e^{0,9x} \cdot \sin(\frac{2\pi}{6}x)$.

De x is de veranderlijke, a is een parameter (er is sprake van een familie functies), e en π zijn vaste constanten, $\sin$ geeft een operatie aan. De $f(x)$ kan worden vervangen door y :

$y = a \cdot e^{0,9x} \cdot \sin(\frac{2\pi}{6}x)$. Het ‘=’-teken wordt gebruikt in de betekenis ‘ $f(x)$ wordt

gedefinieerd als’ en ook als ‘is gelijk aan’ als we een concrete waarde voor x invullen of als we $y = \dots$ schrijven.

Daarnaast hanteren we minstens vijf verschillende notaties voor functievoorschriften:

$$y = x^2$$

$$H(t) = t^2$$

$$f(x) = x^2$$

$$f : x \rightarrow x^2$$

$$x \rightarrow x^2$$

Het verschil tussen de tweede en derde notatie lijkt arbitrair, totdat we een grafiek gaan tekenen en bij de verticale as *wel* H en *geen* f neerzetten.

Ook het verschil tussen de functie f , de functiewaarde $f(x)$ en het functievoorschrift $f(x) = \dots$ of $x \rightarrow \dots$ is voor leerlingen lang niet altijd helder.

Om dit alle goed te kunnen lezen en interpreteren, is een grote hoeveelheid symbol sense nodig, waarover in het katern Vergelijkingen vergelijken (Drijvers & Kop) meer te lezen is.

Opdracht 6

Experts zien veel meer in wiskundige notaties dan leerlingen.

Noteer welke beelden bij jou, als expert, opkomen bij het zien van $f(x) = 2x + 30$ en welke daarvan je vindt dat een gemiddelde leerling aan het eind van de onderbouw ook zou moeten hebben?

4 Wat weten we al?

4.1 Definities en beelden

Zoals in hoofdstuk 3 beschreven is, lopen de beelden (concept images) die leerlingen hebben bij het begrip functie sterk uiteen.

Die grote verschillen in concept images kwamen aan het licht toen Vinner en Dreyfuss (1989) leerlingen vroegen wat een functie volgens hen was. De antwoorden vielen globaal uiteen in zes categorieën:

1. de formele definitie in het boek (aan iedere x uit verzameling A wordt precies een element uit verzameling B gekoppeld,
2. een afhankelijke relatie; y hangt van x af,
3. een regel met een bepaalde mate regelmaat,
4. een operatie of proces,
5. een formule, of algebraïsche expressie of vergelijking,
6. een representatie in een betekenisloze grafische of symbolische vorm.

Voor 3) en 5) kwamen veel voor bij deze leerlingen. Deze leerlingen zullen hierdoor bijvoorbeeld moeite hebben met stuksgewijs gedefinieerde functies omdat die in strijd zijn met hun beeld dat het proces één formule moet hebben. Hoewel de leerlingen van Vinner niet helemaal te vergelijken zijn met de Nederlandse, herkennen we deze beschrijvingen.

Wanneer we wat nauwkeuriger kijken naar deze beelden, kunnen ze globaal hiërarchisch ingedeeld worden:

1. het invoer-uitvoerproces; het beeld van het machientje past hier goed bij.

2. de beschrijving van covariatie; het beeld van het dynamische karakter van een functie is hier goed zichtbaar.
3. het object functie met eigenschappen, representaties en familie van functies.

Deze beschrijvingen zijn gebaseerd op het werk van Sfard (1991) en Tall (1994). Als we spreken over het proceptkarakter van functies, bedoelen we de drie bovenstaande aspecten.

De formule $y = 2x + 3$ kan gezien worden als:

1. een proces: drie keer de invoer x en dan twee erbij geeft uitvoer y ,
2. een dynamisch proces: bij verandering van x met 1 neemt y steeds met 2 toe,
3. object: de vergelijking van de lijn; als representant van de familie van lineaire functies.

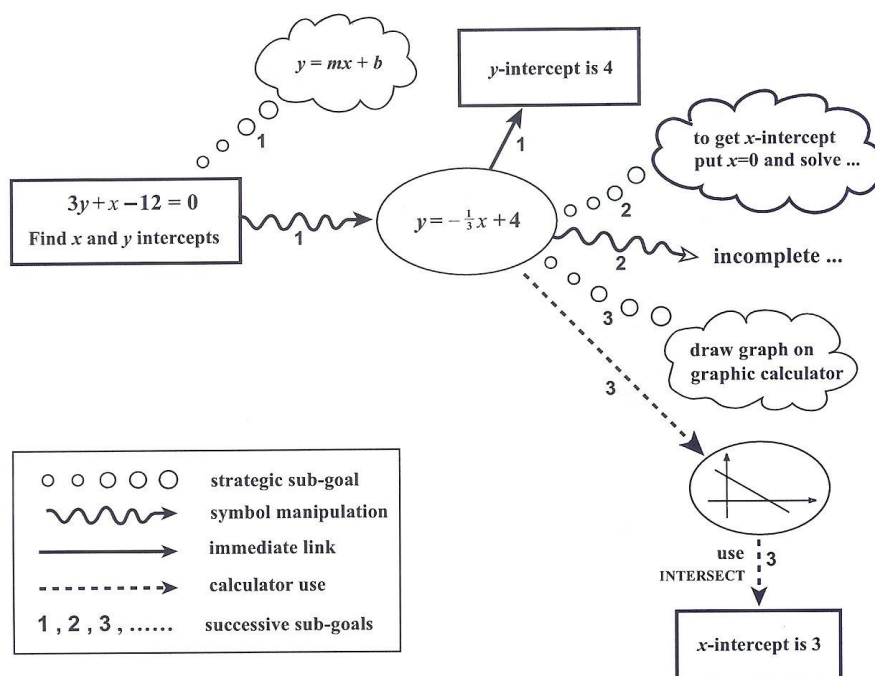
Tall & Gray (2007) beschrijven een onderzoek waarin leerlingen bij twee machientjes ‘multiply bij 3; add 6’ en ‘add 2 to the input; multiply the sum by 3’ een formule moeten geven en moeten aangeven of ze hetzelfde zijn.

De resultaten van drie leerlingen zie je in onderstaande tabel.

	Machientje 1	Machientje 2	Zijn de functies hetzelfde?
Leerling 1	$3x + 6$	$3(x + 2)$	Ja, als ik de drie in machientje 2 verdeel, krijg ik hetzelfde
Leerling 2	$x3 + 6$	$(x + 2)3$	Ja, maar verschillende processen
Leerling 3	$3x + 6$	$x + 2(3x)$	Nee, je krijgt hetzelfde antwoord maar het zijn verschillende processen.

Leerling 1 gebruikt de symbolen op een natuurlijke manier. We spreken over proceptniveau. Leerling 3 concentreert zich op de procedure om aan antwoorden te komen; hij bevindt zich op procesniveau.

Hierna geven zij het voorbeeld van een leerling, Kristi, die de snijpunten met x-as en y-as moet vinden van $3y + x - 12 = 0$.



Kristi beschikt over veel processing power en moet hard werken voor haar oplossing. Een leerling die geleerd heeft flexibel te werken en zich realiseert dat het snijpunt met de x -as gevonden wordt door met $y = 0$ te werken zou hier effectiever te werk gaan.

Tall & Gray beschrijven de grote verschillen tussen leerlingen:

1. Sommige leerlingen focussen op het proces, zoals Kristi hierboven, terwijl anderen zowel op proces als op concept focussen. Ook bij het oplossen van een vergelijking als $3x + 6 = 17$ is dat zichtbaar. Iemand op procesniveau zal voor een omkering van het machientje kiezen (of trial and error) terwijl iemand op proceptniveau de keuze heeft tussen verschillende methoden: omkering van machientje, bordjesmethode (hoeveel moet $3x$ zijn?) of balansmethode. Zie ook het katern Vergelijkingen vergelijken (Drijvers & Kop).
2. Daardoor zal de ene groep leerlingen steeds hun wiskundige kennis herconstrueren en een steeds rijker cognitief schema met gerelateerde concepten ontwikkelen, terwijl de andere groep iedere keer een nieuw schema zal bouwen, waarin de verbindingen minder stabiel zijn.
3. De ene groep zal steeds behoefte hebben aan een stap-voor-stapprocedure terwijl de andere groep flexibeler gebruik kan maken van verschillende methoden en en dus effectievere methoden kan kiezen.
4. De ene groep zal relaties zien tussen symbolen en visuele representaties en de andere groep zal dat veel minder gebeuren.

Sfard (1991) beschrijft een route waarlangs leerlingen zo'n proceptkarakter zouden kunnen leren: onderneem activiteiten, herhaalde processen worden zo als objecten beschouwd, waarmee gemanipuleerd kan worden. Pinto & Tall (1999) vonden echter dat leerlingen verschillen in hun aanpak: sommige leerlingen proberen betekenis te geven aan definities met behulp van voorbeelden en non-voorbeelden, persoonlijke images, waarnemingen, enz. Anderen proberen door afleidingen betekenis te halen uit de definitie. Deze leerlingen leren eerst de definitie en bouwen dan een repertoire van eigenschappen op. Beide routes kunnen succesvol zijn en vele leerlingen hebben vaak voorkeur voor een bepaalde route.

Opdracht 7

Bedenk een leertraject(je) volgens beide methoden die Pinto & Tall noemen voor:

a) Het leren van horizontale en verticale asymptoten.

b) Het oplossen van een stelsel vergelijkingen zoals $\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$.

4.2 Representaties

Hiervoor is al over de verschillende representaties van een functie gesproken. Het beschikken over meer verschillende representaties kan leiden tot een breder en dieper mentaal schema. De verbreding speelt bij 'horizontaal mathematiseren', waarbij een situatie vertaald wordt in een wiskundige representatie (onderdeel van probleemoplossen). De verdieping speelt bij 'verticaal mathematiseren', waarbij representaties dienen tot verdere ontwikkeling van wiskundige concepten.

Een belangrijk onderdeel van het mentale schema van een functie is verbindingen te kunnen maken tussen deze verschillende representaties. Hiertoe heeft Claude Janvier (1987) een schema ontwikkeld dat de verschillende overgangen tussen de representaties in beeld brengt.

naar van	1. Verbaal	2. Numeriek	3. Grafisch	4. Analytisch/ Algebraïsch
1. Verbaal	Herformuleren	Uitrekenen Tabel maken	Schets maken	Formaliseren Modelleren
2. Numeriek	Interpreteren	Doorrekenen	Tekenen grafiek * Plotten grafiek	Opstellen formule of vergelijking
3. Grafisch	Interpreteren	Aflezen * Laten geven	Uitbreiden Combineren	Benaderen met een formule
4. Analytisch Algebraïsch	Interpreteren	Berekenen * Laten berekenen	Schets maken * Plotten grafiek	Herleiden * Laten berekenen

Het volgende probleem is uit Van Streun (1986):

Een trein vertrekt uit van Parijs naar Lyon en rijdt met een constante snelheid van 120 km/u. Een supersnelle trein vertrekt een kwartier later in dezelfde richting met een snelheid van 200 km/u. Op welke afstand zal de supersnelle trein de eerste inhalen?

Hij geeft aan dat oplosers die een visueel beeld hebben van de probleemsituatie, beter slagen dan wanneer er geen visueel beeld is. Het betreft hier problemen die doen denken aan de ingeklede vergelijkingen van vroeger.

Opdracht 7

Bedenk, voordat je verder leest, enkele oplossingsmethoden voor het bovenstaande vraagstuk.

Met behulp van het schema van Janvier kunnen we enkele mogelijke oplossingsmethoden onderscheiden.

a) We kunnen systematisch getallen voorbeelden doorrekenen en een tabel vullen:

Tijd in min.	0	15	30		
Afstand trein 1 tot Parijs					
Afstand trein 2 tot Parijs					

In het schema van Janvier: Verbaal- Numeriek- Numeriek

- b) We kunnen een grove tabel maken, dan een grafiek en tabel verder verfijnen om antwoord te vinden.

In het schema van Janvier: Verbaal- Numeriek- Grafiek- Numeriek

- c) We kunnen formules maken als $S_1 = 120 \cdot t$ en $S_2 = 200 \cdot (t - \frac{1}{4})$ en dan het snijpunt berekenen.

In het schema van Janvier: Verbaal- Analytisch- Analytisch

- d) We kunnen redeneren in de context:

Bij de start heeft de supersnelle trein een achterstand van 30 km. Per uur haalt hij 80

km in. Dus per minuut $\frac{80}{60} = 1\frac{1}{3}$ km. Dus na $\frac{30}{1\frac{1}{3}} = 22$ minuten zijn de treinen even ver;

dat is na 75 km van Parijs.

De route in het schema van Janvier is: Verbaal – Verbaal – Numeriek

Flexibel kunnen switchen van de ene representatie naar de andere maakt van mensen betere probleemoplossers. Aangezien de stap van Verbaal naar Analytisch voor veel leerlingen een vaak onoverkomelijke sprong is (de traditionele weg van bedenk wat je x noemt en voer dit in), kan een aanpak als ‘maak een tabel’, ‘reken een getallenvoorbeeld door’, ‘vertel precies wat er aan de hand is’ helpen. Dankzij omwegen zoals numerieke en grafische representaties ontwikkelen leerlingen hun voorstelling van de situatie. Hiervoor is het wel van belang dat leerlingen (in de onderbouw) de meest voorkomende overgangen voldoende geoefend hebben. In het project Heuristisch Wiskunde Onderwijs (Van Streun, 2000) blijkt dat deze aanpak betere resultaten geeft bij het oplossen van problemen dan de aanpak van ‘eerst concepten aanleren en dan toepassen’ en ook dan de aanpak ‘leren van zelf ontdekken’.

Bij deze overgang van representaties kan ICT een belangrijke rol spelen. Grafieken geven vaak nuttige informatie over eigenschappen van functies, die leerlingen niet direct uit formules halen. Door gebruik van de grafische rekenmachine kan meer aandacht worden besteed aan de relatie tussen formule en grafiek. Zie ICT-katern Van Knoppen naar Kennis (Drijvers et al., 2007).

Ook Tall (1996) geeft aan dat leerlingen symbolisch ‘illiterate’ zijn en succesvol kunnen zijn in het leren en begrijpen van calculus door gebruik van grafische en numerieke gereedschappen. Maar terwijl getalenteerde leerlingen kunnen switchen tussen de representaties en kunnen focussen op de meest relevante informatie van de representaties, profiteren de minder getalenteerde leerlingen minder. Zij varen vaak blind op de representaties die met behulp van ICT gemaakt worden. Een grafiek van

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 3x - 5} \text{ vertoont maar een verticale asymptoot, terwijl heel veel leerlingen}$$

denken dat er toch twee verticale asymptoten moeten zijn. Dit conflict tussen het idee van twee verticale asymptoten en de grafiek is voor goede leerlingen een bron voor leren terwijl zwakke leerlingen dit nauwelijks oppakken.

4.3 Symbolen en conventies

Een belangrijke bron van problemen met (de symbooltaal van) functies is het hebben van een onvolledig concept van het begrip variabele. Een bekend voorbeeld is het onderzoek van Malle (1993) die hooggeschoolde mensen de uitspraak “Op deze universiteit zijn er zes keer zo veel studenten als professoren” zag vertalen met $6S = P$. De variabelen P en S worden als labels gezien (P staat voor professor, S staat voor student) in plaats van als gegeneraliseerde getallen (het *aantal* professoren resp. studenten). In dit kader past ook het praten over 3 appels bij de expressie $3a$. Hoewel dit op korte termijn leidt tot het foutloos oplossen van één bepaald type opgaven ($6a + 3b + 2a + 5b = 8a + 8b$), levert het op de lange duur grote problemen op.

Maar ook als leerlingen inzien dat letters voor getallen staan en er berekeningen mee uit kunnen voeren, blijken ze nog veel problemen tegen te komen. Dat is ook niet verwonderlijk, omdat er op zoveel verschillende manieren tegen een variabele aangekeken kan worden. Mensen als Freudenthal (1983), Schoenfeld & Arcavi (1988) en Janvier (1996) wezen er al op dat de interpretatie afhankelijk is van degene die ermee werkt. Leerlingen kunnen lang met formules als $A = \pi \cdot r^2$ werken zonder dat ze zich realiseren dat r varieert en dat daarom ook A varieert. Ze zien in de formules r dan enkel als onbekende, en als je die kent, kun je die invullen om A te krijgen. In het ICT-katern Van Knoppen naar Kennis (Drijvers & Zwaneveld) worden aspecten van het concept variabele verder besproken.

Janvier (1996) oppert om te beginnen, net als in de natuurkunde, met de letter f in $f(x)$ te interpreteren als een variabele. De dubbele betekenis $f(x)$ namelijk te interpreteren als de functie, maar ook enkel als de functiewaarde, moet later aan bod komen. Want leerlingen moeten $f(x)$ kunnen lezen en interpreteren als $f(\bullet)$, zoals in bijvoorbeeld

$f(x+h) = (x+h)^2$ en in $f(\sin(x)) = (\sin(x))^2$ of in $f(g(x)) = (g(x))^2$. Later kunnen ze dan ook nog $f(x+y) = f(x) + f(y)$ tegenkomen, waarin een eigenschap van functies geformuleerd wordt.

Van Streun (1987) spreekt over de wens dat in de loop van de eerste leerjaren van het voortgezet onderwijs variabelen, grafieken en functies steeds meer vervlochten raken. Pas in de derde klas is de functienotatie $x \rightarrow \dots$ en $f(x) = \dots$ nuttig als aanvulling op andere beschrijvingen van functie zoals de functie in termen van situatie, in tabelvorm, als grafiek, in de vorm van een formule. Wendbaarheid van het functiebegrip in de verschillende toepassingsgebieden en binnen de wiskunde zou nu optimaal aanwezig moeten zijn. Specifieke functies zoals kwadratische functies zijn nu met het beschikbare gereedschap te analyseren.

In het volgende hoofdstuk over ontwerpen bekijken we voorbeelden van stukjes leerlijnen over functies. Daarin komen onder andere aan bod:

- De koppeling van invoer en uitvoer;
- Covariatie: het globaal bekijken van functies (de verandering van invoer koppelen aan de verandering van uitvoer);
- Het procept-karakter van een functie;
- Het koppelen van representaties;
- De rol van contexten;
- Het maken van een indeling van functies op basis van kenmerken;
- Het redeneren met en over functies.

Aan de hand van deze punten proberen we aan te geven hoe een rijk cognitief schema bij leerlingen bevorderd kan worden.

In deze punten zijn ook de aspecten zichtbaar die we eerder in het hoofdstuk 2 noemden: definitie van functie, representaties.

5 Ontwerpen

We willen dat leerlingen een rijk schema bij het concept functie ontwikkelen, dat flexibel ingezet kan worden. In zo'n schema kan de functie aan de ene kant als proces gezien worden (aan een x wordt een y gekoppeld, een machientje 'doet wat') en aan de andere kant als object (het machientje als lid van een familie met bepaalde kenmerken). In het schema kunnen ook de verschillende representatie, die ieder bepaalde kenmerken van de functie laten zien, flexibel ingezet worden bij het probleemoplossen.

In zijn Didactische fenomenologie schetst Freudenthal (1983) een aantal activiteiten die aanleiding zijn voor het ontwikkelen van een functiebegrip. Daarbij kijken we in eerste instantie naar fenomenen zoals tijd en temperatuur, waarin het veranderlijke aspect bekend is voor leerlingen, bijvoorbeeld het verband tussen oppervlakte en tijd; prijsindex en tijd; inkomstenbelasting en inkomen.

We kunnen onderscheid maken tussen de afhankelijke (variëren onder beperking) en onafhankelijke (vrij variëren) variabele.

Voor de onderbouw zijn dergelijke activiteiten:

- redeneringen als 'hoe groter, des te kleiner,',
- evenredigheid, bijvoorbeeld werken met schaal 1 op 10000 bij aardrijkskundige kaarten,
- interpolatie en extrapolatie,
- meetkundige afhankelijkheden, bijvoorbeeld de oppervlakte of de hoogte van een parallellogram,
- algebraïsche beschrijvingen van elementaire operaties; $x \rightarrow x + 3$,
- functietabellen, functie ervaren in verhaal, tabel, pijlentaal, machientje, flowdiagram
- aflezen van grafieken; eerst lokaal (aan een invoer een uitvoer koppelen) en dan globaal (covariatie) met stijgen en dalen,
- compositie van operaties en inverteren; ketting van operaties en dan het bewijzen van identiteiten en vergelijkingen oplossen; hier komen pijlenkettingen en machientjes aan bod.

Deze laatste activiteit wordt in de onderbouw gestart en in de bovenbouw uitgebreid. Dat wordt gevolgd door:

- steilheid van grafieken, differentiequotiënten, differentiaalquotiënten, afgeleide, discontinue sprongen, periodiciteit, asymptotisch gedrag, enz.

Er zijn nog veel meer verschijnselen in het dagelijks leven die te modelleren zijn als functie volgens de strikte verzamelingtechnische definitie, zoals in de oriëntatie verwoordt. Voorbeelden hiervan zijn de aan/uitknop van een lamp of de verjaardag van een persoon. Toch lijken Freudenthal deze verschijnselen een minder geschikte start voor het functiebegrip. Wat er namelijk in ontbreekt, en wat wel aanwezig is in de bovengenoemde activiteiten, is een duidelijk zichtbare afhankelijkheid en covariatie. Daarom zien we veel van bovenstaande

activiteiten terug in schoolboeken die volgens de principes van realistische wiskunde zijn opgebouwd.

In het vervolg bespreken we aandachtspunten voor onderwijs dat rijke schema's wil aanleren bij leerlingen. We illustreren deze aan de hand van voorbeelden van onderzoek. We volgen de lijn onderbouw-bovenbouw.

5.1 Onderbouw

Aandacht voor betekenisvolle context en eigen notaties van leerlingen

In de onderbouw willen we starten met relaties tussen variabelen die leerlingen herkennen en die op dat moment betekenisvol voor hen zijn. In dergelijke contexten kunnen leerlingen denken. Dit past goed bij een van de principes uit *How people learn* (Bransford, 2000) die door Kalchman & Koedinger (2005) zijn toegepast bij hun lessenserie over functies: Bouw nieuwe kennis op bestaande leerlingenkennis. Dit betreft schoolkennis, maar ook buitenschoolse kennis. Kies een context waarin leerlingen kunnen denken en die als 'bridging' context kan dienen. Leerlingen begrijpen de relaties tussen de variabelen en zijn in het algemeen geïnteresseerd in en gemotiveerd door het probleem.

De schrijvers geven als voorbeeld een sponsorloop waarin de leerling in eerste instantie \$1 per gelopen kilometer krijgt. Leerlingen onderzoeken de relaties tussen formule en grafiek en kijken naar de betekenis van de helling van de grafiek.

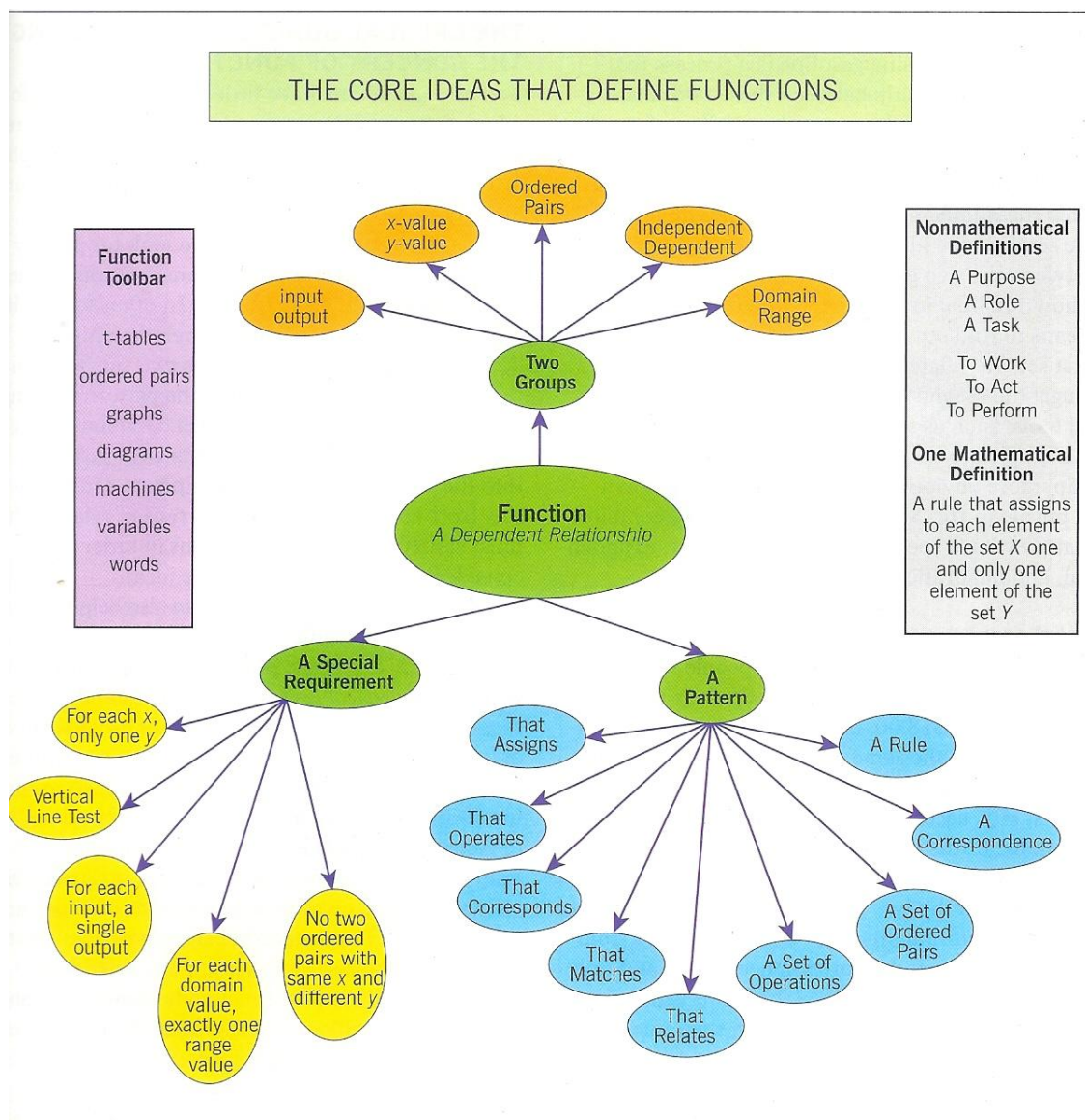
Ook wordt de constructie van een functionele notatie door leerlingen gestimuleerd. De auteurs houden een nadrukkelijk pleidooi om langer in dezelfde context te blijven werken en in het begin complicerende moeilijkheden zoals negatieve hellingen en formele notaties te beperken. In hun lessenserie over de sponsorloop komt in les 2 de helling als constante hoeveelheid die per km erbij komt, aan bod; deze hoeveelheid is ook zichtbaar in de tabel. In deze fase mogen notaties aangepast zijn aan de leerlingen.

In les 3 wordt het y-intercept gezien als startgeld of startschuld. Een van de opdrachten is nu om zelf (lineaire) functies te bedenken die \$153 opleveren als er 10 km gelopen wordt.

In les 4 onderzoeken leerlingen hoe de parameters a en b de grafiek van de functie $y = ax^2 + b$ veranderen.

Aandacht voor Big Ideas van functie: wat is een functie?

Ponce (2007) beschrijft een leerlijn waarin leerlingen een beter gevoel voor functies ontwikkelen. Hij start met de betekenis van het woord functie via een woordenboek of internet. Het resultaat van de discussie moet zijn dat een functie een 'ding' is en 'iets doet' (cf.: object en proces). Daarna worden de Big Ideas (twee verzamelingen, een patroon, speciale eisen, zie figuur hierna) verkend.



Als je de Big Ideas begrijpt is wiskunde niet langer een verzameling van losse concepten, vaardigheden en feiten. Deze kernideeën zouden gebruikt moeten worden om lessen met klassendiscussies te organiseren. Hierdoor worden cognitieve schema's opgebouwd die het organiseren van nieuwe informatie en het 'ophalen' uit het geheugen van vroegere kennis gemakkelijker maakt. Zie ook katern 0: Leren en onderwijzen van wiskunde, A. van Streun.

Aan de hand van een context, bijvoorbeeld 'de kosten van benzine bij het tanken van de auto van je ouders' worden de kernideeën uit figuur 1 verkend. De hoeveelheid benzine (input) wordt gekoppeld aan een geldbedrag (output). Hierbij wordt het aspect van twee verzamelingen (two groups) besproken. Het patroon is dat voor bijv. \$3 een gallon benzine gekocht kan worden. Er is dus sprake van een lineair patroon. De speciale eis is dat voor iedereen geldt dat als er \$18 betaald wordt, dat je daar altijd 6 gallon benzine voor krijgt: aan iedere hoeveelheid benzine wordt slechts een, en niet meer dan een, geldbedrag gekoppeld.

Hierna krijgen leerlingen enkele functiemachines in de vorm van een tabel met de vraag om het patroon te zoeken.

Functiemachine

input	output
5	11
6	13
8	17

Hierna kunnen leerlingen zelf voorbeelden van functiemachines bedenken en wordt bovenstaand schema met hen besproken.

Het aspect van ‘het koppelen van de ene verzameling aan de andere’ is mooi zichtbaar in een voorbeeld van Akkus (2008) waarin met leerlingen gekeken wordt naar een uitwisselingsprogramma: kinderen uit een stad gaan op bezoek in een andere stad en logeren bij gastouders. De bezoekers moeten aan gastouders gekoppeld worden. Welke eisen moet je aan die koppeling stellen?

In vroegere schoolboeken stonden expliciete definities van functies. In de huidige schoolboeken worden functies soms wel heel impliciet gedefinieerd. In de onderbouw wordt er vaak enkel over formules gesproken en in de bovenbouw zie je in hoofdstukken als ‘Functies en grafieken’ het woord functie alleen in de zinnen ‘gegeven is de functie ...’. Wat een functie nu precies is, wordt nauwelijks beschreven. Wij houden een pleidooi om dat expliciet te doen.

Aandacht voor verschillende representaties en het switchen daartussen

We moeten ons in deze beginfase niet beperken tot één enkele representatie van functies. Bijna unaniem is er een pleidooi voor een gelijktijdige ontwikkeling van tabel, grafiek en formule (met eventueel pijlenketting).

One of the guiding principles is the ‘Rule of Three’, which says that wherever possible topics should be taught graphically and numerically, as well as analytically. The aim is to produce a course where the three points of view are balanced, and where students see each major idea from several angles. (Hughes Hallett 1991)

De overgangen tussen de verschillende representaties komen zo op een natuurlijke wijze aan bod. Een aparte rol is weggelegd voor de overgang van analytisch naar algebraïsch. Hier komt het algebraïsch manipuleren aan de orde, dat voor veel leerlingen een groot struikelblok is. De andere representaties kunnen betekenis geven aan de algebraïsche expressies, waardoor deze meer betekenis kunnen krijgen voor leerlingen.

De tabel is de representatie waarin je goed de definitie van de exponentiële functie kan formuleren: steeds met eenzelfde groeifactor vermenigvuldigen. Het opstellen van een formule kan steeds gebeuren vanuit een tabel. Voordeel van een dergelijke aanpak is dat ook in contextproblemen, waarin een formule gevraagd wordt, op analoge wijze gewerkt kan worden. Wiskundigen brengen nieuwe problemen graag terug tot oude problemen die ze al opgelost hebben. Op basis van bovenstaand voorbeeld kunnen leerlingen vuistregels formuleren: ‘probeer formules van exponentiële functies te maken vanuit een tabel’ en ‘zet bij

een contextprobleem met exponentiële functies de gegevens in een tabel'. Deze vuistregels vormen dan als het ware het denkgereedschap om problemen aan te pakken.

Ook kan meer stilgestaan worden bij 'weten waarom'-vragen als 'hoe kun je verklaren dat op basis van een definitie van een exponentiële functie (steeds eenzelfde groeifactor) dat de formule van de vorm $y = b \cdot g^x$ is?'

x	0	1	2	3	4	5	6	10	37
y	12	36	108	324	972				

Een dergelijk bewijs aan de hand van bovenstaande tabel kan geïnitieerd worden door de vraag 'bereken aan de hand van beginwaarde $y = 12$ de y -waarde bij $x = 37$ '. Het antwoord $12 \cdot 3^{37}$ leidt vrijwel direct tot de gevraagde formule.

Het switchen tussen de verschillende representaties kan een probleemoplosser helpen, zoals we hierboven en in hoofdstuk 4 zagen. Ook Kalchman & Koedinger (2005) geven aan dat direct met probleemoplossen begonnen kan worden: Leer leerlingen problemen op te lossen. Besteed niet alleen aandacht aan het denken en werken met procedures en concepten, maar ook aan het nadenken over deze procedures en concepten. Dus leren over strategieën en over de inzet van verschillende gereedschappen zijn onderwerp van onderwijs.

Aandacht voor het proceptkarakter van functies

Drijvers e.a. (2007) geven een experimentele lessenserie over functies voor klas 2 havo/vwo. De context van belabonnementen wordt met behulp van de applet Algebrapijlen onderzocht. Via stappen als 'berekeningen omzetten in pijlenketting', grafieken maken, omslagpunten zoeken, omkeerkettingen, functies van families worden de verschillende representaties (grafiek, pijlenketting, tabel, formule) aan elkaar gekoppeld. In de samenvatting worden de verschillende aspecten van de functievoorstelling expliciet gemaakt.

Elke functievoorstelling laat verschillende kanten van de functie zien.

In de **pijlenketting** zie je goed het stapsgewijze rekenproces. Als de invoer een variabele is, staat in het uitvoervakje ook de **formule**.

Bijvoorbeeld: de ketting



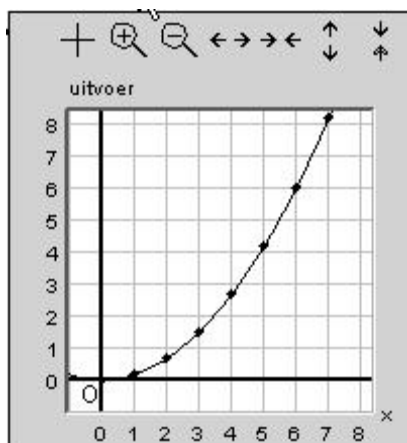
• In de **tabel** zie je goed de **getallenparen** (invoergetal, uitvoergetal)

Bijvoorbeeld: het getallenpaar (3, 1.5) in de tabel

b	
0	0
1	0.167
2	0.667
3	1.5
4	2.667
5	4.167
6	6
7	8.167

• In de **grafiek** zie je goed de samenhang tussen invoer en uitvoer. De invoer staat op de horizontale en de uitvoer op de verticale as.

Bijvoorbeeld: bij 3 op de horizontale as hoort 1.5 op de verticale as.



• De **ingeklapte pijlenketting** is korter dan de uitgeklapte. Je kunt er zowel de formule als de getallenparen in zien.

$$x \rightarrow \frac{x^2}{6}$$

In deze lessenserie worden de volgende facetten van het functiebegrip belicht:

- 1) een invoer-uitvoertoekenning; niet allen op lokaal niveau (hoe bepaalt de invoer de uitvoer) maar ook op globaal niveau (relatie tussen domein en bereik),
- 2) een dynamisch proces; hoe verandert de afhankelijke variabele als de onafhankelijke variabele toeneemt en hoe kun je dat bestuderen in de verschillende representaties,
- 3) een wiskundig object dat voorgesteld kan worden als pijlenketting, als tabel, als grafiek, als formule. In ieder van deze representaties kun je bepaalde eigenschappen terugzien.

De ontwerpers vinden in hun experiment dat de combinatie van context en applet het denken van de leerlingen inderdaad ondersteunt en leerlingen uitnodigt tot meer experimenteren, beter reflecteren, heroverwegen en herformuleren.

Aandacht voor covariatie

In het Yearbook van NCTM besteden Bridger & Bridger (2001) aandacht aan nomogrammen bij het bestuderen van covariatie van de functie (hoe verandert de uitvoer y als invoer x verandert). In nomogrammen is de invoer en uitvoer vanzelfsprekend zichtbaar, en is goed te zien 'wat de functie met de invoer doet'. Functies kunnen punten verder uit elkaar brengen (zoals bij $f(x) = 2x$), en ook dichter bij elkaar (zoals bij $f(x) = 0,5x$). Vervolgens kan bij functies als $f(x) = x^2$ gekeken worden waar de functie zorgt voor een samentrekking en waar voor een uitrekking. Daarnaast is het stijgen en dalen goed zichtbaar en is het schakelen van functies goed in beeld te brengen.

Opdracht 5

Bridger & Bridger (2001) beschrijven een experiment met nomogrammen waarin ze met leerlingen onderzoek doen naar het gedrag van de functie $f(x) = \frac{1}{x-2}$ als x steeds groter

wordt (x nadert naar oneindig) en als x in de buurt van $x = 2$ komt. Maak voor beide situaties een nomogram en bedenk argumenten waarom je dit in de klas zou inzetten. Geef ook eventueel tegenargumenten (In dit experiment worden de invoer- en uitvoerlijn in het nomogram verticaal getekend).

Aandacht voor symbolen en communicatie

De algebrawerkgroep van de NVvW (2001) schrijft in haar rapport: ‘Het begrijpen en met verstand leren gebruiken van krachtige notaties als a^5 , 2^n en $\sqrt{x}$ kan worden bevorderd door een ruime variatie in typen opgaven, het leren teruggrijpen naar de betekenis van de gebruikte notatie en het ontwikkelen van een houding van controleren, terugkijken en verantwoorden. Er wordt niet expliciet gesproken over lastige concepten als de variabele en het ‘=’-teken, maar die horen hier zeker bij. Ook een zorgvuldig gebruik van notaties als f en $f(x)$, zoals we in het vorige hoofdstuk betoogden, kan de duidelijkheid voor leerlingen vergroten.

De werkgroep pleit onder andere voor:

- voldoende ruimte voor leerlingen om eigen producties, eigen opgaven, eigen formuleringen te maken, en opdrachten te geven die veel verschillende antwoorden uitlokken,
- voldoende begrip van de moeilijkheid voor de meeste jongeren (en ouderen) om dit soort notaties goed te doorgronden,

We hebben deze aandachtspunten steeds geïllustreerd met een enkel voorbeeld. Er blijkt echter grote overeenstemming te bestaan met betrekking tot deze aandachtspunten.

5.2 Bovenbouw***Aandacht voor verschillende families met kenmerkende eigenschappen in representaties***

Op weg naar de bovenbouw wordt de samenhang tussen de verschillende representaties verder uitgewerkt. Verschillende groepen functies worden bestudeerd en er is steeds meer aandacht voor een flexibele overgang van de ene representatie naar de andere, eerst nog eens bij de lineaire functies, gevolgd door kwadratische en exponentiële functies. Bijzondere kenmerken in tabel en grafiek en de algemene formule passeren de revue. Later volgen wortel, gebroken functies en machtsfuncties. Dan komen ook vragen aan bod over domein en bereik, zoals ‘voor welke x -waarden heeft de functie geen functiewaarden?’

Functies kunnen worden ingedeeld op basis van regelmatige patronen: bij gelijke invoerverandering (x neemt steeds met dezelfde stappen toe) kan uitvoer ook met gelijke stappen toenemen (lineaire functies) of met relatief gelijke stappen toenemen (steeds in dezelfde verhouding toenemen; exponentiële functies); bij relatief gelijke verandering van invoer (x neemt in dezelfde verhouding toe) kan de uitvoer ook steeds met relatief gelijke stappen toenemen (machtsfunctie) of met gelijke stappen (logaritmische functie). Op deze wijze worden de begrippen absolute en relatieve verandering van invoer en uitvoer als criterium gebruikt om functies in te delen. In bijlage 1 zie je een opdracht die in de vierde klas gebruikt kan worden om de verschillende representaties van functies aan elkaar te koppelen, met als doel het bevorderen van het mentale schema van functies.

Aandacht voor formules lezen

Als we de grafieken van standaardfuncties transformeren, kunnen we kijken naar de relatie tussen de nieuwe grafieken en de bijbehorende formules. Zo leren leerlingen formules lezen. Denk bijvoorbeeld aan het herkennen van een parabool in $f(x) = (x - 3)^2$ en het herkennen

van de hyperbool in $f(x) = 4 + \frac{2}{x - 3}$.

Ook andere aspecten van functies, zoals (dis)continuïteit, asymptoten, symmetrie, stuksgewijs gedefinieerde functies zijn onderwerp van studie. Leerlingen leren kwalitatief redeneren over en met functies in opdrachten als:

- 1) In een wiskundig model wordt het aantal dieren gegeven door de functie f met

$$f(x) = \frac{500}{20 + 30 \cdot 2^{-0,5 \cdot x}}; x \text{ is het aantal jaren.}$$

Hoeveel dieren zullen er op den duur zijn volgens deze formule?

- 2) Gegeven de functie $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$; leg uit dat de grafiek van y symmetrisch is in de y -as.

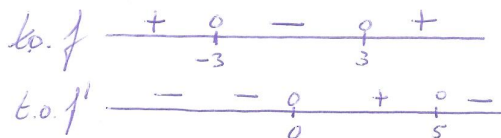
Aandacht voor redeneren met functies

Oehrtman (2008) geeft aan dat 'the time spent at the beginning of calculus to strengthen student's function conceptions is crucial for their understanding the major ideas of calculus'.

'We advocate for greater emphasis on enculturating students into using the language of function in order to develop facility in speaking about functions as entities that accept input and produce output, a more conceptual orientation to teaching function inverse and composition, the inclusion of tasks requiring simultaneous judgements about entire intervals of input or output values, and the development of student's ability to mentally run through a continuum of input value while imagining the changes in the output values, with explicit efforts to also promote, at developmentally appropriate time, the covariational reasoning abilities.'

Hieronder geven we enkele voorbeelden hiervan:

- Vraag verklaringen in termen van in en output;
 - Is $(f \circ g)^{-1}$ gelijk aan $f^{-1} \circ g^{-1}$ of aan $g^{-1} \circ f^{-1}$? Gebruik een pijlketting.
 - Gegeven $f: x \rightarrow 6$; welke waarden van x geven uitkomst 6?
 - Gegeven $g(x) = f(x + 3)$; welke invoer bij g geeft dezelfde uitvoer als $x = 7$ bij f ?
- Bekijk het gedrag van functies op het hele domein;
 - Gegeven $f(x) = x^2$; welke invoer x geeft uitvoer 1? Welke invoer geeft uitvoer $[0,1]$
- Laat leerlingen uitspraken doen over functies waarbij over verschillende representaties gekeken moet worden;
 - Geef formule en grafiek van de inverse van $f(x)$.
- Laat leerlingen redeneren over covariatie;
 - De formule $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ geeft de inhoud van een bol; $\frac{dV}{dR} = 4\pi R^2$ geeft de oppervlakte van de bol. De formule $V = x^3$ is de inhoud van een kubus; $\frac{dV}{dx} = 3x^2$ geeft niet de oppervlakte van de kubus. Waarom dit verschil?
 - Gegeven een grafiek; schets aan de hand van deze grafiek van f een schets van f' en f'' ; omgekeerd: wat weet je over de grafiek van f als je een schets hebt van f' en f'' ?
 - Teken aan de hand van een gegeven tekenoverzicht van $f(x)$ en een tekenoverzicht van $f'(x)$ een mogelijke grafiek van $f(x)$



5. Breid het idee van covariatie ook uit naar bijvoorbeeld naar parameterkrommen en functies van meerdere variabelen;

- Gegeven $\begin{cases} x(t) = \sin(10t) \\ y(t) = \cos(20t) \end{cases}$; is de grafiek een deel van een parabool?
- Gegeven $f(x, y) = y + x^2$; bespreek hoe je deze functie in beeld kunt brengen.

Bloch (2003) stelt dat veel aankomende studenten in het hoger onderwijs niet het 'mathematical game' op universitair niveau kennen. Haar idee is om leerlingen uitspraken over functies te laten formuleren, deze bediscussiëren en vervolgens bewijzen te produceren. Grafieken worden dan heuristisch gebruikt. In de opdrachten worden soms ook formele notaties gebruikt en in de antwoorden moeten deze ook gebruikt worden.

Twee voorbeelden van dit soort opdrachten zijn:

1)

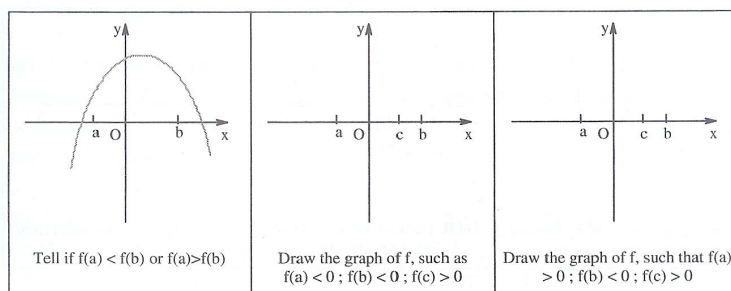


Figure 4. A first set of tasks in Phase 2.

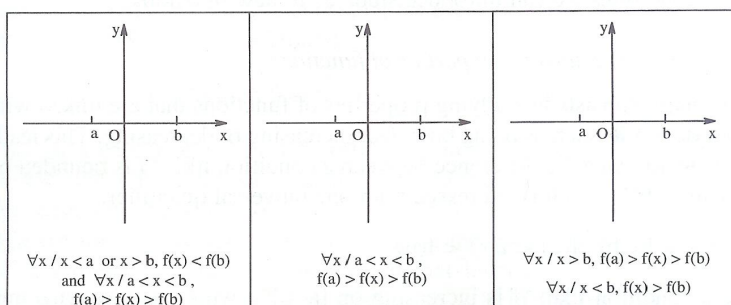


Figure 5. A second set of tasks in Phase 2.

- 2) Neem twee lineaire functies en vermenigvuldig deze en noem de nieuwe functie h . De grafiek van h lijkt een parabool. Geldt dit altijd? Wat is over de ligging van de top te vertellen? Bewijs je uitspraken.
Omgekeerd: Kun je bij een parabool altijd twee lineaire functies bedenken? Bewijs je uitspraken.

De genoemde aandachtspunten in dit hoofdstuk geven aan welke elementen van het functiebegrip de moeite waard zijn voor de mentale schema's van leerlingen en welke aspecten bij het onderwijzen daarbij een rol spelen.

2 Afsluiting

Experts bezitten rijke cognitieve schema's die bijna alle aspecten van functies bevatten. Een functie is voor hen een concept met vele representaties. Zij herkennen vaak moeiteloos kenmerken van de verschillende soorten functies (exponentiële, machtsfuncties, enz.) en

weten omgekeerd welke kenmerken zij bij de verschillende soorten tegenkomen. Ze kunnen redeneren met functies in het algemeen en hebben gevoel voor bijvoorbeeld continuïteiten en discontinuïteiten. Ze kunnen moeiteloos switchen tussen de verschillende representaties en gebruiken dit ook bij het oplossen van problemen. Ook algebraïsche vaardigheden worden door deze schema's ondersteund. Leerlingen hebben dit alles nog niet. We hebben een pleidooi gehouden om expliciet aandacht aan deze schema's te besteden in het onderwijs en rekening te houden met problemen van leerlingen. Het ontwikkelen van schema's is niet een automatisch bijproduct als er met functies gewerkt wordt. Functies is een veelomvattend concept dat een belangrijke rol speelt bij het probleemoplossen, verbanden aangeven, het 'lezen' van formules, het manipuleren van formules, enz.

Om deze redenen is zorgvuldig en samenhangend onderwijs in functies van belang. In dit katern hebben we aandachtspunten voor dergelijk onderwijs van onderbouw naar bovenbouw proberen te formuleren.

Hierbij hebben we geen onderscheid gemaakt tussen wiskunde A, B en C. Het is aan de lezer om uit te maken welke voorbeelden en aandachtspunten beter passen bij welke doelgroep.

Opdracht 8

Zoek of bedenk contexten die als denkmodel ('bridging context' in de zin van Kalchman & Koedinger) kunnen dienen bij het onderzoeken van

- a. exponentiële functies,
- b. machtsfuncties.

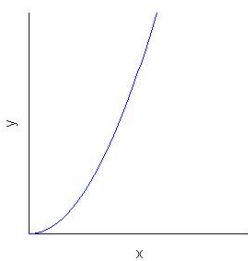
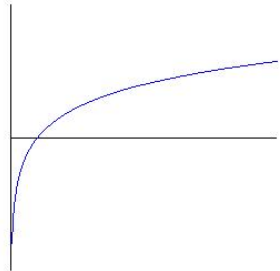
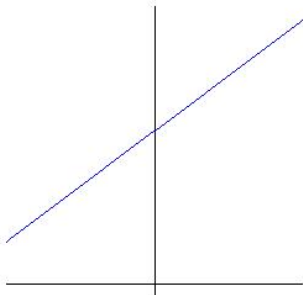
Opdracht 9

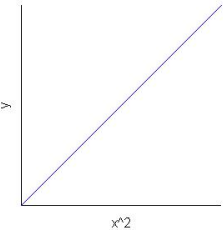
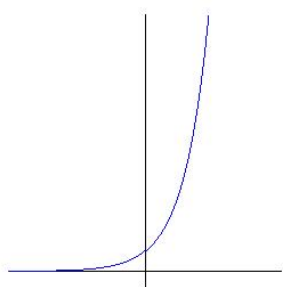
Kies een of enkele hierboven genoemde aandachtspunten en ontwerp een les waarin deze aandachtspunten verwerkt zijn.

Bijlage 1

Opdracht:

Zoek de bij elkaar passende kaartjes

Context ‘gelijkmatige groei’	Context ‘ y is een logaritmische functie van x ’	Context ‘ y recht evenredig met x^2 ’																
Context ‘vaste groeifactor’	Context ‘steeds een vast percentage erbij’	Context ‘als x a keer zo groot wordt, dan wordt y ook met een vaste factor vermenigvuldigd’																
$y = 3x^2$	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>3</td><td>12</td><td>27</td><td>48</td><td></td><td></td></tr></table>	x	0	1	2	3	4	5	6	y	0	3	12	27	48			Context ‘als x^2 a keer zo groot wordt, dan wordt y ook a keer zo groot’
x	0	1	2	3	4	5	6											
y	0	3	12	27	48													
$y = {}^2\log(x)$	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>y</td><td>83</td><td>89</td><td>95</td><td>101</td><td>107</td><td></td><td></td></tr></table>	x	0	1	2	3	4	5	6	y	83	89	95	101	107			
x	0	1	2	3	4	5	6											
y	83	89	95	101	107													
$y = 12 \cdot 3^x$	<table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td></td><td>6</td><td>8</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td>3</td></tr></table>	x	1	2	3	4		6	8	y	0	1		2			3	
x	1	2	3	4		6	8											
y	0	1		2			3											
$y = 83 + 6x$	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>y</td><td>12</td><td>36</td><td>108</td><td>324</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	x	0	1	2	3	4	5	6	y	12	36	108	324				
x	0	1	2	3	4	5	6											
y	12	36	108	324														

$\frac{y}{x^2} = 3$		
$y = bw \cdot gf^x$	Grafiek Rechte lijn door (0,83) en met helling 6	Context 'als x met eenzelfde getal vermenigvuldigd wordt, neemt y met een vast getal toe'

Referenties

- Akkus, R., Hand, B., & Seymour, J. (2008). Understanding students' understanding of functions. *Mathematics Teaching*, 207, 10-13
- Algebrawerkgroep W12-16 (1991). Algebra. *Nieuwe Wiskrant*, 11(1), 7-15.
- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.
<http://flm.educ.ualberta.ca/index.php?do=extras&lang=en>.
- Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25(2), 42-47.
- Bransford, J.D., Brown, A.L., & Cocking, R.C. (Eds.) (2000). *How People Learn*. Washington D.C: National Academy Press.
- Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (Eds.) (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bridger, M., & Bridger, M. (2001). Mapping diagrams: Another view of functions. In: A.A. Cuoco (Ed.), *The Roles of Representations in School Mathematics (2001 Yearbook)*. Reston, VA: NCTM.
- Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics* 52(1), 3-28.
- cTwo (2007), *Rijk aan betekenis. Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: cTWO
<http://www.ctwo.nl/>
- cTwo Programmacommissie Onderbouw (2008), *Verkennen, gebruiken, verdiepen*.
<http://www.ctwo.nl/>
- Dormolen, J. (1976). *Didactiek van de wiskunde*. Utrecht: Bohn, Scheltema & Holkema.
- Drijvers, P. (Red.) (2006). *Wat a is, dat kun je niet weten. Een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Van Gisbergen, S., & Gravemeijer, K. (2007). Tool use in a technology-rich learning arrangement for the concept of function. In: D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the V Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME5*, 1389 - 1398. www.fi.uu.nl/tooluse
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- Giessen, C. van de, e.a. (2008). *Eindverslag Werkgroep Afstemming Wiskunde-Natuurkunde aan Vernieuwingscommissies Wiskunde cTWO en Natuurkunde NiNa*. Utrecht: cTWO
www.ctwo.nl
- Gisbergen, S. van, Boon, P., Doorman, M., & Drijvers, P. (2007). Applets en context als krachtige combinatie. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 27(2), 21-26. www.fi.uu.nl/tooluse
- Gisbergen, S. van, Boon, P., Doorman, M., & Drijvers, P. (2007). *Experimentele lessenserie over functies*. www.fi.uu.nl/tooluse
- Janvier, C. (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning Mathematics*. Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Janvier, C. (1996). Modelling and Initiation into Algebra. In: N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 225-236), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Kalchman, M., & Koedinger, K. (2005). Teaching and Learning Functions. In: S. Donovan & J. Bransford (Eds.), *How Students Learn Mathematics* (pp. 351-392). Washington DC: National Academy of Sciences
- Kindt, M. (2003). *Oefeningen in algebra*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

- Lagerwerf, B. (1993). *Wiskunde-onderwijs in de basisvorming*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- NKBW (2007). *Eindrapport Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde*.
<http://www.nkbw.nl/>
- Paz, T., & Leron, U. (2009). The Slippery Road From Actions on Objects tot Functions and Variables. *Journal for Research in Mathematics Education* 40(1), 18-39
- Oerhrtman, M.C., Carlson, M.P., & Thompson, P.W. (2008). Foundational Reasoning Abilities that Promote Coherence in Student's Function Understanding. In: M.P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (pp. 27-42). Washington, DC: Mathematical Association of America.
http://mathed.asu.edu/media/pdf/pubs/carlson/Oerhrtman-Carlson-Thompson_final.pdf
- Pinto, M., & Tall, D. (1999). Student constructions of formal theory giving and extracting meaning. In: O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of PME, Haifa*, 4, 65-73
- Ponce, G. (2007). Critical Juncture Ahead: Proceed with Caution to Introduce the Concept of Function, *Mathematics Teacher* 101-2, 136-144.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Skaja, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function-a case study. *Educational Studies in Mathematics*, 53(3), 229-254.
- Schoenfeld, A., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematical Teacher*, 81, 420-427.
- Streun, A. van (1986). De rol van representatives bij het oplossen van problemen. *Tijdschrift voor Didactiek der β -wetenschappen*, 4(1), 38-51.
- Streun, A. van (1987). Nieuwe didactische wiskundelijnen. *Euclides*, 62(4).
- Streun, A. van (2000). Representations in Applying functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(5), 703-725.
- Streun, A. van, Harskamp, E., & Suhre, C. (2000). The Graphic Calculator and Students' Solution Strategies. *Mathematics Education Research Journal*, 12(1), 37-52.
- Streun, A. van (2006). Parate kennis en algebra. *Euclides*, 82(2, 3, 4, 5, 6).
- Skemp, R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Middlesex, England: Penguin books.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
- Tall, D. (1996). Functions and Calculus. In: A. Bishop (Ed.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-326). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D., Gray, E., e.a. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 1, 81-104.
<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001a-symbol-bifurcation>.
- Vinner, S., & Dreyfuss, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366.
- Wansink, J. (1970). *Didactische Orientatie voor wiskundeleraars, deel III*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Werkgroep algebra van de NVvW (2001), *Algebra om te begrijpen*.
<http://www.nvww.nl.win2k.euronet.nl/algebra/discussiestuk-algebra.doc>
- Werkgroep 3TU (2006). Aansluiting vwo en technische universiteiten. *Euclides*, 81(5), 242-247.
- Zwaneveld, G. (1999). *Kennisgrafen in het wiskundeonderwijs*. Heerlen: Open Universiteit.