

Proefschrift Iris van Gulik-Gulikers

Meetkunde opnieuw uitgevonden; een studie naar de waarde en toepassing van de geschiedenis van de meetkunde in het wiskundeonderwijs

Bespreking door:

Pauline Vos

Instituut voor Didactiek en Onderwijsontwikkeling

Rijksuniversiteit Groningen

Michiel Doorman

Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen

Universiteit Utrecht

In het proefschrift van Iris van Gulik-Gulikers wordt de vraag gesteld in hoeverre historische onderwerpen geïntegreerd kunnen worden in het meetkundeonderwijs. Haar onderzoek ligt daarmee op het snijpunt van verschillende disciplines, zoals geschiedenis van de meetkunde, het ontwerpen van onderwijs en het meten van onderwijseffecten. Om dit proefschrift goed te kunnen beoordelen zijn dus verschillende specialismen nodig. Wij, de beide recensenten, zijn slechts geïnteresseerde leken op het gebied van de geschiedenis van de wiskunde en ook niet direct betrokken bij onderzoek naar het meetkundeonderwijs. Maar omdat wij wél direct betrokken zijn bij onderzoek naar het wiskundeonderwijs en ervaring hebben in het ontwerpen ervan (MD) en het meten van curriculum-implementaties (PV), ervoeren wij voldoende raakvlakken om dit proefschrift met interesse te lezen en voor TDbeta te beoordelen.

De theoretische inbedding voor het gebruik van historische thema's in het meetkundeonderwijs vindt plaats in hoofdstuk 2, dat bestaat uit een uitgebreide literatuurstudie naar het gebruik van historische thema's in het meetkundeonderwijs. Dit hoofdstuk is oorspronkelijk verschenen als artikel in het tijdschrift *Educational Studies of Mathematics* en daarom in het Engels in het proefschrift opgenomen. Meer dan 150 artikelen in het Duits, Frans, Engels en Nederlands werden door Van Gulik en mede-auteur Blom bestudeerd en geordend.

Deze artikelen blijken argumenten te geven *waarom* de geschiedenis van de wiskunde een plaats dient te krijgen in het wiskundeonderwijs. De argumenten kunnen worden opgesplitst in drie groepen: conceptuele, (multi-)culturele en motivationele argumenten. Een voorbeeld van een conceptueel argument is het historisch-genetisch principe, volgens welke de leerling effectief leert als hij de stappen doorloopt die de mensheid ook doorliep op de weg naar een ontdekking. Een ander conceptueel argument is dat leerlingen hun eigen leerproblemen kunnen relativeren als zij zien hoe wiskundige vondsten ook met vallen en opstaan werden ontwikkeld. Bij de (multi-)culturele argumenten gaat het vooral om het betrekken van leerlingen bij het wiskundeonderwijs door hen te laten zien dat wiskunde een menselijke, dus culturele, activiteit is. Dat bijvoorbeeld de wiskunde geworteld is in de Arabische cultuur, geeft aan dat wiskunde niet uitsluitend van de westerse cultuur is. En biografieën van vrouwelijke wiskundigen kunnen meisjes laten zien, dat wiskunde

niet uitsluitend van en voor mannen is. De derde categorie argumenten, de motivationele argumenten, gaan in op bijvoorbeeld het creëren van een afwisseling in de klas: met een historisch verhaal wordt de sleur van de sommen onderbroken. Een docent kan vervolgens, aan de hand van de arbeidsintensieve berekeningen van vroeger, de kracht van moderne methoden en schrijfwijzen laten zien.

Naast een overzicht van het *'waarom'* wordt in dit hoofdstuk ook een overzicht gegeven van het *'hoe'*: hoe kan de geschiedenis van de wiskunde een plaats krijgen in het wiskundeonderwijs? Uit de inventarisatie van artikelen blijkt dat er diverse methoden zijn, bijvoorbeeld door de toevoeging van een historische beschrijving van het tijdperk die een bepaalde stelling voortbracht. Een docent kan een originele oude wiskundige tekst gebruiken om leerlingen de wiskunde daaruit te laten ontdekken. Ook kan een docent oude instrumenten, zoals de Jakobsstaf voor een plaatsbepaling op zee, gebruiken in het meetkundeonderwijs. Centraal in deze beschrijving van het *'hoe'* blijkt dat de keuze vooral bij de docent ligt: deze kan een klassikaal historisch verhaal houden, maar hij/zij kan ook historische thema's gebruiken om leerlingen zelfstandig onderzoekjes te laten doen.

Dit hoofdstuk eindigt ermee, dat het *'hoe'* nog maar fragmentarisch is beantwoord. Vragen als "worden de leerlingen echt meer gemotiveerd voor wiskunde door het gebruik van historische thema's of ligt het aan het enthousiasme van de docent?", "wordt de wiskundige kennis echt verdiept en/of bestendig door het gebruik van historische thema's?" blijken nog nooit systematisch onderzocht, aldus Van Gulik.

Na bovenstaande literatuurstudie gaat het proefschrift weer over in het Nederlands en volgen twee narratieve hoofdstukken met geschiedenis van de wiskunde, gebaseerd op secundaire literatuur. Deze hoofdstukken geven achtergrondinformatie over de onderwerpen uit de experimenten. Hoofdstuk 3 behandelt de Nederlandse landmeter in de 17^e eeuw aan de hand van diens instrumenten en opleiding en krijgen we inzicht in de landmeter-leerboeken uit die tijd. Hoofdstuk 4 behandelt de geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde en laat zien hoe twee 19^e eeuwse meetkundigen, Bolyai en Lobačevskiï, ontdekten dat het 5^e postulaat uit de *Elementen* van Euclides (het zogenaamde parallellenpostulaat) ook ontkend kon worden, en dat deze ontkenning samen met de vier 'gewone' postulaten niet tot tegenstrijdigheden leidt. In dit hoofdstuk komt de worsteling van wiskundigen met de wiskundige materie duidelijk naar voren: wiskunde als menselijke activiteit.

Het grootste deel van het proefschrift beslaat vervolgens de beschrijving van twee onderwijsexperimenten, waarin wiskundeonderwijs wordt vervangen door 'geschiedenis van de wiskunde'-onderwijs. Voor het eerste experiment heeft Van Gulik een onderwijsontwerp van tien lessen gemaakt, dat zij als volgt beschrijft: *"De leerlingen worden mee terug genomen in de tijd en verplaatsen zich in het leven en werk van de Nederlandse landmeter uit de 17^e eeuw. Aan de hand van oorspronkelijke 17^e eeuwse wiskundige teksten en historische achtergrondinformatie moeten de leerlingen in historische contexten rekenen met gelijkvormige driehoeken"* (p. 89). Het materiaal is hoofdstukvervangend voor de standaardlessen over gelijkvormigheid in klas 2 of 3 van havo/vwo. Na de lessenserie volgt een praktische opdracht waarin leerlingen in groepjes zelfstandig meetwerk verrichten aan bijvoorbeeld de hoogte van de gymnastiekzaal of de breedte van een sloot.

Voor het tweede experiment heeft Van Gulik een onderwijsontwerp gemaakt, dat geschikt is als keuzeonderwerp in 5-vwo of 6-vwo binnen Wiskunde B12 (dus in de natuur-profielen) voor 15-40 studielastuur. Het ontwerp sluit aan op het domein 'bewijzen in de vlakke meetkunde'. Dit materiaal begint met een inleiding over de *Elementen* van Euclides en vervolgens worden de leerlingen meegenomen naar de niet-euclidische meetkunde. Ditmaal geen authentieke historische teksten omdat deze, volgens Van Gulik, te moeilijk zijn. Wel is er wederom een praktische opdracht ontworpen: de Poincaréschijf en de cirkel-limieten van de kunstenaar Escher, met het software-pakket *Cabri*.

Van Gulik heeft een grote hoeveelheid vraagstellingen bij beide experimenten, zoals:

- Door welke kenmerken van het onderwijsontwerp raken de leerlingen gemotiveerd (de integratie van geschiedenis in de opdrachten; de praktische opdracht; de andere werkvormen)?
- Door welke kenmerken in het onderwijsontwerp zien leerlingen het maatschappelijk belang van wiskunde (de historische toepassingen; het verplaatsen in het werk van een 17^e eeuwse landmeter, respectievelijk een 19^e eeuwse wiskundige; het zelf uitvoeren van de praktische opdracht)?
- Is er verschil tussen leerlingen (tussen jongens/meisjes; tussen leerlingen die wiskunde makkelijk of moeilijk vinden; tussen 2^e en 3^e klassers, respectievelijk 5^e en 6^e klassers)?

Bij het eerste experiment vraagt Van Gulik ook of er een verschil is "*tussen leerlingen die getallensommen en leerlingen die verhaaltjessommen leuker vinden*" (p. 92). Voor haar evaluatie gebruikt Van Gulik diverse leerling-vragenlijsten, een docenten-vragenlijst en geeft ze levendige observatieverslagen van schoolbezoeken. Met een T-toets meet ze de verschillen tussen de pre- en posttest en tussen de verschillende leerlingen.

Er zijn een aantal opvallende resultaten, vooral bij het eerste experiment. De volgende leerlingen werden door de interventie minder gemotiveerd voor wiskunde: de leerlingen die aangaven wiskunde makkelijk te vinden (304 van de 410) en de leerlingen die getallensommen leuker vinden (225 van de 415). De volgende leerlingen gingen door de interventie wiskunde een moeilijker vak vinden: de leerlingen die aangaven wiskunde makkelijk te vinden, de 2^e klassers en de leerlingen die getallensommen leuker vinden. Belangrijk breekpunt blijkt de Oudnederlandse taal te zijn: het maakt de wiskunde alleen maar ontoegankelijker. Ook heeft de interventie over de volle breedte van de doelgroep een negatief effect op het ervaren van het nut en belang van wiskunde: een 17^e eeuwse landmeter is blijkbaar geen herkenbare handelingspraktijk voor deze leeftijdsgroep. Maar er is ook positief nieuws, want de volgende leerlingen gingen door de interventie wiskunde minder moeilijk vinden: de leerlingen die wiskunde moeilijk vinden en de 3^e klas havo-leerlingen. En is er grote waardering voor de praktische opdracht: 75% van de leerlingen (n=586) vindt deze "leuk". Daarnaast beschrijft Van Gulik klassen met actief ontdekkende leerlingen en melden docenten een langere retentie van het geleerde.

Bij het tweede experiment blijken de aantallen leerlingen te klein voor het meten van significante verschillen. De enige geconstateerde significantie: 6v-leerlingen zijn positiever dan 5v-leerlingen over hoe het lespakket hen inzicht

geeft in het menselijk aspect van de wiskunde. Verder observeert Van Gulik weer enthousiaste leerlingen in de klas, hoewel er ook leerlingen zijn die de geschiedenis niet echt van belang vinden, of die het vele leeswerk als vervelend ervaren. Eén docent bevestigt het historisch-genetisch principe en meldt: *“Je ziet dat de leerlingen dezelfde sprongen maken als er in de geschiedenis gemaakt zijn. Dat vinden ze fascinerend. Het is hoog gegrepen, maar dat is wat deze leerlingen nodig hebben”* (p. 166).

Uit haar experimenten trekt Van Gulik vervolgens de conclusies dat het succes van het historische onderwijsontwerp afhankelijk is van een reeks factoren, zoals leeftijd, niveau, type leerlingen, type werkvorm, enz. Zij besluit met aanbevelingen aan docenten en leerplanontwerpers voor het gebruik van geschiedenis in het onderwijs, maar geeft - gek genoeg - geen advies voor vervolgonderzoek.

Wij, de beide recensenten, hebben dit onderzoek met plezier met elkaar bediscussieerd maar blijven met enkele onbegrepen punten zitten.

Ten eerste geeft Van Gulik nauwelijks een uitleg van de gehanteerde methoden. Zij heeft vragenlijsten gebruikt, maar geeft niet aan waarom ze hiervoor gekozen heeft en tot op welke hoogte de antwoorden van de leerlingen helpen bij het beantwoorden van haar onderzoeksvragen. Ook van de beschreven klassenobservaties maakt zij niet duidelijk hoe representatief deze zijn. Door de verschillen tussen de resultaten uit de kwalitatieve en kwantitatieve data lijkt het alsof Van Gulik haar data ‘selectief’ interpreteert, bijvoorbeeld als zij schrijft: *“Het geleerde beklijft langer omdat het tot de verbeelding spreekt”* (p.134). De empirische evidentie voor de langere retentie volgt echter alleen uit uitspraken van (enkele? vele?) docenten, en niet bijvoorbeeld uit een kennistoets die een jaar na dato werd afgenomen. Ook staat er: *“Dankzij het onderwijs volgens het onderwijsontwerp gaan de leerlingen de wiskunde zelf beter begrijpen”* (p. 191), maar dit is gebaseerd op een vraag aan de leerlingen om zichzelf te beoordelen. Bovendien is het lastig om woorden als ‘langer’ en ‘beter’ te interpreteren zonder een duidelijke vergelijking.

Ook bij de kwantitatieve data missen we een verheldering. Van de 1100 deelnemende leerlingen in het eerste experiment blijken er ongeveer 400 te zijn die meewerkten aan zowel de pre- en posttest, terwijl er bij alleen de posttest data zijn van ongeveer 600 leerlingen. Als enige reden van deze grote hoeveelheid *missing data* worden “organisatorische redenen” aangevoerd (p. 105) hetgeen afbreuk doet aan de representativiteit. Uit de Cronbach Alpha van de schalen uit de vragenlijst blijkt dat het instrument een hoge betrouwbaarheid heeft, maar we leren niets over de *construct validity* van bijvoorbeeld de scheiding tussen ‘leerlingen die getalsommen of verhaaltjes-sommen leuker vinden’ (zouden er ook leerlingen twijfelen bij deze scheiding?). Ook rechtvaardigt Van Gulik niet waarom ze een T-toets gebruikt voor het meten van verschillen. Als ze een (M)ANOVA had gebruikt, dan had ze bijvoorbeeld de overlap tussen categorieën leerlingen (bijvoorbeeld: meisjes, leerlingen die wiskunde moeilijk vinden en leerlingen die wiskunde niet leuk vinden) kunnen betrekken in haar analyse.

Naast vragen over de meetmethoden, hebben we vragen over het design van het lesmateriaal. De titel “meetkunde opnieuw uitgevonden” verwijst direct naar Hans Freudenthal’s term *reinvention*. Met deze term wordt het leerproces beschreven, waarin leerlingen onder begeleiding actief nieuwe (wiskundige) kennis ontdekken. Van Gulik bevestigt de link met Freudenthal in de inleiding

en vermeldt dat haar studie verwant is aan die van Van Amerom (2002), die ook *reinvention* in de titel zette. Maar anders dan Van Amerom laat zij het hier bij en daardoor is voor ons moeilijk te achterhalen op welke manier het reinvention principe in het lesmateriaal is verwerkt. Het hoofdstuk over het landmeter-experiment begint bijvoorbeeld met een beschrijving van het ontwerp, maar deze beschrijving is een schets van de achtereenvolgende activiteiten. Leerlingen lijken een definitie van gelijkvormigheid te krijgen waarmee ze moeten rekenen en vervolgens worden enkele op de geschiedenis gebaseerde methoden voor landmeting besproken. Wij, de recensenten, vroegen ons af of hier sprake is van ontdekken in de zin van Freudenthal. Voor dat principe zijn vele ontwerpheuristieken ontwikkeld, waarnaar geen referentie te vinden is en een rechtvaardiging voor de vorm en volgorde van de activiteiten ontbreekt. Wanneer zijn leerlingen zelf ontdekker en staan hun eigen ontdekkingen centraal? Hoe wordt de docent geacht om te gaan met de uitwerkingen van de leerlingen? Op welke manier ondersteunen deze activiteiten een beoogde begripsontwikkeling in de klassenpraktijk?

Zoals wij het ontwerp interpreteren, kan het in de klas ook leiden tot een proces waarbij leerlingen methoden van de professionele landmeter uit de 17^e eeuw herhalen, in de hoop dat ze daarmee de bijbehorende technieken verwerven en inzicht in die technieken ontdekken. Dat is echter een reproductief proces dat niet echt spoot met Freudenthal's reinvention. Kortom, Van Gulik had haar interpretatie van het heruitvinden van wiskundige kennis kunnen toelichten en hoe dit met haar ontwerp wordt ondersteund in een lespraktijk.

Voor het onderzoek zou een duidelijke relatie tussen uitgangspunten en het ontwerp bovendien helpen bij het interpreteren van de antwoorden van leerlingen op de vragenlijst. Nu is lastig om de antwoorden van de leerlingen te waarderen. Leerlingen geven bijvoorbeeld aan dat ze de wiskunde beter begrijpen. Maar begrijpen ze de wiskunde beter dankzij eenvoudiger vraagstellingen, dankzij de opbouw, dankzij de geschiedenis, dankzij de werkvorm?

Wij denken dat het nuttig is als de verhouding tussen historische contexten en realistische en/of authentieke contexten in toekomstig onderzoek besproken gaan worden. De Oudnederlandse teksten zijn duidelijk 'authentiek', evenals het ontdekkingsproces van Bolyai en Lobačevskiĭ. Ook zou een dialoog tussen onderzoekers naar het educatief gebruik van geschiedenis van de wiskunde en andere didactische onderzoekers kunnen gaan over de plaats van historische kennis bij het ontwerpen van wiskundeonderwijs. Van Gulik plaatst zich namelijk los van recente proefschriften in de wiskundendidactiek, zoals die van Bakker (2002) en Doorman (2004), waarin de geschiedenis van statistiek, respectievelijk analyse werd bestudeerd om te kijken of het authentieke leertraject van de oorspronkelijke ontdekkers kan helpen bij het ontwerpen van onderwijs. In hun onderzoek is de geschiedenis gebruikt om aanwijzingen te vinden voor een mogelijke begripsontwikkeling van leerlingen en niet direct voor het zoeken naar bruikbare contexten die deze ontwikkeling kunnen ondersteunen. Deze vraag naar een bespreking van de rol van historisch onderzoek voor het ontwerpen van wiskundeonderwijs gaat natuurlijk verder dan de primaire doelstellingen van Van Gulik, maar wellicht dat in toekomstig onderzoek hier aandacht aan kan worden besteed.

We besluiten deze bespreking met het uitspreken van onze waardering voor het werk van Van Gulik. Voor beide experimenten heeft zij materiaal van een uitzonderlijke klasse geproduceerd. Het onderbouw-materiaal werd bin-

nen één schooljaar uitgetest in 46 klassen met 1100 leerlingen aan 16 scholen. Het bovenbouw-materiaal werd aan 8 scholen uitgetest en is inmiddels als Zebra-boekje verschenen (Van Gulik, 2005b). Het succes van het materiaal zal ook mede te danken zijn aan de aansprekende praktische opdrachten en het uitgebreide docentenpakket met een studiewijzer, historische achtergrondinformatie, uitwerkingen, beoordelingscriteria en de vrije beschikbaarheid van al het materiaal via Van Guliks website (<http://members.home.nl/gulikgulikers/WiskundePagina.htm>).

Het proefschrift van Van Gulik is toegankelijk geschreven en het kan een aanzet geven voor een discussie tussen historici, docenten, onderwijsontwerpers en onderzoekers, opdat alle partijen van elkaar leren en we beter in staat zijn om te werken aan inspirerend en motiverend wiskundeonderwijs voor alle leerlingen.

Gulik-Gulik, I. van (2005a). *Meetkunde opnieuw uitgevonden; een studie naar de waarde en toepassing van de geschiedenis van de meetkunde in het wiskundeonderwijs*. Proefschrift Rijksuniversiteit Groningen.

Referenties

- Amerom, B.A. van (2002). *Reinvention of early algebra; developmental research on the transition from arithmetic to algebra*. Proefschrift. Utrecht: CD-β Press.
- Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education; On symbolizing and computer minitools*. Utrecht: CD-β Press.
- Doorman, L.M. (2005). *Modelling motion: from trace graphs to instantaneous change*. Utrecht: CD-β Press.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
- Gulik-Gulik, I. van (2005b). *Geschiedenis van de niet-euclidische meetkunde*. Zebra-reeks. Utrecht: Epsilon Uitgaven.