

Katern 0

Denken over wiskunde leren en onderwijzen

Anne van Streun

Inhoudsopgave	pagina
Leeswijzer bij dit katern	2 - 4
1. Oriëntatie	5 - 9
2. Wiskundige bekwaamheden	
2.1 Wiskundigen over wiskunde	10 - 12
2.2 Van wiskunde naar doelen van wiskundeonderwijs	12 - 16
2.3 Denkmethoden: Heit en Kees	17 - 20
2.4 Een indeling van doelen van wiskundeonderwijs	20 – 26
2.5 Doelen en doelgroepen	26 - 29
2.5 Samenvatting	30
3. Probleemstelling	31
4. Een cognitief schema: Exponentiële Groei	32 - 36
5. Wat we weten over leren van wiskunde	
5.1 Een rijk schema	37
5.2 Assimileren en accomoderen	37 - 39
5.3 Centrale concepten	39 - 42
5.4 Algemene denkmethoden	42 - 44
5.5 Transfer	45 - 47
5.6 Overzicht en operationalisering van kennis	48 - 50
5.7 Routines	50 - 52
5.8 Samenvatting	52 – 55
6. Wat we weten over onderwijzen van wiskunde	
6.1 Instructiestrategieën	56 – 60
6.2 Selectie van doelen en didactisch handelen	60 – 65
6.3 Je eigen onderwijs ontwerpen: Voor wie? Wat? Hoe?	66 - 69
Literatuurverwijzing	70 - 76

Leeswijzer bij dit katern

Functie katern 0

De functie van dit katern verschilt van die van de andere katernen. De andere katernen zijn opgebouwd rond een bepaald wiskundig thema, zoals vergelijkingen of modelleren, waarbij voor dat thema relevante didactische theorieën worden toegepast op het leren en onderwijzen van dat onderwerp. Voor een bredere bespreking van die achterliggende theorieën wordt verwezen naar dit katern 0, dat dus een naslagfunctie heeft. Daarnaast kun je dit katern ook bestuderen als een op zichzelf staande eenheid, waarin je een overzicht vindt van theorieën die wij relevant achten voor het leren en onderwijzen van wiskunde.

Voorbeelden

Voor de noodzakelijke koppeling van die theorieën aan het ontwerpen en uitvoeren van betekenisrijk wiskundeonderwijs zijn hier veel voorbeelden opgenomen die de theorie toegankelijk moeten maken en de lezer moeten helpen de eigen kennis en ervaring te relateren aan de besproken concepten. Die overweging leidt tot het eerste leesadvies:

Opdracht. Voorbeeld*.*

Dit sterretje * bij een voorbeeld geeft aan dat je er goed aan doet om eerst zelf dat probleem aan te pakken, voordat je verder leest.

Ontwerp vragen

Zo hier en daar in de tekst kom je ontwerp vragen tegen waar we bij het ontwerpen van wiskundeonderwijs graag een antwoord op willen geven. Het zijn geen vragen waar je direct zelf mee aan de slag hoeft te gaan, maar meer wegwijzers naar de richting waarin het verhaal van dit katern zich ontvouwt. Er zijn weinig vragen waarop een algemeen geldend antwoord is te geven, een antwoord dat geldt voor alle deelgebieden en leerdoelen van wiskundeonderwijs. Toch willen we in dit katern wel enkele algemene principes voor het leren en onderwijzen van wiskunde bespreken, die voor het concrete ontwerpen een richting kan aangeven. Een wegwijzer die helpt bij het zoeken naar een

optimaal ontwerp zonder de eigen creativiteit te blokkeren. Een kader dat ook een aantal bekende valkuilen signaleert en helpt deze te vermijden.

Theoretische fundering

Om de lopende tekst van het betoog niet te verstoren, verwijzen we voor een verdere onderbouwing van ingevoerde concepten, methoden, didactische strategieën naar de geannoteerde literatuur in de Noten, aangegeven door N^1 , N^2 , N^3 enzovoort. Een directe verwijzing naar geciteerde publicaties wordt weergegeven door Naam (Jaartal), dus Van Dormolen (1974).

Om welke wiskundige bekwaamheden gaat het?

Er zijn dikke boeken volgeschreven over wat wiskunde is, over wat de kenmerken zijn van wiskundig denken en over de bekwaamheden die je met wiskundeonderwijs wilt ontwikkelen. Net als bij andere schoolvakken is er vaak een discrepantie tussen hooggestemde doelen van wiskundigen en wiskundeleraren en de doelen die in de dagelijkse praktijk worden nagestreefd en getoetst. In hoofdstuk 2 proberen we enige orde aan te brengen in die waaier van opvattingen over wat wiskunde is en wat 'dientengevolge' de doelen zijn die in het wiskundeonderwijs worden nagestreefd. In alle hoofdstukken komt de vraag naar de doelen, die je met wiskundeonderwijs nastreeft terug.

Het schema van Exponentiële Groei

Aan de hand van het gebied van de *Exponentiële Groei* is in hoofdstuk 4 exemplarisch geïllustreerd wat een optimaal cognitief schema, opgeslagen in het lange termijn geheugen, zou kunnen zijn. En wat de keuze voor zo'n optimaal geheel aan kennis, inzicht en vaardigheden kan of moet betekenen voor de manier waarop dat gebied wordt onderwezen. Tegelijk legt dit voorbeeld een oriënteringsbasis voor de meer algemene bespreking van deze problematiek in het volgende hoofdstuk.

Wat we weten over leren van wiskunde

In hoofdstuk 5 gaat het vooral om de vraag hoe idealiter de te verwerven kennis en vaardigheden in het lange-termijn-geheugen is opgeslagen en hoe die kennis vervolgens op het goede moment tijdens het werken aan een probleem kan worden opgeroepen in het werkgeheugen. We gebruiken het werk van Richard Skemp (1978) om uit te leggen wat in de afgelopen decennia tot de harde kern is gaan behoren van de wetenschappelijke theorie over de menselijke informatieverwerking, dat wat wij weten over het leren en benutten van kennis.

Wat we weten over het onderwijzen van wiskunde

In hoofdstuk 6 beschrijven we verschillende onderwijsstrategieën om bepaalde doelen van het te ontwerpen wiskundeonderwijs te bereiken of na te streven. Die didactische theorieën zijn deels wetenschappelijk en empirisch onderbouwd en berusten deels op geordende praktijkervaring of rationele analyses van denk- en leerprocessen. We maken gebruik van het onderscheid tussen de verschillende leerdoelen of componenten van een wiskundige bekwaamheid uit hoofdstuk 2. Vervolgens beschrijven we enkele bekende instructiestrategieën en gaan na bij welke na te streven leerdoelen die passen. Tenslotte vatten we samen welke werkwijzen in de klas bijdragen aan het bereiken van de verschillende typen leerdoelen.

1. Oriëntatie

In de loop van de laatste honderd jaar zijn in de theorievorming op het gebied van het leren en onderwijzen van wiskunde veel verschillende invalshoeken gekozen, wat een veelkleurig palet aan didactische theorieën heeft opgeleverd. Over het algemeen zijn die niet onderling tegenstrijdig, maar belichten ze verschillende facetten van het leren en onderwijzen van wiskunde. In dit overzicht gaan we uit van de wetenschappelijke kennis over de architectuur van menselijke informatieverwerking, zoals die in de laatste dertig jaar algemeen wordt geaccepteerd. Van daaruit worden de genoemde verschillende didactische theorieën besproken.

We beginnen met een voorbeeld, namelijk een onderzoek uit de tachtiger jaren onder eerstejaars studenten wiskunde naar de manier waarop zij een probleem uit het eerstejaars onderwijs analyse probeerden op te lossen. Het gaat nu niet om het onderzoek zelf, maar om de analyse van de manier waarop de studenten in één op één hardop-denken sessies probeerden tot een oplossing te komen. Wij koppelen dat aan een schets van theorie die later in dit katern wordt uitgewerkt. (Zie Van Streun (1991) voor het onderzoeksverslag zelf.)

*Voorbeeld**

Er zijn twee rijen getallen gegeven.

Rij a met $a_n \leq a_{n+1}$ $n = 1, 2, 3, \dots$

Rij b met $b_n \geq b_{n+1}$ $n = 1, 2, 3, \dots$

Gegeven is dat $a_n \leq b_n$ $n = 1, 2, 3, \dots$

Bewijs dat de rijen a en b begrensd zijn.

Een logische analyse

Een logische analyse van de probleemsituatie leidt tot de volgende stappen:

- (1) Rij b is een niet-toenemende rij. (Het tweede gegeven.)
- (2) Term b_1 is een bovengrens van rij b . ($\dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$)
- (3) $a_n \leq b_n$ (Het derde gegeven.)
- (4) Uit (2) en (3) volgt resultaat **R₁**: b_1 is een bovengrens van rij a .
- (5) Rij a is een niet-afnemende rij. (Het eerste gegeven.)

- (6) Term a_1 is een ondergrens van rij a . $(a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \dots)$
- (7) Uit (3) en (6) volgt resultaat **R₂**: a_1 is een ondergrens van rij b .
- (8) Uit (2) en (7) volgt resultaat **R₃**: rij b wordt begrensd door a_1 en b_1 .
- (9) Uit (4) en (6) volgt resultaat **R₄**: rij a wordt begrensd door a_1 en b_1 .

Het resultaat kan worden samengevat in **R₅**: $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$

Een psychologische analyse

Een logische analyse van de oplossing van een probleem met alle uitgeschreven stappen maakt de leraar wel duidelijk wat de structuur van het probleem is, maar zegt weinig over de moeilijkheden die leerlingen ervaren bij het zoeken naar een antwoord. Als je zelf, conform het leesadvies, het probleem in een flits hebt opgelost ben je het wellicht eens met deze student: “ Een kind kan toch onmiddellijk zien dat die rijen begrensd zijn!” Hij zei dat wel nadat hij er meer dan een half uur tevergeefs aan had gewerkt...

We horen dat onze leerlingen ook vaak zeggen: “Ik zie het niet.” “Ik zie niet wat ik moet doen.” Voor een goed begrip van wat hier speelt, voeren we het concept “*mentale voorstelling*” van een probleem of een situatie in. (Zie N¹.) Een mentale voorstelling is het geheel aan beelden, begrippen, methoden, kenmerken van de gegeven situatie, die op dat bepaalde moment voor de oplosser actueel beschikbaar is. Actueel beschikbaar betekent dat het voor de oplosser in het *werkgeheugen* paraat is. De twee hoofdcomponenten van de architectuur van menselijke informatieverwerking zijn het *werkgeheugen* (ook wel korte-termijn-geheugen genoemd) en het *lange-termijn-geheugen*. Onderzoek heeft de kenmerken van beide typen geheugen geïdentificeerd en de manier waarop zij onderling informatie uitwisselen. Het werkgeheugen wordt gebruikt om onmiddellijk informatie van de buitenwereld te *bewerken* en te *verwerken*, terwijl het werkgeheugen input uit het lange-termijn-geheugen kan ontvangen. Het is beperkt van omvang en kan maximaal 7 chunks (eenheden) omvatten. (Zie N².) Het *begrijpen* van een probleemsituatie beschrijven we als het vormen van een *adequate* mentale voorstelling, waarbij de oplosser alle relevante componenten van het probleem kan koppelen aan de relevante kennis uit het lange-termijn-geheugen waar de oplosser over beschikt. In het voorbeeld van deze twee rijen kun je begrijpen opvatten als het voor je 'zien' van de onderlinge ligging van die rijen, maar je kunt ook direct naar a_1 en b_1 gaan.

Koppeling tussen WG en LTG

A stelt de gegeven situatie voor, zoals die in het werkgeheugen wordt waargenomen. Je hebt de gegevens en het gevraagde gelezen, je vormt je een 'primitieve' voorstelling van de situatie. Je moet er iets mee, je vraagt je af of je er iets over weet. Je werkgeheugen neemt de waargenomen kenmerken van A op. En het probeert een verbinding te leggen met je lange-termijn-geheugen. Wat weten we al?

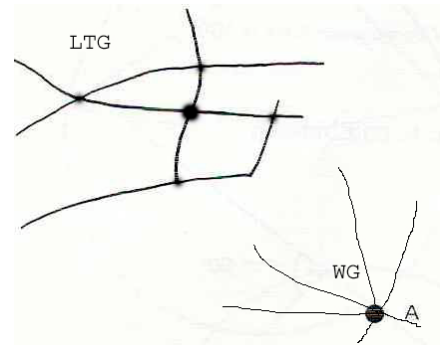


Fig. 1 Koppelen van WG aan LTG

In het genoemde onderzoek zijn die eerstejaars wiskundestudenten op het moment van het onderzoek al weken bezig met de studie van rijen en hebben op de werkcolleges moeilijke stellingen over infimum en supremum moeten toepassen. Allemaal in algemene formele taal en abstract in een algemene structuur. Er is al veel kennis opgeslagen in het LTG. Van de zestien eerstejaars slagen er vijf evenwel niet in om ook maar iets relevant op te schrijven over deze probleemsituatie. Ze rommelen met indices, proberen indirecte bewijzen, werken hard met supremum en infimum, enzovoort.

Koppelen aan al verworven kennis uit het LTG lukt alleen als die kennis in het lange-termijn-geheugen redelijk geordend is in een samenhangend *cognitief schema* met goed bereikbare aanknopingspunten (Zie N⁴.) Onderzoek naar het verschil in de organisatie van kennis in het lange-termijn-geheugen tussen experts en beginners op een bepaald vakgebied laat zien dat de kennis van experts zo is georganiseerd dat die oproepbaar en toepasbaar is. Kenmerkend is dat hun kennis is georganiseerd in onderling *samenhangende schema's* en efficiënt *gekoppeld* is aan *typen* situaties waarin die kennis kan worden benut.

In het lange-termijn-geheugen van de studenten uit dit onderzoek bleek het schema van rijen fragmentarisch, niet geordend en vonden ze geen aanknopingspunten in hun LTG. Met als gevolg dat ze associatief brokjes kennis (supremum, infimum, ongerijmde) inzetten. 'We hebben iets gehad over...' Het verschil met veel van onze leerlingen in het voortgezet onderwijs is dat ze het niet opgaven, want dit moesten zij toch kunnen! (Veel zelfvertrouwen en een positieve houding.) Zo paste de eerder geciteerde student (Een kind kan het zien!) een half uur lang allerlei stellingen over rijen toe, totdat zijn mentale voorstelling door al die pogingen zover was ontwikkeld dat hij het 'zag'.

Voor het ontwerpen van onderwijs in een bepaald deelgebied roept deze analyse een tweetal ontwerp vragen op. Daar gaan we in de volgende hoofdstukken op in.

Ontwerp vragen:

1. *Hoe ontwerp je voor een bepaald deelgebied wiskundeonderwijs gericht op het ontwikkelen van betekenisrijke, samenhangende, schema's?*
2. *Hoe kun je bereiken dat die schema's gekoppeld zijn aan relevant geachte toepassingsgebieden?*

Stuck!!!

Bij iedere opgave, die zich voor *de oplosser* als een probleem voordoet, is er niet direct een link te leggen tussen die opgave en de kennis in het lange-termijn-geheugen. Dat is juist het kenmerk van een probleem. De oplosser heeft niet een routine paraat om de opgave op te lossen, te liquideren. Wat doe je als je vast zit, als je niet 'ziet' wat je moet doen? Als je de koppeling tussen werkgeheugen en lange-termijn-geheugen (nog) niet kunt leggen? Trial and error? Heuristieken, dat zijn zoekmethoden?

Student s_{15} komt in de eerste tien minuten niet verder dan R_1 .

De observator vraagt: Wat is het doel?

Dat formuleert s_{15} correct en daarbij maakt hij de volgende tekening:

a $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ b .

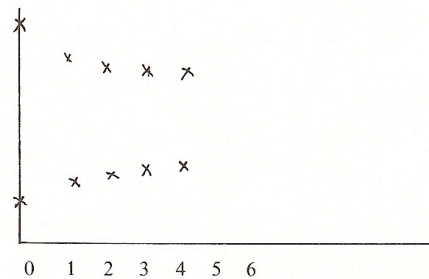
Dat helpt niet erg en de volgende tien minuten probeert hij een indirect bewijs te geven.

De observator suggereert om opnieuw te beginnen en een meer gedetailleerd plaatje te maken. Dat wordt: $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, b_{n+2}, b_{n+1}$, wat onmiddellijk leidt tot R_3 en R_4 .

De blokkade overwinnen

Van deze zestien eerstejaars maakte niemand een plaatje. Het moet algemeen, is de reactie op die hint van de observator. Op een colloquium produceert de staf van wiskundigen onmiddellijk de volgende twee plaatjes.

$\begin{array}{cccccccccccc} + & + & + & + & & + & + & + & + & + \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & & a_n & b_n & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \end{array}$



En er is veel verbazing dat geen enkele student op dat idee komt. “Zo doe je dat toch!”

Je kunt natuurlijk ook een andere heuristiek gebruiken: “Onderzoek een speciaal geval.”

*Voorbeeld**

Bedenk twee rijen getallen die voldoen aan de voorwaarden van de rijen a en b.

De ontwikkeling van de mentale voorstelling van een probleem wordt gaande gehouden door heuristische methoden uit te proberen.

Ontwerpvraag

3. *Hoe kunnen we leerlingen leren een probleem aan te pakken, als ze geen oplossingsweg zien?*

Probleemanalyse en argumenteren

Een andere aanpak van een probleem gaat via de analyse van de gegeven situatie (*situatieanalyse*), een (her)formulering van het doel (*doelanalyse*) en een argumentatie die van de gegeven situatie naar het doel leidt.

In dit onderzoek zijn er maar drie studenten die zich systematisch afvragen waar ze eigenlijk naar toe moeten (zoek een benedengrens en een bovengrens) en hoe zich dat tot de 'ligging' van die rijen verhoudt. Een jaar later doen ze het allemaal op die manier.

Ontwerpvraag

4. *Hoe onderwijzen we een systematische probleemanalyse met een sluitende argumentatie? Wat weet je al? Waar moet je naar toe?*

2. Wiskundige bekwaamheden

Zoals bijvoorbeeld in het jubileumboek van de NVvW (Goffree 200) valt te lezen, is er altijd veel discussie geweest over de doelen van wiskundeonderwijs. Aan één kant van het spectrum staan wiskundigen en gebruikers van wiskunde die van mening zijn dat het in het basisonderwijs en het voortgezet onderwijs uitsluitend gaat om de rekenkundige en wiskundige vaardigheden die een deel van die leerlingen in het vervolgonderwijs nodig heeft. Aan de andere kant zie je de opvatting dat rekenen en wiskunde in die schooltypen moet bijdragen aan de algemene vorming van alle leerlingen en daarom vooral gericht moet zijn op een brede ontwikkeling van wiskundige bekwaamheden. Dat werpt de vraag op wat er eigenlijk wordt bedoeld met die wiskundige bekwaamheden, tegenwoordig veelal wiskundige competentie genoemd. Over die vraag zijn in 2.1 voornamelijk wiskundigen aan het woord. In 2.2 wordt vervolgens de overgang gemaakt naar de doelen van wiskundeonderwijs met de vraag welke wiskundig bekwaamheden en welke wiskundige leerstof voor bepaalde groepen leerlingen haalbaar en relevant zijn om te onderwijzen.

2.1 Wiskundigen over de wiskunde

Keith Devlin (1997, 1998) heeft voor een breed publiek geprobeerd de essentie van de wiskunde uiteen te zetten, zowel in haar wordingsgeschiedenis als in haar huidige brede omvang. Hij beschrijft dat tot ongeveer 500 v. Chr. de wiskunde de studie van getallen was en voornamelijk bestond uit rekenrecepten. Van 500 tot 300 v. Chr. was de bloeitijd van de Griekse wiskunde waarin naast het getal ook de meetkundige vorm werd bestudeerd. De Grieken introduceerden de wetenschappelijke manier van denken waarin welomschreven uitspraken konden worden bewezen door formele redeneringen. (Zie ook het katern Meetkunde.) Halverwege de zeventiende eeuw kwam daar de studie van bewegingen en veranderingen bij, toen Newton en Leibniz de infinitesimaalrekening uitvonden. (Zie katern *Afgeleide in breder perspectief*.) Dat leidde tot een indrukwekkende reeks van toepassingen in de natuurkunde. De belangstelling voor de wiskunde zelf - het instrumentarium dat bij de studie van getal, vorm, beweging, verandering en ruimte wordt ingezet - heeft in de twintigste eeuw een explosie van wiskundige activiteiten teweeg gebracht. In het jaar 1900 kon het geheel van alle

wiskundige kennis nog in zo'n tachtig boeken worden beschreven. Tegenwoordig zouden 100.000 boekwerken nog niet volstaan. De meeste wiskundigen kunnen zich tegenwoordig goed vinden in een definitie van wiskunde als *de wetenschap van patronen*. Wat een wiskundige doet, is het onderzoeken van abstracte 'patronen', numeriek, van vorm, van beweging, van gedrag, visueel of mentaal, statisch of dynamisch, kwalitatief of kwantitatief, praktijkgericht of theoretisch.

Aan het slot van zijn boek waarin hij zes centrale thema's in de wiskunde heeft besproken, karakteriseert Kevlin wiskundige activiteit als volgt:

'Want ook al kent de wiskunde nóg zo veel verschillende facetten, en ook al zijn er nóg zo veel aanknopingspunten met de meest uiteenlopende disciplines, toch blijft de wiskunde uiteindelijk één geheel. Welk verschijnsel men ook wiskundig onderzoekt, de wiskundige aanpak blijft in grote trekken toch steeds hetzelfde. Altijd begint men met vereenvoudigen, waardoor de kernbegrippen geïdentificeerd en geïsoleerd worden. Daarna worden de kernbegrippen steeds dieper geanalyseerd; de relevante patronen worden ontdekt en onderzocht. Men probeert de zaak te axiomatiseren. Het abstractieniveau neemt toe. Stellingen worden geformuleerd en bewezen. Verbanden met andere delen van de wiskunde worden blootgelegd, of misschien eerst alleen maar vermoed. De theorie wordt gegeneraliseerd, waardoor er opnieuw overeenkomsten en verbanden ontdekt worden met andere gebieden in de wiskunde.'

(In N³ wordt een aantal boeken genoemd, die ingaan op de vraag wat wiskunde is en wat wiskundigen doen.)

Ook Nederlandse wiskundigen laten zich nu en dan uit over wat 'hun' wiskunde inhoudt en voor hen betekent. In het interessante boekje 'Opgelost' (Mols, 2006) komen enkelen aan het woord. Lex Schrijver (combinatoriek en algoritmiek), die onder andere voor de NS een optimaliseringsmethode voor het ontwerpen van een dienstregeling heeft ontwikkeld, zegt: 'Ik houd van wiskundige problemen die je gemakkelijk kunt formuleren, maar die je juist heel moeilijk kunt oplossen. En bovendien moeten ze voor mij dicht tegen de praktijk aanliggen.' Robbert Dijkgraaf (mathematisch fysicus) stelt dat de wiskunde een intuïtie levert voor hoe de natuur in elkaar zit. 'Voor mij is de wiskunde historisch gezien een goede leidraad gebleken bij de formulering van fysische theorieën. Het mag nooit het uitgangspunt zijn, maar het is wel een extra ingrediënt. Zo vinden we

symmetrieën en symmetriebrekingen terug in de vaste stof fysica, de astrofysica en de fysica van de elementaire deeltjes. Symmetrieën zijn zulke goede principes omdat het algemene structuren zijn. Het is juist de wiskunde die dat soort structuren beschrijft. Het meest fascinerende feit van de wereld waarin we leven vind ik dat we zo'n sterke hint hebben dat mathematische structuren de grondslag van de natuur vormen.' Marc Peletier (toegepast wiskundige) beschrijft hoe een probleem uit de industrie door de wiskundige in de eerste plaats wordt vereenvoudigd tot een verwant en relevant probleem. Henk Barendregt (grondslagen wiskunde en informatica) legt uit wat de aantrekkingskracht is van de wiskunde om de wiskunde, de zuivere wiskunde. 'Het zit in de ervaring dat je met iets bezig bent dat ons mensen overstijgt. Het is absoluut geldig. Getallen en meetkundige vormen zijn weliswaar door mensen bedacht, maar ze hebben toch een universele geldigheid die boven ons uitstijgt.'

2.2 De stap van wiskunde naar doelen van wiskundeonderwijs

De vertaling van de wiskundige denkmethoden, zoals wiskundigen die voor hun eigen werk karakteriseren, naar de praktijk van algemeen vormend onderwijs is niet triviaal. We onderscheiden een drietal invalshoeken:

- *Probleem oplossen*
- *Context-concept benadering*
- *Denkmethoden*

Probleem oplossen

De Hongaars-Amerikaanse wiskundige George Polya heeft sinds zijn eerste publicatie '*How to solve it*' (1945) grote invloed uitgeoefend op het denken over wiskundeonderwijs en zijn talloze artikelen en boeken bevatten tot op de dag van vandaag schitterende voorbeelden van wiskundige problemen die in de dagelijkse onderwijspraktijk inspirerend kunnen werken. Zijn opvattingen zijn als volgt samen te vatten. De kennis op een vakgebied bestaat uit feitelijke kennis en uit 'know-how', de wijze waarop de feitelijke kennis kan worden gebruikt. In de wiskunde is de know-how veel belangrijker dan de feitelijke kennis. Op elk onderwijsniveau zullen de leerlingen daarom, naast feitelijke kennis, een zekere know-how moeten verwerven. Die know-how is in de

wiskunde de vaardigheid in het oplossen van problemen die keuzemogelijkheden bevatten en originaliteit of creativiteit vereisen.

De eerste en verreweg de belangrijkste taak bij het onderwijzen van wiskunde is het bij leerlingen ontwikkelen van de bekwaamheid om *problemen methodisch aan te pakken*. Wiskundeonderwijs is bij uitstek geschikt om het leren denken met wenselijke *houdingen* en *denkgewoonten* na te streven. Het wiskundige denken omvat *denkmethoden* zoals het generaliseren van speciale gevallen, het inductief redeneren, het gebruiken van analogieën, het herkennen van wiskundige begrippen of methoden in reële situaties. Polya (1954) laat in een tweetal delen (*Mathematics and Plausible Reasoning I en II*) met heel veel voorbeelden zien wat die denkmethoden zijn en hoe je die kunt onderwijzen. Zijn (deels historische) voorbeelden zijn ontleend aan een breed scala van wiskundige onderwerpen, zoals combinatoriek, analyse, ruimtemeetkunde, getaltheorie, vlakke meetkunde, natuurkunde, statistiek, kansrekening, logica.

Volgens Polya is de belangrijkste afzonderlijke doelstelling van het wiskundeonderwijs leerlingen te leren om een reële situatie te vertalen in wiskundige termen. Zo kunnen leerlingen zelf ervaren dat wiskundige begrippen in verband gebracht kunnen worden met de werkelijkheid. Ze leren inzien dat ingenieurs en natuurwetenschappers wiskunde voornamelijk gebruiken voor het vertalen van reële situaties naar een wiskundig model. Zij behoeven die wiskundige probleemstelling niet op te lossen, daarvoor doen zij een beroep op wiskundigen. In het voortgezet onderwijs kunnen leerlingen de houding en de werkwijzen verwerven waar zij later in hun gebruik van wiskunde profijt van hebben. Wiskundeleraren moeten in hun opleiding op hun niveau door het uitvoeren van onderzoeksopdrachten zich die houding en werkwijzen eigen hebben gemaakt (Polya, 1963), om dat goed te kunnen onderwijzen.

Aldus in het kort Polya (1945, 1954, 1962, 1965, 1967). Drie doelen komen bij hem steeds weer terug:

- *Het onderwijs moet zich de ontwikkeling van de intellectuele vermogens van leerlingen tot doel stellen.*
- *Bij het vak wiskunde gaat het voornamelijk om de know-how.*
- *Wiskunde moet je leren gebruiken in reële situaties.*

Context-concept benadering

De zogenaamde context-concept benadering is actueel in de discussie over de vernieuwing van het onderwijs in de wiskunde en natuurwetenschappen, maar is niet nieuw. In Otte (1974) geeft de vermaarde Russische wiskundige A.N. Kolmogorov, die in de Sovjet-Unie veel invloed had op de inhoud van wiskundeonderwijs, zijn mening. Hij betoogt dat vernieuwing van het wiskundeonderwijs veel meer in georganiseerd overleg met het onderwijs in de natuurwetenschappen moet worden uitgevoerd. Hij benadrukt het belang van 'toepasbare' wiskunde:

'Das problem besteht darin schon in der Schule in überzeigender Weise zu zeigen dass es mit Hilfe der 'modernen Mathematik' möglich ist, *mathematische Modelle* von Situationen und realen Prozessen zu schaffen.'

Ook in Nederland pleitten enkelingen in die tijd voor 'toepasbare' wiskunde. Zo vroeg de wiskundige De Bruijn (1968) zich in Euclides af waarom het toen ingevoerde nieuwe leerplan zo weinig aandacht besteedde aan het toepassen van wiskunde.

'Hoewel wij juist in een tijdperk zijn aangekomen waarin de wiskunde grote maatschappelijke betekenis heeft gekregen en getreden is buiten de traditionele toepassingsgebieden, vinden wij dat niet weerspiegeld in de voorgestelde programma's.'

In Nederland en ver daarbuiten heeft de bekende wiskundige Hans Freudenthal tientallen jaren het denken over wiskundeonderwijs sterk beïnvloed. Aan het geheel van zijn onderwijsopvattingen is de term Realistic Mathematics Education (RME) verbonden. Het gaat hem niet zozeer om de leerstof, de wiskundige inhoud, die moet worden onderwezen maar om de *wiskundige activiteit* die de leerlingen als doel van wiskundeonderwijs zelf moeten leren. Een leerling moet de kans krijgen om wiskunde te ontwikkelen op dezelfde manier waarop de onderzoeker wiskunde creëert. Het gaat daarbij aan de ene kant om het *horizontaal mathematiseren*, het mathematiseren van reële situaties, het maken en toetsen van wiskundige modellen van de werkelijkheid. Aan de andere kant gaat het om het *verticaal mathematiseren*, het mathematiseren van de wiskunde zelf, het axiomatiseren (een wiskundig gebied met axiomatische methoden organiseren) en het formaliseren van een deel van de wiskunde (het analyseren en opbouwen van de wiskundetaal op dat gebied). Leerlingen moeten dit in het wiskundeonderwijs zelf ervaren, omdat ze juist dit moeten leren. Omdat de wiskunde haar oorsprong vindt in de realiteit en in het intuïtieve denken moet ook het wiskundeonderwijs daarvan uitgaan. Het gaat hierbij niet om de

overdracht van kant en klare wiskunde maar om het werken aan 'wiskunde in de maak'. Centraal in het wiskundeonderwijs moet de menselijke activiteit van het herontdekken van wiskunde staan. Aldus in het kort Freudenthal (1973, 1980, 1983) over het doel van wiskundeonderwijs.

Een moeilijkheid in een brede discussie over de relatie tussen concepten en contexten is dat de termen *concept* en *context* in biologie, natuurkunde, scheikunde en wiskunde verschillend worden gebruikt, zodat het lastig is om een gemeenschappelijke lijn te vinden. Beperken we ons tot het onderwijs in rekenen en wiskunde, dan is er een duidelijk negatieve reactie te constateren op de vertaling van Freudenthals ideeën in het lesmateriaal voor rekenen en wiskunde. Beperken we ons tot de rol van contexten in dat lesmateriaal, dan is er veel kritiek op 'flauwe en onrealistische' verhaaltjessommen. Een deel van de critici trekt de uiterste consequentie en kiest voor de weg terug, gewoon weer kaal en ouderwets rekenen. Wellicht is het verhelderend om onderscheid te maken tussen de verschillende didactische functies van contexten.

1. *Context als denkmodel*

Het gaat hier om *betekenisrijke contexten*, dat zijn situaties, problemen, vraagstellingen, uitspraken die voor leerlingen *betekenis* krijgen terwijl ze er mee aan het werk gaan. Goede contexten met deze functie worden gekenmerkt door een groot potentieel aan relaties met ervaringen van leerlingen *binnen* of *buiten* het wiskundeonderwijs. Ze omvatten *zowel* wiskundige als toegepaste probleemstellingen. Deze contexten, te kiezen uit de leefwereld, uit andere disciplines of uit de wiskunde, zijn bedoeld om het begrip van een concept of methode voor te bereiden en krijgen door de opgeroepen activiteiten betekenis voor leerlingen. De hier bedoelde contexten kunnen mits goed gekozen functioneren als *denkmodel of ankerpunt voor het geheugen*, aan de hand waarvan een cognitief schema wordt opgebouwd waarin *onderliggende concepten* centraal staan.

2. *Contexten om transfer te bevorderen*

In de opbouw van het netwerk van begrippen en vaardigheden zijn in de fase van het verkennen en oefenen eenvoudige verhaaltjessommen ('contexten' met niet erg realistische situaties) opgenomen om leerlingen te leren hun wiskundige kennis te gebruiken in situaties die niet in wiskundige termen zijn geformuleerd. Het gaat

bijvoorbeeld om het leren opstellen en interpreteren van vergelijkingen en formules bij situaties waarin grootheden een rol spelen. Dat helpt leerlingen bij het flexibel leren werken met het centrale concept *variabele* in plaats van de beperking tot algebraïsche vormen in x en y , zoals dat tot de jaren negentig van de vorige eeuw het geval was. Het cognitieve schema wordt rijker en heeft meer verbindingen met de buitenwereld.

3. Contexten om (toegepaste) problemen op te lossen

In de geest van Polya gaat het hier om wiskundige en niet-wiskundige contexten, problemen die een beroep doen op een flexibele beheersing van de wiskundige begrippen en vaardigheden en op een goede probleemaanpak. Goede contexten zijn authentieke contexten, dus echt en realistisch, ontleend aan een werkelijkheid. Dankzij het verworven *wiskundig inzicht* is de leerling in staat om in analoge of nieuwe situaties (toegepast of wiskundig) de *toepasbaarheid* van het concept te herkennen en te benutten.

4. Contexten om te leren modelleren

Zoals verschillende wiskundigen in 2.1 naar voren hebben gebracht speelt de wiskunde een belangrijke rol in het *modelleren* van allerlei situaties en probleemstellingen. In het katern *Modelleren* wordt dat proces vanaf authentieke contexten naar een wiskundig model en verder toegelicht. Ook statistici doorlopen in hun werk een analoog proces. Zeker in de bovenbouw van havo-vwo is het van belang dat leerlingen hiermee kennis maken, omdat het een kernactiviteit is van de gebruikers van wiskunde.

Conclusie

Het is wat oppervlakkig om algemene uitspraken te doen over het wel of niet opnemen van contexten in een leerlijn of onderwijsontwerp. In het licht van wat je wilt bereiken (de doelen) en van de relevante *centrale concepten* is het altijd een afweging van de *functie* van een context en een beoordeling of die context *kwaliteit* genoeg heeft om die functie te vervullen.

2.3 Denkmethoden: Heit en Kees

Voor we overgaan naar een classificatie van leerdoelen die in de praktijk van het wiskundeonderwijs nuttig kan zijn kijken we eerst naar een authentiek voorbeeld uit het leven van de auteur. In dit voorbeeld gaat de aandacht vooral uit naar denkmethoden (Van Streun 2001).

Heit en Kees

Ik neem u mee naar het Friese platteland tijdens de Tweede Wereldoorlog. De hoofdpersonen in dit authentieke verhaal zijn Heit (mijn Friese schoonvader) en Kees(zijn oudste zoon, mijn zwager). Niet lang nadat Heit op heel hoge leeftijd was overleden, legde Kees mij het volgende probleem voor. In mijn eigen woorden beschrijf ik nu de context.

Heit woonde in de Tweede Wereldoorlog met zijn vrouw en vijf kinderen in Leeuwarden. Voor de oorlog vertegenwoordigde hij in Friesland de firma Insulinde, die koffie, thee en cacao produceerde en direct leverde aan wederverkopers. In de oorlog handelde hij in van alles en nog wat en kon zo regelmatig op het platteland wat extra levensmiddelen voor zijn gezin aankopen. De zakken aardappelen waren het lastigst om langs de Duitse controles te smokkelen, dus dat ging 's nachts in het pikkedonker. Samen op de ene fiets die het gezin nog had, trokken Heit en Kees er dan op uit, soms tientallen kilometers ver, om de aangekochte zak aardappelen Leeuwarden binnen te smokkelen. Nu komt het probleem.

'Heit en Kees kunnen op de terugweg niet samen met de zak aardappelen op één fiets. Heit beslist daarom als volgt over de logistiek op de terugweg. Eerst fietst Heit een aantal kilometers met de zak aardappelen, terwijl Kees loopt. Dan zet Heit de fiets met de zak aardappelen langs de weg tegen een boom of hek en loopt zelf door. Kees ziet vervolgens de fiets staan en fietst met de zak aardappelen door totdat hij Heit heeft ingehaald. Dan neemt Heit de fiets over en fietst weer verder, enzovoort.'

Vraag*

De onopgeloste vraag waar Kees na vijftig jaar nog steeds mee zat was de volgende:

"Maakt het wat uit hoe lang die perioden van fietsen en wandelen zijn? Maakt het sowieso wat uit dat wij stukje bij beetje fietsten en liepen? Had het beter gekund?"

Een slecht gedefinieerd probleem

In nascholing over de basisvorming heb ik deze vraag in deze context regelmatig voorgelegd aan groepen leraren wiskunde en natuurwetenschappen. De eerste reactie was meestal dat het een slecht gedefinieerd of een slecht gestructureerd probleem was. Je weet geen fiets- of loopsnelheden en geen afstanden, zo iets kun je niet aan leerlingen voorleggen. De tweede reactie was dat je zonder nadenken zo kon zien wat het goede antwoord was. Die 'goede' antwoorden varieerden van "Ze kunnen beter gaan lopen" tot "Je kunt het niet weten" en "Het maakt niets uit". Leerlingen (of leraren) die getraind zijn

op het maken van eenvoudige routineopgaven komen niet verder. In de werkelijkheid heb je altijd te maken met slecht gedefinieerde probleemsituaties, waar je iets mee moet.

Wat heb je nodig om Kees een redelijk plausibel antwoord te geven?

Houding

Je moet er eerst aan willen beginnen. Die houding heeft te maken met plezier hebben in de activiteit, het vertrouwen dat je wel wat kunt, de gewekte interesse enzovoort. Al werkende moet het je eigen probleem worden, wil je er iets van of over leren.

Context

De *context* is voor leerlingen vaak de eerste blokkade om echt zelf aan de slag te gaan. Onze Marieke over het rekenen op de basisschool: ‘*Opa ik kan in het verhaaltje de som niet vinden.*’

Begrijp je de context? Zie je in gedachten Heit en Kees in het donker worstelen met die zak aardappelen? Zie je de fiets met de zak aardappelen staan terwijl Kees er naar toe en Heit er van weg loopt? In de buurt van Leeuwarden, met de patrouilles van de Landwacht op pad, is het allicht zaak om op een bepaald moment te stoppen met het wisselen van de fiets en samen de stad in te sluipen. Hoe krijgen we nu greep op het onderliggende wiskundige probleem? Hoe kunnen we onze mentale voorstelling van die probleemsituatie verder ontwikkelen?

Probleemverkenning

Direct lettervariabelen invoeren voor alle onbekenden? De snelheden per fiets en lopend van Heit en Kees (dat zijn al vier variabelen), de fietsafstanden per keer of de tijd per periode. En dan kijken of de totale tijd afhankelijk is van de lengte van die periode. Het kan zo, maar door al dat rekenen ontwikkelt onze mentale voorstelling van het probleem zich nauwelijks. Welke aanpak bevelen onze geciteerde auteurs aan? Oh ja, eerst maar eens vereenvoudigen.

We proberen het doorrekenen van eenvoudige gevallen. Neem aan dat Heit en Kees beiden fietsen met een snelheid van 12 km/u en beide lopen met een snelheid van 4 km/u. Neem aan dat ze aan één stuk een afstand van een kilometer fietsen. Even hoofdrekenen. Reken je mee? Na 5 minuten zet Heit de fiets neer en 10 minuten later neemt Kees de

fiets over. Na nog eens 5 minuten heeft Kees zijn kilometer op de fiets afgelegd en Heit heeft ondertussen een kwartier gelopen en zijn tweede kilometer afgelegd.

Monitoren, even uittreden en kijken naar je eigen aanpak

Ben je er nog? Want nu komen onze metacognitieve vaardigheden van pas. Even uittreden en naar je eigen aanpak kijken. *Monitoren* heet dat. Goede probleemoplossers doen dat, leerlingen en studenten moeten dat leren.

Waar ging ons probleem ook al weer over?

Oh ja, maakt het wat uit? In dit eenvoudige voorbeeld hebben ze een afstand van 2 km in 20 minuten afgelegd. Met het aangenomen looptempo van 4 km/u had dat een half uur gekost. En als we de periode bijvoorbeeld 4 km hadden gemaakt dan doen Heit en Kees dat gewoon in 40 minuten. De lengte van de periode doet er dus in dit voorbeeld niet toe. En afwisselend lopen en fietsen gaat echt vlugger.

Kunnen we al een algemene conclusie trekken? Generaliseren?

Onze mentale voorstelling van de probleemsituatie is intussen flink ontwikkeld en we hebben het gevoel dat we op grond van dit ene voorbeeld al ‘zien’ hoe alles in elkaar zit. Hopelijk ben je ook al zover.

Hoe nu verder? Een plan maken.

Je kunt er voor kiezen om nog meer voorbeelden door te rekenen om op die manier meer zekerheid te krijgen over je oplossing. Of je bedenkt dat wellicht een grafische voorstelling nu meer inzicht geeft dan meer van hetzelfde.

Terugblik of reflectie achteraf

Als je over je oplossing tevreden bent, dan is het zaak om nog even om te kijken. Hoe verliep het? Waar liep ik eerst op vast? Dat heet het ontwikkelen van je eigen metacognitieve kennis. Dit kan ik goed, daar moet ik om denken. *Reflecteren* op de toegepaste aanpak en de methoden, afwegen wanneer welke probleemaanpak veelbelovend is, het eigen repertoire aan methoden uitbreiden. Hoe heeft onze

voorstelling van het probleem zich ontwikkeld? Zijn er nog interessante variaties over het hoofd gezien?

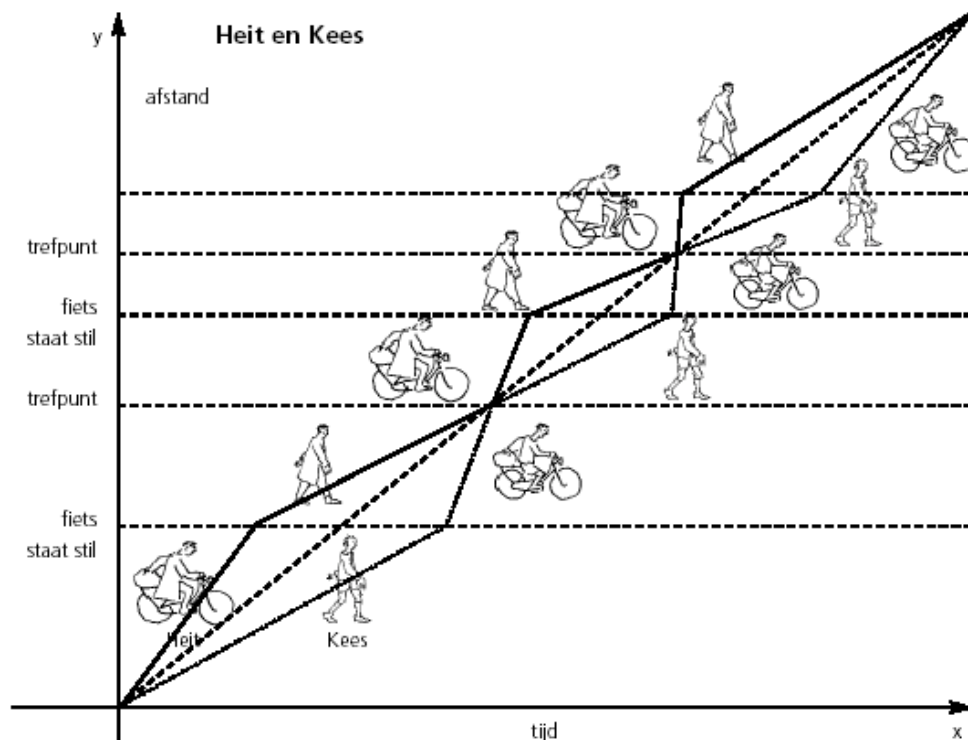


Fig. 2 Een grafische oplossing van het probleem van Heit en Kees.

2.4 Een indeling van doelen van wiskundeonderwijs

Overall ter wereld is wiskunde een kernvak in het algemeen vormend onderwijs en zal iedere leerling in de leeftijd van 12-18 jaar, de leeftijd waar deze katernen voornamelijk over gaan, een zekere mate van wiskundige bekwaamheid of in de huidige terminologie een zekere mate van *wiskundige competentie* moeten verwerven. Die wiskundige competentie bestaat uit verschillende componenten die onderling verweven zijn. Over de volgende definiëring van wiskundige competentie hebben vooraanstaande wiskundigen, onderwijspsychologen, onderwijskundigen en wiskundendidactici consensus bereikt (Kilpatrick 2001). Hier volgt eerst een citaat uit die publicatie 'Adding it up', met daarna een analoge indeling, die in recente Nederlandse publicaties en in de andere katernen wordt gebruikt.

Mathematical Proficiency

Recognizing that no term captures completely all aspects of expertise, competence, knowledge, and facility in mathematics, we have chosen *mathematical proficiency* to capture what we think it means for anyone to learn mathematics successfully. Mathematical proficiency, as we see it, has five strands:

- *conceptual understanding* comprehension of mathematical concepts, operations, and relations

- *procedural fluency*

skill in carrying out procedures flexibly, accurately, efficiently, and appropriately

- *strategic competence*

ability to formulate, represent, and solve mathematical problems

- *adaptive reasoning*

capacity for logical thought, reflection, explanation, and justification

- *productive disposition*

habitual inclination to see mathematics as sensible, useful, and worthwhile, coupled with a belief in diligence and one's own efficacy.

The most important observation we make about these five strands is that they are interwoven and interdependent. This observation has implications for how students acquire mathematical proficiency, how teachers develop that proficiency in their students, and how teachers are educated to achieve that goal. The integrated and balanced development of all five strands of mathematical proficiency (conceptual understanding, procedural fluency, strategic competence, adaptive reasoning, and productive disposition) should guide the teaching and learning of school mathematics. Instruction should not be based on extreme positions that students learn, on one hand, solely by internalizing what a teacher or book says or, on the other hand, solely by inventing mathematics on their own. For too long, students have been the victims of crosscurrents in mathematics instruction, as advocates of one learning goal or another have attempted to control the mathematics to be taught and tested.

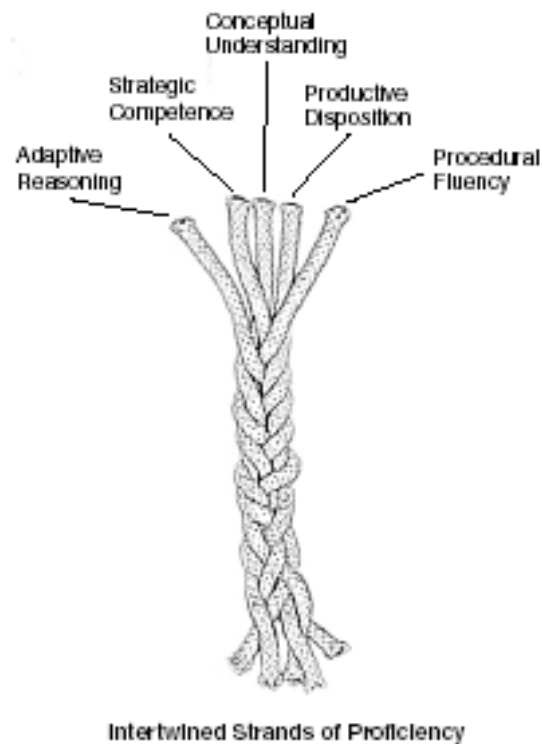


Fig. 3 Wiskundige competentie

Componenten van de wiskundige competentie

In recente Nederlandse publicaties wordt een vergelijkbaar onderscheid gemaakt in componenten van wiskundige bekwaamheid en doelen van wiskundeonderwijs. Zie bijvoorbeeld Van Streun (2001) en het Manifest van de NvvW (Bos, Kollenveld, Kuipers, van Streun 2004). Met enkele steekwoorden gekarakteriseerd bestaat de wiskundige competentie uit:

Weten dat: kennis van feiten en begrippen, reproduceren, technieken beheersen.

Weten hoe: probleemaanpak, toepassen, onderzoeksvaardigheden.

Weten waarom: principes, abstracties, rijke schema's, argumenteren, overzicht.

Weten over weten: reflecteren, monitoren, kennis over je eigen weten en aanpak.

Houding: wiskunde leren is leuk, interessant, groei in kennis geeft voldoening, ik kan het.

Weten dat

In deze component gaat het om de wiskundekennis, die je *paraat* moet hebben om daarmee problemen te kunnen oplossen. Het is uit psychologisch onderzoek bekend dat die parate kennis helpt om bij het oplossen van problemen het werkgeheugen te ontlasten, zodat er meer capaciteit beschikbaar blijft voor het echte probleem. In de wiskunde gaat het daarbij niet alleen om een kern aan feitelijke kennis (bijvoorbeeld de stelling van Pythagoras kennen of uitleggen wat a^4 betekent), maar ook om de technische basisvaardigheden als het snel en foutloos kunnen oplossen van een bepaald type vergelijking.

Natuurlijk moet die kern per schooltype verschillen en beperkt blijven, wil er nog ruimte overblijven voor de andere leerdoelen. In een serie artikelen met als titel *Parate kennis en algebra* in Euclides is een poging gedaan om die kern voor de algebra in de onderbouw havo-vwo te beschrijven (Van Streun 2007). In verschillende werkgroepen van de NVvW zijn toetsen opgesteld om te onderzoeken of leerlingen echt bepaalde basiskennis en basisvaardigheden paraat hebben. De ministeriële *Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen* (2008) legt in haar *Rekenrapport* (2008) als volgt een stevig accent bij dit aspect van de doelen van reken- en wiskundeonderwijs. Een citaat:

'Naar onze vaste overtuiging moet in het onderwijs veel meer werk worden gemaakt van het *consolideren*, het opvoeren van de beheersing tot het *paraat hebben*, over de noodzakelijke *parate kennis* van de bouwstenen waarvan in het vervolg van de opbouw van het inhoudelijke netwerk van feiten, begrippen en procedures wordt uitgegaan. Het gaat over *geautomatiseerde* rekenoperaties, over het *herkennen* van feiten en begrippen, over *routines*, te *gebruiken* in een ruime variatie aan situaties. In feite gaat het dus over het beheersingsniveau van de te verwerven basis aan kennis en vaardigheden. Op een bepaald moment in het leertraject van een leerling moet die basis paraat beschikbaar zijn, omdat anders het voortbouwen weinig zin heeft. Wij constateren dat op allerlei momenten in de leerlijnen rekenen en wiskunde *volstrekt onvoldoende* wordt duidelijk gemaakt, welke basis aan kennis en vaardigheden zo essentieel is dat het bijbehorende beheersingsniveau moet worden opgevoerd tot *paraat hebben*.'

Weten hoe

In deze component gaat het om de analyse van het probleem, het toepassen van heuristische methoden, een systematische probleemaanpak, het controleren, het ontwikkelen van een onderzoeksopzet, het stellen van een probleem, het formuleren van een onderzoeksvraag e.d. Zonder dit type kennis is de toepassing van feiten en begrippen in nieuwe situaties, waarbij geen sprake is van louter reproductie, niet mogelijk. Het gaat dus om het leren gebruiken van wiskundige kennis en vaardigheden om daarmee niet-standaard opgaven of problemen mee op te lossen. Daarbij moet worden bedacht dat veel typen opgaven uit de schoolboeken voor leerlingen niet-standaard zijn, omdat ze te weinig voorkomen om tot het beheersingsniveau van routine te kunnen rekenen. Dat geldt zeker ook voor bijna alle opgaven waarin leerlingen uit een context een wiskundige aanpak moeten destilleren en die toepassen. Hetzelfde geldt voor verschillende vormen van *gecijferdheid*, waarbij het altijd gaat over het kunnen gebruiken van basale kennis in een situatie uit de leefwereld of het beroep.

In het eerder geciteerde *Rekenrapport* (2008) staat over deze component:

'Het kunnen gebruiken van een basis aan kennis en vaardigheden van rekenen en wiskunde in verschillende situaties buiten dat vakgebied is een essentiële doelstelling van de algemene vorming en de belangrijkste component van de te verwerven competentie in rekenen en wiskunde voor alle vormen van onderwijs. Die noodzakelijke basis varieert in breedte, diepgang en abstractie voor vmbo, havo-vwo, type beroepsonderwijs en per

sector. De term ‘gebruiken’ is verwant met het begrip ‘*horizontaal mathematiseren*’. Het gaat erom dat een situatie van buiten de wiskunde in wiskundige termen wordt vertaald. Denk bijvoorbeeld aan het opstellen van een formule voor samengestelde rente of de remweg van een auto als functie van de snelheid.’

Weten waarom

Experts verschillen van leerlingen of studenten op een vakgebied door hun inzicht in fundamentele principes en abstracties en vooral in hun overzicht van de samenhang van begrippen, methoden en abstracties. De kennis van leerlingen of studenten blijkt vaak fragmentarisch te zijn opgeslagen, zonder onderlinge verbanden, waardoor die kennis ook slecht toegankelijk is voor gebruik bij het oplossen van problemen. Bij *Weten waarom* gaat het om het begrijpen en verklaren van concepten en methoden, het formaliseren, abstraheren en generaliseren, hetelijk geven van overzicht, het redeneren met kenmerken en stellingen.

In de genoemde publicatie *Adding it up* (Kilpatrick, 2001) werd over de relatie tussen begrijpen (*Weten waarom*) en vaardigheden (*Weten dat*) het volgende opgemerkt:

- 1. Ten onrechte wordt vaardigheid soms tegenover inzicht geplaatst. Begrijpen maakt het leren van vaardigheden gemakkelijker, minder gevoelig voor fouten en het beklijft beter. Aan de andere kant is een zeker beheersingsniveau van vaardigheden noodzakelijk om nieuwe wiskundige begrippen en methoden met begrip te leren en ontwikkelen.*
- 2. Zonder een goede routine stranden leerlingen bij het verdiepen van wiskundige ideeën of het oplossen van wiskundige problemen. De aandacht die zij dan nodig hebben om hun resultaten uit te werken in plaats van die paraat op te roepen gaat ten koste van de aandacht voor de aanpak van het probleem of het zoeken naar onderliggende relaties.*
- 3. Leerlingen die een vaardigheid zonder begrip leren hebben heel veel oefening nodig om de stappen niet te vergeten. Als leerlingen de operaties begrijpen, dan zijn ze beter in staat om ze te reconstrueren en in samenhang met andere operaties te zien.*
- 4. Als vaardigheden zonder begrip worden geleerd, dan blijven het geïsoleerde brokjes kennis. Nieuwe begrippen of vaardigheden kunnen dan niet voortbouwen op een bestaand netwerk aan kennis. Dat leidt ertoe dat leerlingen voor elke kleine variatie in opgaven weer nieuwe oplossingsprocedures moeten leren.*

In het genoemde *Rekenrapport* (2008) wordt opgemerkt dat leerlingen die goed kunnen abstraheren, formeel manipuleren, redeneren en generaliseren in het gangbare reken- en

wiskundeonderwijs in de basisschool en de onderbouw havo-vwo tekort komen. Het voorstel is om deze leerlingen meer ruimte te geven om zich te verdiepen:

‘Wij pleiten er daarom voor om in het onderwijsaanbod in de bovenbouw van het basisonderwijs en de onderbouw van havo-vwo deze groep leerlingen de kans te geven zich te *verdiepen*. De term ‘*verdiepen*’ is verwant met het begrip ‘*verticaal mathematiseren*’. Dan gaat het erom dat wiskundige verschijnselen met wiskundige middelen van hoger niveau worden geordend of georganiseerd. Denk bijvoorbeeld aan het bestuderen van de structuur van het getalsysteem of van de ligging van priemgetallen of van Egyptische breuken of van het voortzetten van meetkundige of getallen patronen, enzovoort.’

Weten over weten

Het gaat bij *Weten over weten* over de bekwaamheid om je eigen inzicht en denken te beoordelen, bijvoorbeeld tijdens het oplossen van een probleem. Dit type kennis wordt *metacognitie* genoemd. Zie voor een uitwerking de publicatie van Alan Schoenfeld (1992), die ook te vinden is op zijn website. Vaak uit die metacognitie zich in de vorm van een *interne dialoog*, praten met jezelf over je vorderingen, over de vraag waar je ook al weer mee bezig bent, het controleren en reflecteren, het zoeken van een probleemaanpak enzovoort. In dit verband wordt de term ‘*monitoren*’ gebruikt, even uit je eigen oplossingspoging stappen en daar van buitenaf naar kijken voordat je verder gaat. *Reflecteren* op de toegepaste aanpak en de methoden, afwegen wanneer welke probleemaanpak veelbelovend is, het eigen repertoire aan methoden uitbreiden. Goede denkers, probleemoplossers en experts onderscheiden zich daarin van zwakke oplossers van problemen.

Zelfstandig werkende leerlingen plegen bij een verkregen oplossing onmiddellijk door te stomen naar de volgende opgave zonder even terug te blikken. En zodoende leren ze dan ‘niet genoeg’ van het maken van een opgave. ‘Niet genoeg’ houdt in dat de beperkte leerstofdoelen uit de component *Weten dat* nog wel redelijk worden gehaald, maar dat de doelen uit de component *Weten waarom* en deels ook uit de component *Weten hoe* niet worden nagestreefd. In hoofdstuk 6 wordt daar verder op ingegaan. Het gaat dan over leeractiviteiten zoals het leerlingen leren overzichten te maken, samenhangen en onderliggende abstracties te zoeken, te expliciteren wat ze kennen en kunnen, in

toepassingen de onderliggende wiskundige kernen opsporen, kortom reflecteren op hun kennis. In dit proces van niveauverhoging van de wiskundige kennis van de leerlingen speelt de interactie met de docent een centrale rol. Laat de leerlingen vanaf de brugklas rapporteren over de zelf gemaakte fouten, de eigen manier van werken verbeteren, een eigen spiekboekje maken, de eigen kennis weergeven in opstelletjes enzovoort.

Houding

Voor het bereiken van een goede kwaliteit van onderwijs en een goede opbrengst is het essentieel dat leerlingen leren reflecteren op hun eigen kennis en aanpak en zelfvertrouwen ontwikkelen. Daarmee annex gaat het om het ontwikkelen van een positieve houding ten aanzien van het leren van rekenen en wiskunde; het is interessant, het geeft voldoening en ik kan het. Met recht kunnen deze streefdoelen zelfs voorwaardelijk worden genoemd voor het verwerven van de andere componenten. Of zoals de bekende psycholoog Adriaan de Groot (1980) het formuleerde:

‘Een school waarin de leraren er niet in slagen leerlingen te laten ervaren dat leren leuk en bevredigend kan zijn, zo ’n school deugt niet. Een belangrijker onderwijsdoelstelling dan ‘leren leuk gaan vinden’ zou ik niet weten. Lukt dat niet dan is eigenlijk alles verloren.’

2.5 Doelen en doelgroepen

Doelgroepen

Zoals het woord *doelgroepen* al impliceert moeten de doelen met de bijbehorende leerstof passen bij groepen leerlingen voor wie dat onderwijs is bestemd. Dat klinkt triviaal, maar tegen die triviale conditie is in ons Nederlandse wiskundeonderwijs heel vaak gezondigd. Hier volgen enkele sprekende voorbeelden.

Moderne wiskunde 1968

In 1968 werd het klassieke algebra- en meetkundeonderwijs van de hbs en de ulo voor een groot deel vervangen door de zogenaamde ‘*moderne wiskunde*’. Dat ging gepaard met een ongekend grootschalige herscholing van wiskundeleraren van die schooltypen. Wiskundeleraren werden meerdere keren een week lang uitgeroosterd in hun scholen om

van wiskundigen ‘moderne wiskunde’ te leren met onderwerpen als verzamelingenleer, logica, groepentheorie, topologie, stochastiek, maattheorie, projectieve meetkunde, lineaire algebra, enzovoort. De nieuwe programma’s voor de mavo en de onderbouw havo-vwo bevatten een overdaad aan formele notaties, logische symbolen en aanvankelijk ook een fors brok verzamelingenleer en veel theorie over relaties en functies met bijbehorende notaties. Wereldwijd was het hoofdargument dat dit de topics waren die in de wiskunde, dus in de wetenschappelijke discipline, de basis vormen van het universitair onderwijs en onderzoek in de wiskunde. De hoop was dat door de aandacht voor dit aspect van het wiskundeonderwijs, dus voor het *Weten waarom*, de aankomende studenten in het hoger onderwijs beter op hun studie zouden worden voorbereid. Het hoeft geen betoog dat ook toen maar een heel klein deel van de leerlingenpopulatie in een vervolgstudie deze wiskunde zouden tegenkomen. Leerlingen konden de zin van de onderwezen formele taal en inhouden niet inzien en hun houding ten aanzien van wiskunde werd sterk negatief beïnvloed. De grote groep werd inhoudelijk tekort gedaan omdat de voor hen nog wel relevante wiskunde niet gericht was op het gebruik in de technische vakken en andere gebieden, waar wiskunde op gebruikersniveau een rol speelde. De doelen in de categorie *Weten hoe*, met name het functioneel gebruiken, werden zelfs niet nagestreefd, tot frustratie van de docenten in vakken waar dat wel nuttig en nodig voor was geweest.

De wiskundevakken uit de bovenbouw van hbs en gymnasium werden vervangen door het nieuwe vak *wiskunde 1* van het vwo, waar een mooi analyseprogramma voor werd ontworpen. Een goed programma voor de echte B-leerlingen met een wiskundig correcte en precieze opbouw. Waarschijnlijk wel haalbaar voor dat type leerlingen en ook zinvol voor een vervolgstudie in de B-richting. Helaas was de doelgroep na de invoering van havo-vwo ineens een heel andere geworden. Ook nagenoeg alle studierichtingen in de sociale en medische studierichtingen eisten voor toelating het vak wiskunde 1. Met die gewijzigde doelgroep (landelijk een 70% van de gehele vwo-populatie) werd het voor de wiskundeleraren in die heterogene klassen onmogelijk om in de analyse van wiskunde 1 het bedoelde exacte niveau, *Weten waarom*, te halen. Voor het nieuwe onderdeel van wiskunde 1, de statistiek en kansrekening, gold dat niet en hier lag het accent wel degelijk bij de doelen in de categorie *Weten hoe*, terwijl de wiskundige inhoud ook

relevant was voor de gehele doelgroep. Statistiek was en is buiten de exacte en technische studies het meest gebruikte gebied uit de wiskunde.

Naast wiskunde 1 werd in het vwo het vak wiskunde 2 (o.a. wat analytische meetkunde en lineaire algebra) aangeboden en dat werd facultatief gekozen door de echte B-leerlingen. Voor een vervolgstudie in de B-richtingen was de inhoud zeker relevant, terwijl het van de leraar afhing of het aspect van het *Weten waarom* serieus aan de orde kwam.

De ontwikkelingen in de bovenbouw havo-vwo

In de zeventiger jaren werd het steeds duidelijker dat voor het vak wiskunde 1 de doelen en inhouden niet pasten bij de doelgroep, terwijl nog steeds 30% van de vwo-leerlingen (terecht) de keuze voor dat vak niet aandurfde. Met de invoering van het vak wiskunde A werd een poging ondernomen om voor havo en vwo een nieuw vak te ontwikkelen voor de grote doelgroep van het vwo die niet een B-studie ambieerde. Veel nadruk kwam te liggen op het *Weten hoe* met nieuwe en relevante inhouden. Een geslaagde poging om de doelen op de doelgroep af te stemmen, terwijl nu voor de gehele havo-vwo populatie terecht de opname van een wiskundevak in het vakkenpakket verplicht werd.

In de profielen van de nieuwe tweede fase havo-vwo was aanvankelijk wiskunde A het aangewezen wiskundevak voor CM-EM en wiskunde B voor NG-NT, een heldere samenhang tussen doelen en doelgroepen. De latere ingreep in de structuur van de tweede fase, waarbij wiskunde A ook een vak is geworden voor het NG-profiel, heeft de doelgroep voor dat vak helaas veel te heterogeen gemaakt, waardoor de koppeling tussen doelen en doelgroep problematisch is geworden.

De doelgroep 12-16 -jarigen

Tegelijk met de invoering van de basisvorming (1994) is voor de gehele brede populatie van 12-16 jarigen een volledig nieuwe oriëntatie van de inhouden en doelen van wiskundeonderwijs tot stand gekomen. Het zwaartepunt is komen te liggen bij de doelen in de categorieën *Weten hoe* en *Houding*. Het is onweerlegbaar dat voor de grote subgroep van leerlingen in het vmbo (ongeveer 60% van de totale populatie) zowel de wiskundige inhoud als de oriëntatie op deze twee categorieën doelen veel beter haalbaar

is en veel relevanter dan welk ouder wiskundeprogramma ook. Een grote winst wat betreft de afstemming tussen doelen en doelgroep, omdat voor deze leerlingen het *functioneel gebruiken* van wiskunde centraal moet staan. Zie ook het rapport van de commissie *Doorlopende leerlijnen Taal en Rekenen* (SLO 2008).

Na de invoering van de basisvorming was de diepgang van het programma en de schoolboeken voor de onderbouw havo-vwo onvoldoende, mede veroorzaakt door de politieke druk om een uniform onderwijsaanbod in vmbo en havo-vwo tot stand te brengen. De laatste jaren verschuift de aandacht in de schoolboeken naar meer verdiepende inhouden (bijvoorbeeld in de algebra) en naar doelen van andere categorieën dan die uit *Weten hoe*. De Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs heeft in 2008 voorstellen uitgewerkt om voor de onderbouw havo-vwo de doelen en leerinhouden beter af te stemmen op de doelgroep (cTWO, 2008).

In het rapport *Verkennen, gebruiken, verdiepen* van de programmacommissie onderbouw cTWO (2008) worden voorstellen gedaan om meer systematisch en doelgericht de categorieën doelen en inhouden op de doelgroep van de onderbouw havo en vwo af te stemmen. Een complicatie is dat voor de wiskundevakken in de bovenbouw eenzelfde fundament aan kennis en vaardigheden in de onderbouw wordt gelegd, wat enige differentiatie in leerjaar 3 wenselijk maakt. Met name in 3 havo is het lastig om voor iedereen eenzelfde programma vast te stellen, omdat wenselijke kennis en vaardigheden voor wiskunde B niet haalbaar zijn voor een groot deel van de 3 havo populatie. Het bekende probleem in 3 havo van de afstemming van doelen en inhouden op een heterogene doelgroep, waar alleen via een zekere differentiatie, splitsing van een heterogene populatie, iets aan kan worden gedaan.

2.6 Samenvatting hoofdstuk 2

1. Wiskundigen beschouwen wiskunde als de wetenschap van patronen, waar zij aan bijdragen door wiskundige denkmethoden toe te passen.
2. Die wiskundige denkmethoden worden getypeerd door werkwoorden als vereenvoudigen tot kernbegrippen of verwante problemen, patronen opsporen, abstraheren, generaliseren, structureren, axiomatiseren, bewijzen.
3. In wiskundeonderwijs kunnen leerlingen leren om problemen methodisch aan te pakken en zich wiskundige denkmethoden eigen te maken.
4. In wiskundeonderwijs kunnen leerlingen leren wiskunde toe te passen in reële situaties.
5. Contexten kunnen bijdragen aan begripsvorming en toepasbaarheid.
6. Wiskundige bekwaamheid bestaat uit een mix van de componenten *Weten dat*, *Weten hoe*, *Weten waarom*, *Weten over weten*, *Houding*.
7. Per doelgroep kunnen de accenten op verschillende componenten van een wiskundige bekwaamheid verschillen.
8. Het formuleren van leerdoelen in termen van leerstof is onvoldoende om gewenste wiskundige bekwaamheden te ontwikkelen.
9. Het ontwerpen van een onderwijstraject met inhouden, werkvormen, toetsing staat in functie van het willen bereiken van een combinatie van leerstofdoelen en componenten van een wiskundige bekwaamheid.
10. De doelen en leerinhouden moeten afgestemd zijn op de behoeften en mogelijkheden van de doelgroep.

In hoofdstuk 6 wordt de connectie gelegd tussen de combinatie van doelen uit punt 9 en de verschillende manieren waarop dat in het onderwijs kan worden nagestreefd.

3. Probleemstelling

Deze reeks katernen is bedoeld om de professionele wiskundeleraar (in opleiding) te ondersteunen bij het adequaat ontwerpen van een onderwijstraject. Waardoor is een adequaat onderwijsontwerp te karakteriseren? We noemen wat kenmerken, zonder uitputtend te zijn.

1. Een analyse van het specifieke domein van de wiskunde, waarbinnen dat onderwijstraject een deel van de doorlopende leerlijnen is.
2. Kennis van leerprocessen en mogelijke leerstofdoelen in dat specifieke domein.
3. Selectie en verantwoording van de combinatie van leerstofdoelen en componenten van de te ontwikkelen wiskundige bekwaamheid.
4. Beschrijving en verantwoording van het te ontwikkelen betekenisrijke en samenhangende schema, gekoppeld aan toepassingsgebieden en denkmethoden.
5. Het ontwerpen van een leerlijn die past bij de nagestreefde doelen en leerprocessen.
6. Het plannen van een onderwijsarrangement (lessen, werkvormen, leermiddelen, toetsing) passend bij de nagestreefde doelen en leerprocessen.
7. Verantwoording van de gemaakte keuzes in het onderwijsontwerp op basis van de beschikbare kennis als basis voor communicatie met collega's.

Exemplarisch wordt in de andere katernen het ontwerpen onderbouwd voor verschillende subdomeinen van de wiskunde of voor een speciaal probleemgebied als ICT of Toetsing. In dit katern gaat het voornamelijk om de onderbouwing van leerprocessen in combinatie met de doelen. Dat leidt in het laatste hoofdstuk tot een aantal instructiestrategieën met daaraan gekoppelde onderwijsarrangementen.

4. Een cognitief schema: Exponentiële Groei

Voordat we meer algemeen bespreken wat de kenmerken van een samenhangend cognitief schema zijn, bekijken we het voorbeeld van het deelgebied *Exponentiële Groei*. We beginnen met een tweetal opgaven ontleend aan een geruchtmakend onderzoek, waaruit bleek dat meer dan de helft van de instromende studenten van de pabo's slechter op papier of uit het hoofd kan rekenen dan de beste 20% van de leerlingen in groep 8. van de

*Voorbeeld**

Opgave 1. Bereken $0,2 \times 1,5$.

Opgave 2. Een auto van 22.000 euro wordt 20% goedkoper.

De nieuwe prijs wordt daarna nog eens met 10% verlaagd.

Wat is het percentage van de totale prijsverlaging?

Opgave 1 doet een beroep op beheersing van het type *paraat hebben*, de oplosser moet weten hoe twee eenvoudige getallen in decimale schrijfwijze (in de wandeling kommagetallen genoemd) kunnen worden vermenigvuldigd. Hoewel meer gecompliceerde vermenigvuldigingen van kommagetallen in het voortgezet onderwijs al snel met de rekenmachine worden uitgevoerd blijft deze basis aan parate kennis (de plaats van de komma in het antwoord) ook van belang om de orde van grootte van het te produceren antwoord te kunnen schatten. (Zo iets als 2 keer anderhalf is 3, dus 0,2 keer anderhalf is 0,3.) De instroom van de pabo in het 2006-onderzoek behaalde een 80% goed score op deze opgave 1.

Het goed kunnen maken van deze opgave zegt nog niet veel over de vraag of de oplosser beschikt over een relatienetwerk of alleen een gememoriseerde regel toepast. Door ook te vragen het antwoord met een duidelijke argumentatie toe te lichten kan deze opgave 1 worden gebruikt om een ander niveau te toetsen, beter passend in de component *Weten waarom*. Een kwaliteit die natuurlijk onmisbaar is voor leraren basisonderwijs.

Het zit kennelijk redelijk goed met de noodzakelijke voorwaarde dat deze studenten over de parate kennis moeten beschikken die zij gaan gebruiken of toepassen in een situatie. Dat gebruiken of toepassen in een situatie (functioneel gebruiken) is de eigenlijke

toetssteen of leerlingen beschikken over de noodzakelijke basis aan kennis, inzicht en vaardigheden om in de maatschappij of het beroep te kunnen functioneren. Zo'n situatie wordt in de tweede opgave gepresenteerd. De instroom van de pabo in het 2006-onderzoek behaalde een 20% goed score op deze opgave 2.

Wat is er allemaal nodig om deze opgave wel goed te beantwoorden? We gaan de situatie eerst maar eens vereenvoudigen.

Opgave 2A.

Een auto van 22.000 euro wordt 20% goedkoper. Wat kost die nu?

Leerlingen die uit hoofd of op papier snel 20% van een mooi geheel groot getal kunnen berekenen (*Weten dat*) zijn er nog niet want er is ook kennis nodig van de context en wel de situatieve kennis dat die berekende 20% van het bedrag van 22.000 moet worden afgetrokken. En ook nog het snel en foutloos kunnen uitvoeren (*Weten dat*) van de berekening $22.000 - 4.400 = 17.600$. Het cognitieve schema omvat inmiddels met deze vereenvoudigde opgave het rekenen met kommagetallen, het kunnen berekenen van een percentage en contextkennis over korting en de invloed op de nieuwe prijs.

Terug naar de oorspronkelijke opgave 2. Waar bestaat de moeilijkheid uit? We rekenen even door, nu 10% nemen van 17.600, dat er weer van aftrekken, dat geeft 15.840. Het vraagt al wat meer vaardigheid in het foutloos uitvoeren van een aftrekking met pen en papier.

Nu wordt het echt lastig. De vraag uit opgave 2 moet nu getransformeerd worden naar ons berekende antwoord. Wat wordt er nu bedoeld? Hoe kom ik van 15.840 naar het antwoord op de vraag naar het percentage van de totale prijsverlaging? De totale prijsverlaging is 6.160 euro, 1% van 22.000 is 220, dus $6.160 : 220 = 28$ of 28%. De uiteindelijke prijsverlaging is 28% en niet het alternatief 30% dat door het merendeel van de pabostudenten was gekozen.

Als leerlingen na enkele jaren wiskundeonderwijs in havo-vwo alleen via dit gereken op het correcte antwoord kunnen komen, dan is het cognitief schema dat deze opgave in hun geheugen oproept schraal. Er zijn alternatieven, waar je in het onderwijs naar toe kunt werken. Een voorwaarde is wel dat je je er als wiskundeleraar van bewust bent dat het gaat om het leerlingen helpen een *rijk cognitief* schema te construeren.

1. *Weten hoe*

De leerlingen kunnen in het wiskundeonderwijs hebben geleerd dat het bij niet-standaard opgaven vaak een goede zoekmethode (een heuristiek) is om de gegeven probleemsituatie gewoon te vereenvoudigen, bijvoorbeeld door een simpel getallenvoorbeeld te nemen. Die heuristieken zijn dan niet gebonden aan een bepaald type wiskundige opgaven en de leerling weet dat het vaak succesvolle zoekmethoden zijn om je denken op gang te helpen. In dit voorbeeld leidt dat zelfs meteen tot de oplossing. Neem 100 euro, 20% eraf geeft 80 euro, daar weer 10% af geeft 72 euro, dat is 72% van het beginbedrag, dus 28% korting.

2. *Weten waarom*

Je mag aan het einde van de onderbouw havo-vwo verwachten dat leerlingen begrepen en gememoriseerd dat het bij procentuele toename of afname (dus exponentiële groei) *altijd* gaat om het rekenen met een factor, een vermenigvuldigingsfactor, een groeifactor. Het beginbedrag wordt met $0,8 \times 0,9 = 0,72$ vermenigvuldigd, dus het kortingspercentage is 28%. Deze laatste aanpak, namelijk het zoeken van de vermenigvuldigingsfactor, is breed toepasbaar op allerlei situaties waarin exponentiële toename of afname een rol speelt. Dit is kenmerkend voor *Weten waarom*, voor het beschikken over een rijk cognitief schema met als conceptuele kern dat alle exponentiële of procentuele vormen van groei zich kenmerken door een vast begingetal en een factor per (tijds)eenheid.

Het cognitief schema

Het voorbeeld van de exponentiële functie (exponentiële groei of exponentieel verband) leent zich er goed voor om het begrip *cognitief schema* exemplarisch te verduidelijken. Voor een leerling aan het einde van de tweede klas havo-vwo is aan dit concept al een heel netwerk van contexten, representaties en kenmerken gekoppeld. Zo komen we bijvoorbeeld in deel 2B Moderne Wiskunde havo-vwo tegen:

- *Contexten met procententule groei aangepakt met de vermenigvuldigingsfactor, bij 25% toename hoort de factor 1,25.*
- *Het kenmerk van exponentiële groei wordt in woorden samengevat: de groeifactor bij tijdseenheid is steeds dezelfde.*
- *In tabellen die het verband tussen twee grootheden beschrijven wordt onderzocht of er sprake is van exponentiële groei.*

- *De exponentiële formule met beginhoeveelheid en groeifactor wordt opgesteld en geïnterpreteerd.*

In de plusparagraaf worden bredere contexten onderzocht, zoals bevolkingsgroei, groei van bacteriën, radioactief verval en wordt bijvoorbeeld een groeifactor per jaar omgerekend in een groeifactor per 5 jaar of per dag. De grafische representatie wordt aangepakt met het computerprogramma VU-Grafiek, inclusief het vergelijken van verschillende typen groei (Wie wint?) en het maken van exponentiële formules bij gegeven grafieken.

Leerlingen die de kennis uit deze paragrafen *echt beheersen* hebben in hun geheugen al een behoorlijk rijk schema van exponentiële groei in verschillende representaties (verbaal, grafisch, numeriek, algebraïsch) en kunnen met die kennis ook redeneren en vragen stellen en beantwoorden. Zo kunnen ze met behulp van VU-Grafiek uitzoeken wanneer twee verschillende groeiprocessen eenzelfde waarde voor een afhankelijke grootte bereiken, zonder dat ze beschikken over algebraïsch gereedschap om die waarde te berekenen. Ook kunnen ze uit een beschrijving, een grafiek of een tabel opmaken welk exponentieel groeiproces in die context aan de orde is en daar een formule bij maken (*algebraïseren*), zonder dat ze een dergelijk model uit een differentiaalvergelijking kunnen opstellen. De groeisnelheid kunnen ze wel per tijdseenheid, hoe klein ook gekozen, benaderen, maar niet exact berekenen met de afgeleide functie.

Ergens in de bovenbouw kun je verwachten dat het schema van de leerlingen zich zo heeft ontwikkeld dat zij wel de algebraïsche redenering of berekening kunnen geven. Wat in 2 havo een acceptabele redenering of berekening kan zijn, hoeft dat in 5 havo nog niet te zijn. Zo kan het op een examen vmbo acceptabel zijn dat leerlingen twee groeiprocessen, die door formules zijn vastgelegd, vergelijken door tabellen te maken. Leerlingen in havo A kunnen met de grafische rekenmachine in de hand een acceptabele redenering geven, terwijl van leerlingen uit vwo B wordt verwacht dat zij hun redenering baseren op monotone stijging, continuïteit of iets dergelijks.

Het is evident dat de opbouw van een dergelijk rijk schema een lange leerlijn vereist, waarvan de elementen moeten worden geconsolideerd en onderhouden. In elke fase van het leerproces moet samen met de leerlingen expliciet worden gewerkt aan *inzicht en overzicht* om de samenhang van de kennis en vaardigheden in het geheugen te versterken.

Bijvoorbeeld als volgt.

Van groeicontext via inzicht naar toepasbaarheid

Startcontexten:

Sparen rente op rente, afkoeling kopje thee, verdubbelingstijd aantal microben, stuiterend balletje, toenamesnelheid populatie evenredig met de omvang,

Representaties:

Verwoorden (beginhoeveelheid, groeifactor), kenmerken grafiek, kenmerken tabel, formules $y = c \cdot a^t$; $u(n) = a \cdot u(n-1)$; $y' = c \cdot y$; ...

Abstraheren:

Wat is gemeenschappelijk, hoe te herkennen, expliciteren, relaties leggen tussen representaties, ...

Verwerkingscontexten:

Radioactief verval, bevolkingsgroei, van een rij getallen zijn de opeenvolgende quotiënten constant, van een rij getallen hebben de toenames dezelfde groeifactor als de rij zelf, bekijk toename van toename van toename van ... nooit wordt het constant, wint het altijd in groei van iedere denkbare veelterm, Toren van Hanoi, groeisnelheid en groeifactor, gedrag van grafieken ten opzichte van verschillende bewegingen in het x-y-vlak, logaritmische spiraal....

Dit schema kan weer worden uitgebreid in de richting van logaritmen. Ervaringen met meer of minder geslaagde pogingen om de logaritme te formuleren in termen van een groeicontext laten in ieder geval zien dat er eerder sprake is van een nieuw schema dan van het opnemen in een bestaand schema. Hetzelfde geldt voor de uitbreiding in de richting van de analyse met de meer formele en analytische methoden. Het is de vraag of een goede beheersing van het boven geschetste schema veel bijdraagt aan het leren differentiëren en integreren van exponentiële of logaritmische functies. Wellicht moet die bestudering eerder opgenomen zijn in het brede cognitief schema van de analyse met in de verwerking de verbinding naar authentieke toegepaste situaties in groeicontexten.

5. Wat weten we over leren van wiskunde?

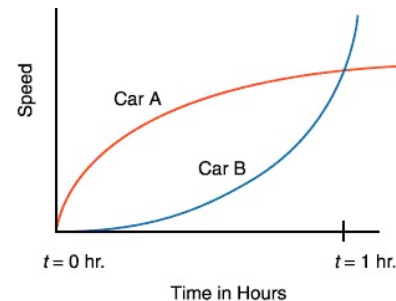
5.1 Een rijk schema

In het katern *Afgeleide in breder perspectief* wordt ingegaan op het cognitief schema, waar leerlingen over zouden moeten beschikken om wendbaar hun kennis over afgeleide functies en differentiëren te kunnen gebruiken. Dit voorbeeld doet een beroep op een rijk schema, waarin mathematische en fysische concepten zijn gekoppeld.

In onderzoeken waarin kennis van experts en nieuwelingen wordt vergeleken blijkt steeds weer dat experts een beter *overzicht* hebben over het geheel van concepten en aanpakken die voor een probleem relevant zijn (Bransford 2000). Experts in een vakgebied beschikken over meer concepten in het geheugen, meer relaties en kenmerken die elk concept definiëren, meer verbindingen tussen de verschillende concepten, efficiënte methodes om aan elkaar gerelateerde concepten terug te vinden en procedures om deze informatie te gebruiken bij het oplossen van problemen (Chi 1981). Ze zijn daardoor sneller in staat problemen in hun vakgebied of daaraan gerelateerde problemen te herkennen en op te lossen.

*Voorbeeld**

Welke vragen stel je?



The given graph represents velocity vs. time for two cars. Assume that the cars start from the same position and are traveling in the same direction.

Fig. 4 Snelheid-tijd grafieken

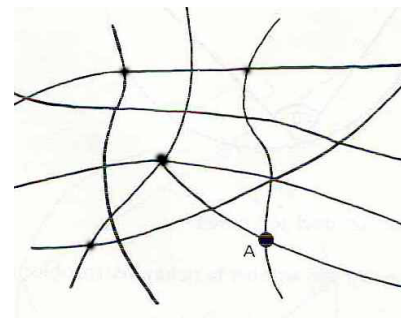


Fig. 5 Probleem A in rijk schema

5.2 Assimileren en accomoderen

Schema's bepalen niet alleen de opslag van kennis, maar ook het proces van het opnemen en het terugvinden van kennis. Bij het leren kan een leerling nieuwe kennis toevoegen aan een bestaand schema (*assimileren*). Soms moet een schema opnieuw gestructureerd worden (*accomoderen*).

Assimileren

Bij het oplossen van de vergelijking $2^x = 7$ kan een docent teruggrijpen op ‘omgekeerde bewerkingen’. De omgekeerde bewerking van ‘plus’ is ‘min’, van ‘keer’ is ‘gedeeld door’ van ‘kwadraat’ is ‘wortel’ en zo ook van ‘tot de macht x’ is ‘logaritme’. Een nieuw begrip wordt toegevoegd aan een bestaand schema.

Accomoderen

Bij de uitleg over het oplossen van lineaire vergelijkingen van de vorm $2x + 7 = 30$ en $5x + 4 = x + 16$ kan een docent het weegschaalmodel gebruiken. Op het moment dat ook vergelijkingen van de vorm $2x + 21 = -7$ en $4 - 2x = x + 13$ moeten worden opgelost voldoet het weegschaalmodel niet zonder meer. Accomodatie naar een meer formeel niveau (op beide leden dezelfde operatie toepassen) is noodzakelijk.

Een ander voorbeeld is het accomoderen van het schema van de sinus als verhouding naar de sinus als een functie met de eenheidscirkel als intermediar. Voor leerlingen zo lastig dat soms een alternatieve strategie wordt gevolgd, namelijk door een tweede schema rond de simunsfunctie op te bouwen en pas achteraf een verbinding met het eerste schema te leggen.

Een bekend voorbeeld, al aangeduid in hoofdstuk 4, is het accomoderen van het schema van procenten, gebaseerd op ‘een deel van’ naar dat van procentuele toename/afname en de ‘vermenigvuldigingsfactor’.

Verbrokkeling

Van Dormolen (1974) betoogt dat het opsplitsen van de leerstof in kleine hapklare brokken wel succes heeft op korte termijn, maar leidt tot het opslaan in het geheugen van onsamenvhangende schema's. Die verbrokkeling heeft mede tot gevolg dat leerlingen denken dat ze iets *begrijpen* (assimileren in een bestaand schema), terwijl het schema onvolledig is. Een bekend voorbeeld is het trainen op het oplossen van elk type eerstegraads of tweedegraads vergelijking,

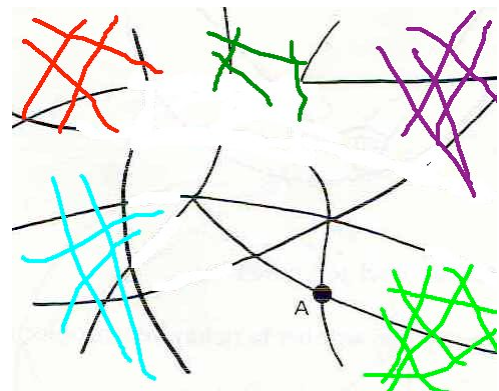


Fig.6 Een verbrokkeld schema

een gebruikelijke strategie in schoolboeken, maar zonder aandacht voor de gemeenschappelijke concepten en methoden leidt dat tot verbrokkelde schema's. Zie bijvoorbeeld het katern *Vergelijkingen vergelijken*.

Je zou kunnen zeggen dat *leren* een continu proces is van aanvullen en transformeren van aanwezige schema's en eventueel het opbouwen van nieuwe schema's. Hoewel de kennis van ieder mens op geheel eigen manier is gestructureerd is het in een leerproces van belang om na te gaan op welke manier een schema opgebouwd kan worden. De kwaliteit van de door leerlingen beheerste kennis en vaardigheden hangt sterk samen met de kwaliteit van de verworven cognitieve schema's. Die overweging leidt weer tot de al eerder geformuleerde eerste ontwerp vraag:

1. *Hoe ontwerp je voor een bepaald deelgebied wiskundeonderwijs gericht op het ontwikkelen van betekenisrijke, samenhangende, schema's?*

5.3 Centrale concepten

Wiskundendidactici als Skemp (1971) en Van Dormolen (1974) betogen dat *centrale concepten* het fundament moeten vormen van een schema, zodat op die manier de samenhang wordt gegarandeerd. Hetzelfde concept moet steeds weer terugkomen in de loop van meerdere schooljaren, zodat de leerlingen de overgang van informele naar meer formele kennis kunnen maken. In deze lijn noemt Van Dormolen het een voordeel van leren op basis van schema's dat het efficiënter is dan het leren van losstaande begrippen en methodieken. Het is beter om aan elkaar gerelateerde begrippen te onderwijzen vanuit een centraal thema dan om ze elk afzonderlijk te behandelen en pas later de synthese tot stand te brengen. Als nadeel van het leren op basis van schema's wordt genoemd dat het veel tijd kost. Men kan veel sneller iets uit het hoofd leren dan dat men dat leren voorbereidt door het opbouwen van een relevant schema.

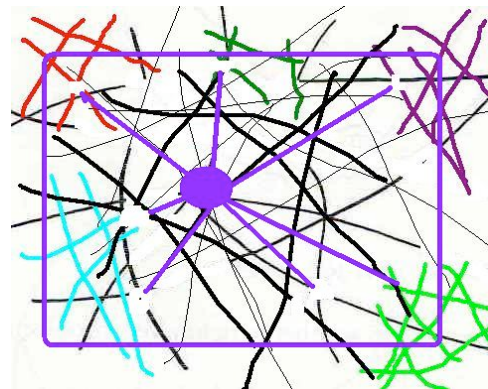


Fig. 7 Centraal verbindend concept

Skemp (1971) en Van Dormolen (1974) stellen dat alleen door het onderzoeken van een geschikte verzameling van voorbeelden en non-voorbeelden een nieuw concept of principe adequaat kan worden geleerd:

Begrippen van hogere orde dan die welke iemand heeft, kunnen niet op hem worden overgedragen door middel van een definitie, maar alleen door hem in staat te stellen een voldoende aantal toepasselijke voorbeelden te classificeren.

Omdat deze voorbeelden bijna onveranderlijk andere begrippen zijn, moeten wij er eerst voor zorgen dat de leerling deze begrippen heeft gevormd.

Op basis van dit principe heeft Van Dormolen een onderwijsstrategie uitgewerkt, die in hoofdstuk 6 wordt besproken. Voordat een onderwijsstrategie wordt ontworpen is het noodzakelijk om vast te stellen wat de centrale, steeds weer terugkerende concepten of methoden zijn van het te assimileren of accommoderen schema. Analyseer het deelgebied op *centrale concepten* en *denkmodellen*, die als anker voor het denken kunnen worden gebruikt. Centrale concepten, zoals het idee van een vergelijking, een variabele of een functie, raken snel ondergesneeuwd door het oefenen met technieken en algoritmische vaardigheden. Traditioneel wordt het deelgebied van het oplossen van vergelijkingen opgesplitst in hoofdstukjes, waarbij in elk hoofdstuk een type vergelijking en de bijbehorende techniek voor het oplossen wordt geoefend. Bij het oefenen wordt zelden de vraag gesteld wat de oplossing ook al weer betekent, controleren is vrijblijvend en de koppeling aan verbanden en aan de grafische betekenis wordt veelal weggelaten. Algemene concepten worden overvleugeld door de aandacht voor specifieke methoden, die elk afzonderlijk in het lange-termijn-geheugen worden opgeslagen. Door het ontbreken van de verbindende algemene methoden en concepten worden ook die technieken - niet gekoppeld aan de condities voor toepassing - eveneens slecht toegankelijk zodra het onderwijs in die techniek is afgerond.

Er moeten vragen beantwoord worden als: Welk schema wil je bij leerlingen opbouwen? Wat weten leerlingen al van dit onderwerp? Hoe past kennis uit andere schoolvakken binnen een schema? Centrale concepten moeten in het gekozen deelgebied worden gelokaliseerd, centraal staan in de opbouw van het cognitieve schema en worden

onderhouden in de fase van oefening en verwerking tot en met de toetsing. De fundamenteën van het geselecteerde centrale concept zijn veelal in voorgaande jaren gelegd en die moet eerst op hun beheersing worden gediagnosticeerd.

Pierre van Hiele heeft in tal van publicaties erop gewezen dat een begrip voor leerlingen vaak heel iets anders betekent dan voor de leraar (Van Hiele 1957, 1973, Fuys 1987). We volgen nu de karakterisering van Van Dormolen (1974). Een leerling kent bijvoorbeeld in het begin een ruit alleen als een figuur die er uit ziet als een wybertje. Een vierkant zal hij niet als een ruit herkennen. De leerling staat op het *nulde denkniveau*. Het *eerste denkniveau* stelt de leerling in staat de buitenwereld meetkundig te interpreteren en verschillende verbindingen te leggen in een relatienet (schema). Vervolgens komt de leerling op het *tweede denkniveau* doordat hij eigenschappen en kenmerken van een ruit leert kennen. Het schema *ruit* is niet langer een figuur, maar een netwerk bestaande uit de figuur en de elementen van die figuur (hoeken, zijden, diagonalen) en uit hun onderlinge relaties (diagonalen delen de hoeken middendoor, alle zijden zijn gelijk, enz.). Daarna wordt geleerd hoe de stellingen met elkaar samenhangen, hoe men uit een stelling een ander kan bewijzen, wat het verschil is tussen een stelling en zijn omgekeerd, enz. Het schema wordt steeds rijker van structuur, het relatienet steeds ingewikkelder. De leerling komt op het *derde denkniveau*. Er is ook nog een *vierde denkniveau*. Dat wordt bereikt als de leerling in staat is het meetkundig systeem te abstraheren tot een aantal deductieve systemen. Het deductieve systeem als zodanig is dan onderwerp van studie geworden. Op de website van het Freudenthal Instituut vatten Kaenders en Alberts de niveaus als volgt samen:

- *Grondniveau of nulniveau (visueel of intuïtief niveau)*: het kind bekijkt het object visueel of intuïtief. Bijvoorbeeld de herkenning van een gelijkbenige driehoek is vergelijkbaar met de herkenning van "een eik of een muis".
- *Eerste niveau (beschrijvend niveau)*: een object wordt herkend aan zijn eigenschappen. Bijvoorbeeld een gelijkbenige driehoek heeft twee gelijke zijden – of twee gelijke hoeken. Wanneer het kind deze eigenschappen herkent, dan twijfelt het er niet meer aan dat het daadwerkelijk te maken heeft met een

gelijkbenige driehoek is, zelfs indien het object onduidelijk is of indien er sprake is van gezichtsbedrog

- *Tweede niveau (informeel deductief niveau)*: hier zijn ook de eigenschappen niet meer onderwerp van beschouwing: nu gaat het om het verband tussen de eigenschappen: het gelijk zijn van twee zijden van een driehoek impliceert de gelijkheid van twee hoeken, en andersom.
- *Derde niveau (theoretisch deductief niveau)*: hier is het karakter van de verbanden tussen eigenschappen onderwerp van studie. Wat wordt er bedoeld met stellingen als: "De gelijkheid van twee zijden van een driehoek impliceert dat ook twee omkering van deze stelling wordt gesproken?"

In de Verenigde Staten en elders hebben de Van Hiele Levels voornamelijk in de didactiek van het onderwijs in de meetkunde een niet onbelangrijke rol gespeeld. Zie bijvoorbeeld Clemens (1992) en Teppo (1991). Ook in de scheikundedidactiek is de invloed van de Van Hiele denkniveaus zichtbaar.

5.4 Algemene denkmethoden

Landa (1991) betwijfelt of een correcte definitie en een gezamenlijke reflectie op die definitie en op voorbeelden en non-voorbeelden, de zogenaamde *empirische generalisatie*, wel tot een juist begrip leidt. In meer complexe begrippen is die strategie slecht uitvoerbaar wegens het grote aantal variabelen waar dan rekening mee moet worden gehouden. Hij bepleit een vorm van cognitief begeleid, ontdekkend leren, waarin de opdrachten goed gestructureerd leiden naar de *explicitering* van de *generalisatie* of *abstractie*. Landa benadrukt dat na de verkenning en definitie de mentale operatie van het *identificeren* van een begrip op basis van de kenmerken centraal moet staan. Vraag de leerlingen wat zij in hun hoofd zouden doen om op basis van de definitie uit te maken of een driehoek rechthoekig is of niet. Uiteindelijk verschijnt op het bord de bedoelde *denkmethode* als een voorbeeld voor meer van dit type verwerving van begrippen:

1. Het kenmerk van een rechthoekige driehoek is dat het een rechte hoek heeft.
2. Ga na of de voorliggende driehoek een rechte hoek heeft.
3. Trek een conclusie overeenkomstig de volgende regels:
 - a. Als een driehoek een rechte hoek heeft, is die driehoek rechthoekig.
 - b. Als een driehoek geen rechte hoek heeft, is die driehoek niet rechthoekig.

Landa is er een voorstander van om leerlingen expliciet *algemene denkmethoden* of wetenschappelijke methoden te onderwijzen, zodat zij over een krachtig gereedschap gaan beschikken voor een structurele analyse en vergelijking van kennis. Transfer van kennis en denkmethoden van de ene inhoud naar de andere zal, zowel binnen het specifieke deelgebied als tussen verschillende deelgebieden, gemakkelijker worden en sterk worden verbreed. In het wiskundeonderwijs van landen als China en Japan wordt veel meer werk gemaakt van die algemene denkmethoden dan bij ons gebruikelijk is.

Naast de algemene denkmethoden waar o.a. Landa zich mee bezig houdt en de algemene methoden voor het oplossen van problemen die eerder zijn besproken onderscheiden we nog de meer didactische methoden, die de samenhang in een schema of de koppeling tussen verschillende schema's kunnen versterken. Een bekend voorbeeld is de *verhoudingstabel*, die enerzijds een hulpmiddel is om een systematische probleemaanpak te bevorderen en anderzijds de verbinding kan vormen tussen allerlei situaties die met verhoudingen hebben te maken. Zoals km/uur, bacteriegroei, samengestelde rente, schaal, vergroten en verkleinen, prijs per..., dichtheid, mengverhoudingen. Het onderliggende concept van de *vermenigvuldigingsfactor* (de per-factor) wordt in schoolboeken zelden gebruikt om de samenhang tussen verschillende leerstofonderdelen te bevorderen.

Een ander voorbeeld is de vertaling van elk mogelijk probleem naar een *grafische representatie*, niet alleen als doel op zich maar ook als middel om de samenhang in een schema te versterken. Richard Mayer (N⁴) beschrijft hoe een multimediale uitleg van natuurwetenschappelijke verschijnselen kan bijdragen aan transfer in het oplossen van problemen. In zijn definitie is sprake van transfer als de student in staat is om het geleerde toe te passen in het oplossen van problemen, die verschillen van de eerder bestudeerde situaties. Interessant is zijn stelling dat constructivistisch leren plaats vindt als de leerling *betekenis* probeert te geven aan het gepresenteerde materiaal door een samenhangend en consistent mentaal schema te vormen. In zijn experimenten met uitleg door geschreven tekst, gesproken woorden, plaatjes en animaties blijken studenten beter in staat te zijn om de betekenis te begrijpen van een natuurwetenschappelijke of wiskundige uitleg als zij tegelijkertijd in hun werkgeheugen visuele representaties en

gesproken woord kunnen vasthouden en integreren. In een ander artikel benadrukt hij dat zijn resultaten consistent zijn met de theorie over de cognitieve belasting, namelijk dat het werkgeheugen slechts enkele elementen tegelijkertijd kan verwerken, maar dat visuele en verbale elementen afzonderlijk worden gecodeerd. Constructivistische leerprocessen zijn waarschijnlijker als de leerling visuele en verbale representaties tegelijkertijd met elkaar kan verbinden (Mayer 2001, 2008 en Anderson 1995, 2000). (Zie N⁴ voor een korte schets van de stand van zaken ten aanzien van visuele en verbale sporen in het geheugen.)

Voor een versterking van de samenhang binnen het schema van tweedegraads functies en vergelijkingen helpt het als in de loop van 3 havo-vwo alle leerlingen de *grafische* interpretatie van de vier typen *paraat hebben*. Dat is een goed startpunt voor de nog te onderwijzen algebraïsche herleidingen.

$y = 2x^2 - 12x + 10$ geeft direct het snijpunt met de y -as (0,10) en dalparabool. Schets.

$y = 2x(x - 6) + 10$ geeft direct de punten (0,10) en (6, 10) met de as $x = 3$ en top (3, -8). Schets.

$y = 2(x - 5)(x - 1)$ geeft direct de nulpunten (1,0) en (5,0) met de symmetrieas $x = 3$ en top (3, -8). Schets.

$y = 2(x - 3)^2 - 8$ geeft direct de top (3, 8). Schets.

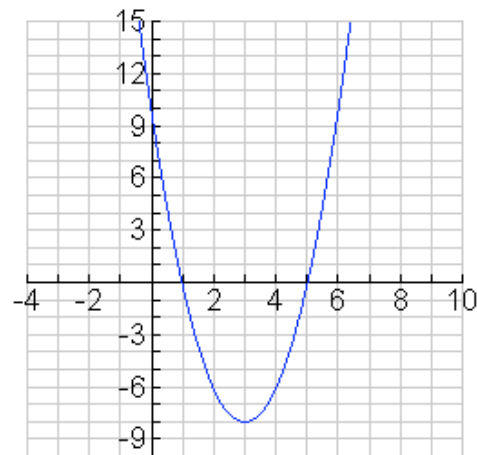


Fig. 8 Grafisch interpreteren

Voorbeeld*

Carlos begint om 8 uur 's morgens de berg Alpico op te wandelen en bereikt om 4 uur 's middags de bergweide onder de top. Daar blijft hij overnachten. De volgende morgen begint hij om 8 uur de afdaling en komt om 's middags 2 uur weer bij zijn vertrekpunt. Is er een punt op zijn route dat hij beide dagen op precies hetzelfde punt passeerde?

Verklaar je antwoord.

5.5 Transfer

Waarom moet wiskunde een basisvak in elk algemeen vormend curriculum zijn? Over welke inhoud hebben we het eigenlijk? In de geschiedenis van het onderwijs in rekenen en wiskunde zijn daar verschillende antwoorden op gegeven. In Nederland hebben we al lang geleden ervoor gekozen om een zwaar accent te leggen bij het functioneren van de wiskundige kennis en vaardigheden buiten het vakgebied. De schoonheid van het getalsysteem, de historische waarde van de meetkunde, de culturele waarde, het leren redeneren of denken, het bleek voor rekenen en wiskunde niet genoeg voor de bepaling van de inhoud. Het rekenen stond heel lang in functie van het cijferen, lange rijen berekeningen heel overzichtelijk en foutloos uitvoeren, want maatschappelijk was dat heel belangrijk.

Tegenwoordig ligt de nadruk veel meer bij het functioneel gebruiken van die kennis en routines in allerlei situaties. Die terechte keuze

voor het leggen van een stevige verbinding met de buitenwereld lijkt evenwel te leiden tot een voor leerlingen redelijk chaotisch beeld van wat er in wiskunde aan de orde is. De strakke structuur van de meeste wiskundige deelgebieden heeft de charme van de eenvoud en het overzicht, maar bleek in het verleden in de hoofden van de meeste leerlingen tot een afgesloten systeem te leiden,

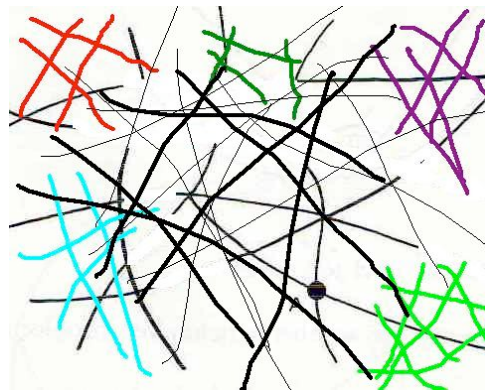


Fig. 9 Zwak gestructureerd schema

waardoor de transfer naar toegepaste situaties slecht verliep. Te verwachten, want in het cognitieve schema zijn die situaties niet inbegrepen. Op dit moment zien we een totaal door elkaar lopen van allerlei soorten opgaven, situaties, formele rekenregels, intuïtieve methoden enzovoort. We zitten in de onderwijspraktijk in het rekenonderwijs en het wiskundeonderwijs met schoolboeken en ander lesmateriaal waarin het zelfs voor experts lastig is om de kernen en doorlopende leerlijnen op te sporen. Laat staan voor de leerlingen. Dat vraagt om een bezinning op criteria voor het ontwerpen van onderwijs, waarin we de transfer vanuit de wiskunde naar alle gebieden waar die wiskunde willen optimaliseren.

Het onderzoek naar de transfer van kennis naar 'nieuwe' situaties heeft een lange traditie. Sinds het begin van de twintigste eeuw tot op de dag van vandaag hebben wetenschappers zich afgevraagd wat het begrip transfer inhoudt en wanneer dat optreedt. Een overzicht is te vinden in een themanummer van het International Journal of Educational Research met als titel “On the Road to Transfer: New Perspectives on an Enduring Issue in Educational Research and Practice” (De Corte 1999). In zijn voorwoord refereert Erik de Corte aan het standpunt dat het bevorderen van transfer van verworven kennis en vaardigheden het voornaamste doel van het onderwijs is en tegenwoordig ook de interesse van het bedrijfsleven heeft, waar veel geld wordt besteed aan de in-service training. Vervolgens verwijst hij naar de diverse tegenstrijdige theorieën over het voorkomen van transfer, variërende van principiële onmogelijkheid van transfer (alle kennis is situatiegebonden) via domeingebonden transfer met identieke producties naar de transfer van probleemoplossingsmethoden en algemene strategieën. In het genoemde themanummer beschrijft Simons een aantal paradoxen voor de leerling, die relevant lijken voor het ontwerpen van op transfer gericht onderwijs.

Paradoxen

1. Hoe kan de leerling *relevante kennis* uit zijn geheugen *selecteren* uit de schier oneindige hoeveelheid kennis (juist en onjuist) waar hij over beschikt?
2. Als een situatie door de leerling *al dan niet terecht* wordt *herkend*, dan verloopt het vervolg nagenoeg *automatisch*, zonder dat de leerling zich van eventuele misconcepties bewust is.
3. Wanneer moet de leerling zijn beschikbare kennis *benutten* en wanneer moet hij die *afschermen* om verwarring met nieuwe kennis in nieuwe situaties te voorkomen?
4. Het is moeilijk voor de leerling om zich op voorhand voor te bereiden op later gebruik van kennis in nog onbekende situaties. Het enige wat de leerling kan doen is te streven naar een werkelijk *begrijpen* (waardoor de kennis optimaal bereikbaar blijft) en naar het verwerven van kennis over de *condities* van de situaties waarin die kennis toepasbaar is.
5. In *nabije transfer* is er een sterke verwantschap tussen het geleerde en de toepassing, in *verre transfer* is die afstand veel groter. Voor de leerling is het de vraag of hij zich moet richten op *nabije transfer*, zich concentrerend op het oefenen met een beperkt aantal situaties, of op *verre transfer*, zoekend naar generalisaties en variaties in situaties.

6. De leerling staat voor de vraag of hij kan volstaan met de eenmaal verworven kennis en aanpak van het leren of dat hij moet leren op verschillende aspecten van transfer, zoals de transfer van domeinspecifieke kennis (begrippen, regels, algoritmen), heuristische probleemoplossingstrategieën, strategieën voor zelfregulatie en leerstrategieën.

Aansluitend beschrijft Simons het experimenteel onderzoek van Biemans et al (1995, 1996) waarin een instructiestrategie is ontwikkeld om aanwezige kennis te activeren en te evalueren op misconcepties. Die strategie bestaat uit de volgende vijf stappen:

Instructiestrategie

1. Leerlingen bewust maken van hun eigen relevante preconcepten aan de hand van concrete problemen.
2. Leerlingen stimuleren om hun eigen preconcepten te vergelijken met nieuwe informatie.
3. Leerlingen vragen om het nieuwe idee te formuleren.
4. Leerlingen het nieuwe concept laten toepassen op een concreet probleem.
5. Leerlingen het nieuwe concept op zijn waarde laten beoordelen.

In het hoofdstuk over het ontwerpen van onderwijs komen we hier op terug. De vraag blijft nog onbeantwoord hoe en wat we moeten onderwijzen, opdat de leerlingen optimaal een samenhangend en wendbaar schema aan begrippen, methoden en routines kunnen verwerven, die ze vervolgens in een breed scala van (toegepaste) situaties kunnen inzetten. Het katern *Afgeleide in breder perspectief* werkt die problematiek voor het gebied van differentiëren nader uit. Ook in het katern *Modelleren* komt dat aan de orde.

*Over transfer gesproken**

Het maximaal aantal snijpunten bij drie elkaar snijdende lijnen is 3.

Bij vier lijnen is het maximaal aantal snijpunten 6.

Wat is het maximaal aantal snijpunten bij n lijnen?

Van de 420 leerlingen die de eindtoets 4 vwo van het onderzoeksproject *Heuristisch wiskundeonderwijs* (Van Streun 1989) maakten kwam 1 leerling op het idee de onderwezen telregel uit het hoofdstuk kansrekening te gebruiken.

5.6 Overzicht en operationalisering van kennis

Vraag NCTM 2000 Standards*

*Een timmerman deelt een plank op de
aangegeven manier in drie gelijke delen.*

Waarom werkt die methode?

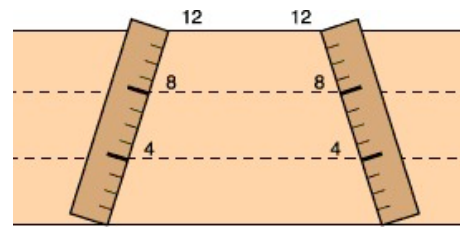


Fig. 10 Kennis mobiliseren

Overzicht van de beschikbare kennis en het oplossen van problemen zijn nauw aan elkaar gerelateerd. Bij de eerste inspectie van het probleem kijkt de probleemoplosser of hij het probleem herkent en er een oplossingsmethode voor weet. De oplossing zoekt in zijn geheugen naar relevante voorkennis.

In het Nederlands taalgebied heeft Wim Bos als eerste wiskundendidacticus in publicaties (Bos 1955) en vooral ook in zijn meetkundeboeken (Bos 1954) aandacht gevraagd voor de manier waarop leerlingen de meetkunde problemen kunnen aanpakken. Bos vindt dat leerlingen moeten leren een probleem te bevragen, moeten leren de gegeven situatie te vergelijken met de gevraagde, moeten leren hun gereedschapskist aan beschikbare stellingen te herordenen op toepassingen, enzovoort. *Operationalisering* van de kennis met het oog op het oplossen van meetkunde problemen houdt in dit voorbeeld in dat je je afvraagt welke stellingen iets zeggen over gelijkheid van lijnstukken. Geïnspireerd door Bos vind je in *Moderne Wiskunde B2*, deel 1, 7^e editie, 1999, de hier weergegeven samenvatting van zo'n operationalisering.

■ Hoe bewijs je dat twee lengten gelijk zijn?

De belangrijke stap bij het bewijzen van de gelijkheid van twee lengten is vaak:

- het bewijs van de congruentie van twee driehoeken of
 - het bewijs van de gelijkheid van twee hoeken.
- Probeer daarom eerst bekende situaties te ontdekken waarin gelijke hoeken optreden.

GELIJKE LENGTEN

Je vindt gelijke lengten

- in gelijkbenige driehoeken
- in parallelogrammen
- bij diagonalen van rechthoeken en vliegers
- bij gelijke bogen en omtrekshoeken
- bij stralen van dezelfde cirkel
- bij zwaartelijnen en middelloodlijnen

Het is mooi om te zien dat decennia nadat Wim Bos zijn ideeën vorm had gegeven psychologisch en onderwijskundig onderzoek de waarde daarvan bevestigde. Op basis van een onderwijsexperiment in het oplossen van meetkunde problemen concludeerde Landa (1976) twintig jaar later dat juist de combinatie van algemene denkmethoden en

het operationalisering van kenniselementen leerlingen helpt greep te krijgen op de meetkundige problemen. In een onderzoek gericht op het leren oplossen van natuurkundeproblemen concludeert De Jong (1986) dat voor het bereiken van de juiste oplossing van natuurkundige problemen naast de inhoud van de vakkennis van een persoon, ook en vooral de organisatie van die kennis in het geheugen van belang is. Bij het oplossen van een probleem moet de oplosser wel de juiste kennis uit zijn geheugen naar boven halen. Lawson & Chinnappan (1994) concludeerden dat minder goede probleemoplossers er juist niet in slaagden om een deel van de wel aanwezige kennis aan te boren. Bij de betere probleemoplossers kwam dit aanmerkelijk minder voor. In een vervolgstudie proberen Lawson & Chinnappan (2000) zicht te krijgen op de relatie tussen probleemoplossingsvaardigheden en de kwaliteit van de organisatie van kennis van een student. Ze gebruikten daarbij opdrachten uit de vlakke meetkunde. Studenten die beter presteerden bij wiskunde, gebruikten in het onderzoek een groter geheel aan feiten en meetkundestellingen dan laag-presteerders. Ook de snelheid waarmee de goed presterende groep de opdrachten maakte geeft aan dat zij een snellere toegang hadden tot relevante kennis.

Zoals Bos (1984) terugkijkend op zijn werk in 1984 betoogde is de waarde van deze herordering van kennis niet beperkt tot de meetkunde. Een citaat:

“ Naar mijn mening moet de leerling op den duur in zijn lange-termijn-geheugen kunnen beschikken over een flink aantal zoekrichtingen en moet een bepaalde probleemsituatie *die* methoden activeren die bruikbaar zijn.

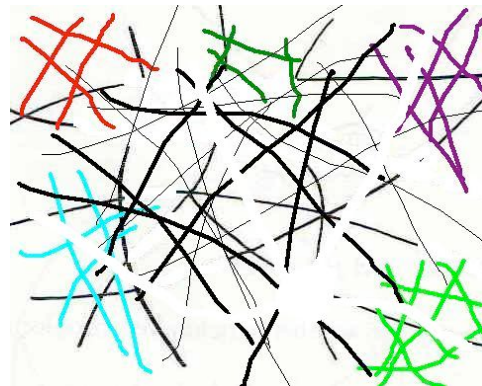


Fig. 11 Zoekrichtingen

Om dit te bereiken is het wenselijk dat de leerlingen eerst *ervaren* hebben dat je hersens gebruiken vaak effectiever is dan zoeken in het geheugen naar formules of algoritmen. Deze ervaring kunnen ze het beste opdoen met wat ik noem *systematische heuristieken*, overzichten van mogelijkheden.”

Vervolgens geeft Bos dan als voorbeeld een overzicht voor het oplossen van goniometrische vergelijkingen:

Ga na of je de vergelijking kunt herleiden tot één van de volgende vier vormen:

1. Tot $\sin...=\sin...$, $\cos...=\cos...$ of $\tan...=\tan...$. B.v. $\sin x = \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$.
2. Op nul herleiden en ontbinden. B.v. $\sin 2x = 2 \cos x$.
3. Herleiden tot een vorm waarin maar één goniometrische verhouding voorkomt.
B.v. $\cos 2x = 2 \sin x - 3 \sin^2 x$.
4. Herleiden tot de vorm $a \cos x + b \sin x = c$.

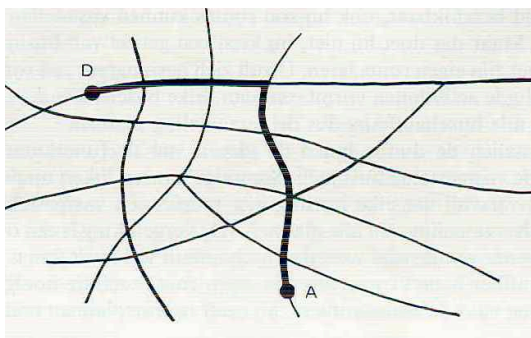
Als het goed is, schrijft Bos, gaat het hier om een *ordering* van door ervaring verworven kennis van methoden. Een ordering die in het geheugen aanwezig moet zijn, niet letterlijk uit het hoofd geleerd, maar schematisch als vier richtingen waaraan gedacht kan worden.

In het katern *Vergelijkingen vergelijken* komt dezelfde strategie voor in een poging om het grote gebied van allerlei typen vergelijkingen te herordenen in een operationele vorm.

5.7 Routines

Ik ben in A en ik moet naar D. Hoe kom ik daar?

Het kan zo.



Het kan ook anders.

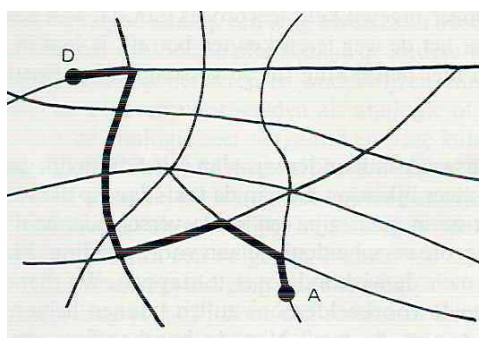


Fig. 12 Meerdere routes naar de oplossing

Zo zijn er meerdere routes in een bepaald kennisgebied die vaak kunnen worden bewandeld. Dat zijn de *routines*, snel op te roepen, feilloos uit te voeren, gememoriseerd, een belangrijk facet van het paraat hebben en paraat houden. Kun je een probleem of situatie na verkenning koppelen aan een routine om een deelhandeling bijna automatisch uit te voeren, dan houd je ruimte over in je werkgeheugen om aan het eigenlijke probleem te werken. Kun je dat niet en moet je ook die deelhandeling opnieuw heruitvinden, dan raak je intussen het zicht op het eigenlijke probleem kwijt.

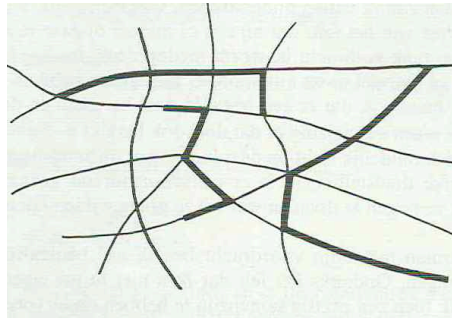


Fig. 13 Routines ontlasten het werkgeheugen

Iedere expert op een bepaald gebied beschikt over een groot aantal routines en regels, waarmee hij een probleem door *herkenning* snel kan reduceren tot een simpele opgave, waar een specifieke oplossingsmethode bij behoort. Die routines van een expert zijn ingebed in een rijk schema, hebben voor hem betekenis en zijn operationeel gekoppeld aan de verschillende typen problemen. Daarentegen kennen we allemaal wel voorbeelden dat regels en routines bij leerlingen ogenschijnlijk at random worden toegepast.

Dat is van alle tijden. Zie bijvoorbeeld het volgende fragment (van Streun 1981):

Carla: $x + 6 = -4$
 $6 = 6 -$
 $x = 10$
Anneke: 'Weet je wat ik zo gek vind? Moet je er 6 aftrekken en is dat nu -10 ?
Als je 6 aftrekt ...'
Carla: 'Ja, $-4 - 6$. Nee, dat wordt $+10$!'
Anneke: 'Volgens mij niet.'
Liesbeth: 'Ja, volgens mij wel. Dat is met die luciferstokjes.'
Anneke: 'Waar zijn de antwoorden?'
Liesbeth: ' -10 . Het klopt wel.'
Carla: 'Hoe weet je dat?'
Liesbeth: 'Bij de antwoorden.'
Anneke: 'Ja, dat vind ik ook.'
Carla: 'Hé, waar staat dat?'
Liesbeth: 'Som 2. Als je haakjes hebt, dan ...'
Carla: 'Ja, met keer was dat, met keer was dat met die luciferstokjes.'

Zowel in het rekenonderwijs als in het wiskundeonderwijs komen we dagelijks voorbeelden tegen van het klakkeloos opereren zonder dat er een betekenis aan is

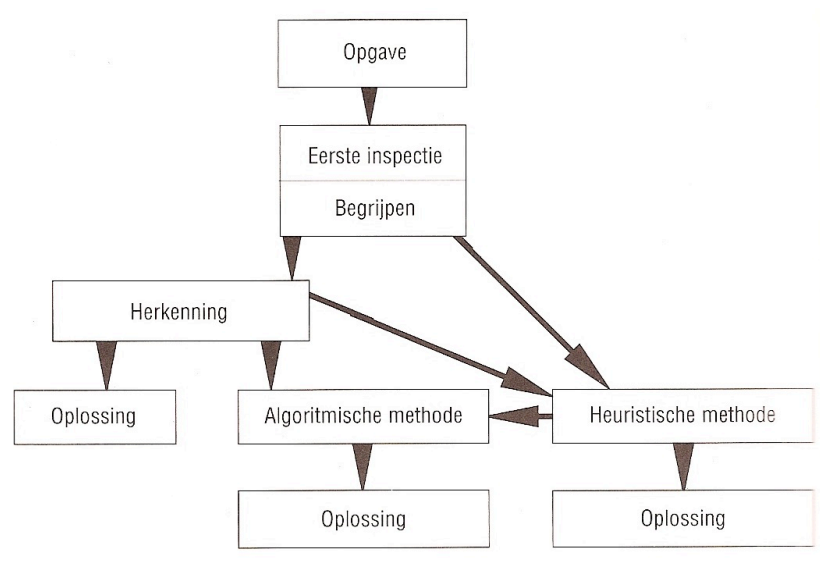
gekoppeld. We staan hier voor een dilemma. Enerzijds is het noodzakelijk dat leerlingen eenvoudige, vaak voorkomende feiten en routines paraat hebben en die op het goede moment gebruiken om in hun werkgeheugen ruimte te laten voor het echte probleem. Anderzijds zien we tal van ontsporingen door lukraak toepassen van regels en algoritmen. Wat je wilt is dat leerlingen op een bepaald moment in hun onderwijs enerzijds bijvoorbeeld snel en feilloos $3 : \frac{1}{5}$ kunnen berekenen en anderzijds toch ook naar de *betekenis* terug kunnen grijpen en kunnen uitleggen dat hier zo iets staat als: Hoe vaak gaat $\frac{1}{5}$ in 3. Wel of niet met chocoladerepen gevisualiseerd.

Ontwerpvrage

5. Hoe ontwerpen we onderwijs waarin leerlingen zinvolle routines tot op het hoogste beheersingsniveau verwerven, terwijl toch de koppeling aan de betekenis en het relevante schema bewaart blijft?

5.8 Samenvatting

Aan de hand van het volgende schema (van Streun 1989) kunnen we in kort bestek een overzicht geven van alles wat in dit hoofdstuk aan de orde is geweest. Het startpunt is een opgave, die de leerling zou moeten 'oplossen'. Achtereenvolgens lopen we na wat er nodig is om dat doel te bereiken.



Opgave

De verzamelnaam voor vraagstukken, probleemstellingen, toepassingen, onderzoek enzovoort wordt *opgave* genoemd. We onderscheiden:

Routine-opgave

Van leerlingen wordt verwacht dat ze direct *herkennen* welke kennis of vaardigheid leidt tot een correct antwoord. Het gaat in die opgave om het toetsen van *Weten dat*, feitelijke kennis en algoritmische methoden die leerlingen paraat moeten hebben. Die *herkenning* kan door oefenen geïsoleerd ingeslepen zijn of ontleend zijn aan een breder cognitief schema.

Probleem

Wij volgen Frijda en Elshout (1976), die stellen dat er pas een *probleem* bestaat, wanneer een persoon de oplossing *niet onmiddellijk* kan geven of een algoritmische methode kan vinden. Een *probleem* vraagt in die definitie om een *analyse van de probleemsituatie* en een *zoekprocedure*. Het oplossingsproces convergeert naar een oplossing.

Voor de meisjes in 2 vwo uit het eerder weergegeven lesprotocol was de opgave ‘ $-6 - 4 = ?$ ’ een probleem. Die opgave zou een half jaar eerder direct na de bestudering van het optellen en aftrekken voor hen geen probleem zijn geweest. De betrokken leraar in 2 vwo vond dat het op dat moment geen probleem mocht zijn. Deze meisjes ervoeren de opgave wel als een probleem, omdat zij niet direct een antwoord hadden en tevergeefs zochten naar een rekenregel en uiteindelijk terugvielen op een ezelsbruggetje (met 2 luciferstokjes leg je een +) dat niet van toepassing was.

Onderzoek

Het *Onderzoek* onderscheidt zich van een probleem door de open probleemstelling en heeft tot doel *divergent denken* te stimuleren. Sommige open onderzoeksoopdrachten vallen daaronder, het profielwerkstuk en alle zogenaamde praktische opdrachten die voldoende keuzeruimte voor leerlingen open laten om eigen keuzes te maken. Dit type opdrachten stelt heel andere eisen aan het ontwerpen, laten uitvoeren en coachen dan het geval is bij de andere typen opgaven. In het katern *Modelleren* vind je meer over het *Onderzoek* in het kader van modelleren, terwijl in het katern *Statistiek* natuurlijk het statistisch onderzoek een centrale rol speelt.

Eerste inspectie

Kenmerkend voor de aanpak van ‘beginners’ in een bepaald vakgebied is dat zij bijna blind en louter associatief grijpen naar een techniek, of vaardigheid of term om de opgave te tackelen. Dat werkt op korte termijn als leerlingen oefenen met rijtjes analoge opgaven en daarop worden getoetst. Het werkt niet meer als het later op voorhand niet evident is

welke kennis moet worden opgeroepen. Dan is er voor leerlingen al snel sprake van een *probleem*. Tijd nemen voor *inspectie* om de probleemsituatie te verbinden met relevante kennis uit het lange-termijn-geheugen is dan noodzakelijk. Galperin (1979) stelde dat leerlingen geneigd zijn geen tijd te verliezen in het zoeken naar de oplossing en daardoor wordt die niet gevonden. Krutetskii (1976) concludeerde dat 'zwakke' probleemoplossers willekeurig achtereenvolgens specifieke oplossingsmethoden uitproberen, als gevolg van het oefenen op die technieken, in plaats van eerst een bewuste probleemanalyse uit te voeren. Onderzoekers als Bruner (1960), Van Dormolen (1974), Biermann cs (1977) waren van mening dat het wiskundeonderwijs leerlingen zo snel als het kon trainde op het verwerven van specifieke technieken voor specifieke opgaven, wat naar hun mening het onvermogen in de hand werkte om enigszins afwijkende problemen te kunnen oplossen.

Begrijpen

Het gaat hier om twee betekenissen van *begrijpen*. Wij spreken van *begrijpen* als de oplosser de betekenis van de woorden, (vak)termen en begrippen uit de vraagstelling kent. De tweede betekenis van *begrijpen* houdt in dat de oplosser aan de gegeven probleemsituatie het relevante schema uit zijn lange-termijn-geheugen weet te koppelen. 'Dit heeft iets te maken met differentiëren.' De zoekrichting begint al zichtbaar te worden.

Herkenning

Bij opgaven die voor leerlingen niet routine zijn is dit een cruciaal moment waarin de kwaliteit van het op te roepen cognitieve schema essentieel is. Zijn er voldoende aanknopingspunten voor de noodzakelijke koppeling tussen de opgave en het lange-termijn-geheugen. Beheerst de leerling het gemeenschappelijke *onderliggende concept* in verschillende probleemsituaties of de breed *toepasbare methode*. Leerlingen die 'goed' zijn in wiskunde, blinken daarin uit (Krutetskii, 1976). Janvier (1978, 1981) meldt dat de herkenning van wiskundige begrippen in realistische probleemsituaties een vermogen tot abstraheren van wiskundige essenties vraagt, dat door goed ontworpen onderwijs geleidelijk kan worden ontwikkeld.

Algoritmische methode

Herkenning van een *algoritmische methode* (zoals een algebraïsche techniek) die op dit type opgave kan worden toegepast leidt tot een oplossing. Kenmerkend voor zo'n algoritmische methode is dat het doel scherp vast ligt, dat de voorwaarden voor

toepassing van de methode eenduidig zijn, dat de opgave scherp is gedefinieerd en dat het doel bij toepassing van de methode gegarandeerd wordt bereikt. Algoritmische methoden zoals die in wiskundeonderwijs worden onderwezen zijn toepasbaar op een scherp begrensde klasse van opgaven. In het cognitief schema moet de koppeling tussen type opgave en toepasbare routine duidelijk zijn vastgelegd.

Heuristische methode

Een *heuristische methode* kan helpen bij het gericht zoeken naar de oplossing van een probleem zonder dat het vinden van een oplossing gegarandeerd is. Het gaat hier om een breed scala van methoden, variërend van een systematische probleemaanpak tot het toepassen van meer specifieke methoden zoals het onderzoeken van een eenvoudig geval, het maken van een plaatje, het doorrekenen van een getallenvoorbeeld, het vertalen van de probleemsituatie naar een andere representatie enzovoort. Ook het systematisch nalopen van de eigen kennis (*overzicht* en *operationalisering*) is een mogelijk aspect van deze probleemanalyse.

Het verder verkennen van de probleemsituatie door een heuristische methode toe te passen slecht vaak de blokkade in de ontwikkeling van de mentale voorstelling van de oplossing en kan leiden tot de herkenning van een meer gerichte methode die snel tot de oplossing leidt. Of het leidt direct tot de gevraagde oplossing, bijvoorbeeld door redeneren, een tabel gebruiken, aflezen uit een gemaakte grafiek.

Leren over het eigen leren

De rol van het onderwijs en daarin van de docent(e) is cruciaal in het bevorderen van leerprocessen die verder reiken dan het klakkeloos instampen van specifieke manieren om rijtjes opgaven te liquideren. Het is de docent(e) die door opdrachten, vragen en doorvragen duidelijk moet maken dat in het wiskundeonderwijs die manier van leren tekort schiet voor het bereiken van waardevolle leerdoelen. Het is de docent(e) die door haar/zijn handelen leerlingen moeten doen beseffen dat ze naar hun eigen leren moeten kijken, hun eigen probleemaanpak moeten monitoren, de eigen sterke en zwakke punten moet vastleggen. Meer daarover in hoofdstuk 6.

6. Wat we weten over onderwijzen van wiskunde

In dit slothoofdstuk koppelen we samenvattend de inhoud van de voorafgaande hoofdstukken, die voornamelijk over doelen en denk- en leerprocessen gingen, aan de manier waarop je het onderwijs organiseert. Het zal wel duidelijk zijn geworden dat er geen sprake kan zijn van een alles omvattende instructiestrategie of een alleen zaligmakende didactische werkvorm voor alle doelen, wiskundige inhouden en doelgroepen van het wiskundeonderwijs. Met name de relatie tussen de wiskundige inhouden aan de ene kant en de doelen, leerprocessen en instructiestrategieën aan de andere kant wordt in de meer vakspecifieke katernen uitgewerkt. In dit hoofdstuk beperken we ons tot een tweetal invalshoeken. We kijken naar instructiestrategieën, de verschillende manieren waarop leerstof en opdrachten kunnen worden geordend met het oog op het te bereiken doel. En we kijken naar het didactisch handelen, weer met het oog op de nagestreefde leerdoelen.

6.1 Instructiestrategieën

Voor 1968 bevatten het overgrote deel van schoolboeken voor het vak wiskunde (en voor rekenen) alleen korte theorie en verder veel sommen en problemen. (Bekende uitzonderingen waren de schoolboeken van Bos&Lepoeter en Van Hiele.) De leerlingen waren sterk afhankelijk van de kwaliteit van de uitleg van de leraar, want de theorie uit de boeken was voor hen onbegrijpelijk. Nog tien jaar na de 'modernisering' van het wiskundeprogramma van 1968 stond in het voorwoord van de methode *Sigma*: *Je zult de theorie wel niet begrijpen, maar sla die dan maar over en maak het eerste voorbeeld. En doe dat na in de eerste sommen.* Deze indertijd gangbare instructiestrategie is als volgt te karakteriseren:

VNO: voordoen, nadoen, oefenen

Opsplitsen van de leerstof in kleine eenheden, voordoen van eenvoudige voorbeelden, na laten doen onder controle, oefenen van een reeks analoge sommen opklimmend in moeilijkheid.

Pluspunten:

Leerlingen kunnen snel zelf aan de slag, snel succes mogelijk, werkt goed op korte termijn, eenvoudig te toetsen.

Minpunten:

Leerlingen kunnen alleen dat type opgaven maken, alleen reproductie, fragmentarisering zonder samenhang, elk nieuw type vereist een nieuw leerproces, klakkeloos instampen.

Met de nieuwe wiskundeprogramma's na 1968 heeft een andere instructiestrategie veel invloed gekregen, wat uiteindelijk leidde tot leerboeken die over het algemeen eenzelfde opbouw vertoonden. Die instructiestrategie, OSaEV, voor het leren van begrippen en regels was geïnspireerd door het werk van Skemp en Van Dormolen. Een centraal issue in die strategie is het leren van voorbeelden en non-voorbeelden. Na enige jaren ervaring met dit model introduceert Van Dormolen het model **OOV**.

OOV: oriënteren, ontwikkelen, verwerken

Oriënteren *leerling heeft leerervaringen uit vroegere leerprocessen*

- oprakelen van relevant schema
- doel leren kennen
- probleem leren kennen
- werkwijze leren kennen

Ontwikkelen *leerling in staat, gereed en bereid tot leren van nieuw concept*

- sorteren van voorbeelden en non-voorbeelden
- is abstractie bereikt?
- expliciteren van het geleerde

Verwerken *leerling kent en begrijpt het nieuwe concept*

- oefenen
- integreren met andere schema's
- toepassen op nieuwe problemen

Leeropbrengst

leerling heeft routine en kan het concept met inzicht toepassen

Pluspunten:

- *leerlingen leren zelf voorbeelden classificeren en komen zo tot abstractie*
- *een heuristisch raamwerk voor de leraar in het ontwerpen van een les*
- *een heldere functie van de verschillende opdrachten en contexten.*

Minpunten:

- *voorbeelden en non-voorbeelden lastig te vinden bij meer abstracte begrippen -*
- *minder geschikt voor langlopende leerprocessen*
- *minder geschikt voor het leren van denkmethoden als mathematiseren, modelleren, bewijzen enzovoort.*

Aansluitend bij zijn eerder al vermelde theorie over denkniveaus heeft Van Hiele ook een fasering beschreven van een optimaal leerproces om van het ene denkniveau naar het hoger liggend denkniveau te komen. (Zie ook het katern Meetkunde.)

Fasering van Hiele

Informatie

Leerlingen maken op concreet niveau kennis met het nieuwe onderwerp/gebied.

'Dit is een ruit.'

Gebonden oriëntatie

Opdrachten leggen verbindingen met het te vormen relatienet.

Verkenning eigenschappen/kenmerken van een ruit.

Explicitering

De relaties verwoorden en de vaktaal leren gebruiken.

Eigenschappen van de ruit in woorden vatten.

Vrije oriëntatie

Een weg zoeken in het gebied door meer open geformuleerde opdrachten.

Ruiten construeren, waarvan delen in ligging of grootte zijn gegeven.

Integratie

Samenvatting en overzicht van het relatienet.

Eigenschappen van een ruit samenvatten en memoriseren.

Pluspunten

- *doelgericht werken aan niveauverhoging in de denkniveaus*
- *ruim kader.*

Minpunten

- *buiten de meetkunde lastig toepasbaar.*

Freudenthal (1978) heeft erop gewezen dat de leerlijn van een *geleidelijk* ontwikkelingsproces uitgaande van een rijke schakering aan contexten en oplossingsstrategieën niet de enige mogelijkheid is. Er zijn ook situaties denkbaar waarbij de abstracties als vertrekpunt worden gekozen waarna aan de hand van *paradigmatische* voorbeelden het abstractieproces op gang komt. (Zie het katern Meetkunde.) Van hem komt de strategie van het paradigmatisch voorbeeld.

Paradigmatisch voorbeeld

In interactief onderwijs werken leerlingen aan een gegeven situatie, een context uit de realiteit of uit een andere discipline of uit de wiskunde om de kenmerken van het onderliggende begrip te pakken (vatten). Die context blijft in het verdere leerproces als denkmodel, kapstok voor het denken, functioneren. Pluspunten

- *de aandacht blijft gericht op dat ene voorbeeld in de vergelijking met andere voorbeelden*
- *ruimte voor eigen constructies/producties van leerlingen*
- *vanzelfsprekende koppeling aan de realiteit.*

Minpunten

- *hoge didactische kwaliteiten van de leraar zijn noodzakelijk*
- *lastig om goede paradigmatische voorbeelden te vinden*
- *het verdere verloop van het leerproces is niet duidelijk gestructureerd.*

Guided reinvention

Van Freudenthal komt ook het pleidooi voor een strategie van 'guided reinvention', een goed gestructureerde reeks opdrachten die de leerlingen interactief in staat stellen om de kenmerken van het concept te ontdekken. Er is verwantschap met de eerder vermelde

opvattingen van Landa die een vorm van *cognitief begeleid, ontdekkend leren* bepleit, waarin de opdrachten goed gestructureerd leiden naar de *explicitering* van de *generalisatie* of *abstractie*. Steeds doorvragen, variaties aanbrengen, generalisaties, zoeken, kenmerken opsporen en vastleggen. Deze benadering is goed te combineren met andere strategieën.

Van preconcepten naar concepten

In 5.5 kwamen we ook de instructiestrategie tegen van Biemans cs die speciaal gericht is op de ontwikkeling van preconcepten naar concepten.

- 1. Leerlingen bewust maken van hun eigen relevante preconcepten aan de hand van concrete problemen.*
- 2. Leerlingen stimuleren om hun eigen preconcepten te vergelijken met nieuwe informatie.*
- 3. Leerlingen vragen om het nieuwe idee te formuleren.*
- 4. Leerlingen het nieuwe concept laten toepassen op een concreet probleem.*
- 5. Leerlingen het nieuwe concept op zijn waarde laten beoordelen.*

6.2 Selectie van doelen en didactisch handelen

Onder onderwijsarrangement verstaan we het geheel aan didactisch handelen, de werkvormen, de mate van zelfstandig werken/leren, de onderlinge interactie en de interactie met de leraar, de inzet van ICT, de toetsing enzovoort. De keuzes, die bij het ontwerpen van een onderwijsarrangement worden gemaakt, zijn gemotiveerd door de keuze van de doelen die met de leerinhouden moeten worden bereikt, op korte termijn en op lange termijn. Nooit is er sprake van één bepaald onderwijsarrangement, maar altijd van een optimale mix van didactische werkwijzen. Het is aan de creativiteit van de ontwerpende leraar om die mix te bepalen, passend bij alle relevante variabelen in de eigen onderwijssituatie. Het volgende overzicht is dan ook op te vatten als een heuristisch kader, dat het eenvoudiger maakt om de eigen mix te zoeken en bekende foute keuzes achterwege te laten.

Weten dat

Selecteren van de kernen (lang niet alles hoeft men paraat te hebben), met inzicht en denksteuntjes onderwijzen, regelmatig onderhouden, norm 100% paraat, individueel oefenen en toetsen b.v. met computerprogramma's. Goed te toetsen met pen en papier, korte antwoord vragen of computer.

Docent vooral een controlerende en de norm bewakende rol.

Weten hoe

Grote opdrachten individueel en in groepjes laten maken, rapporteren over aanpak, verplichte terugblik, lessen trekken voor de volgende keer, een algemene en een persoonsgebonden probleemaanpak laten ontwikkelen. Toetsing door problemen te laten maken, open vraagstellingen, zelfstandig onderzoek (Van Schalkwijk 1998).

Docent vooral procesbegeleider.

Weten waarom

Overzichten laten maken, samenhangen en abstracties laten zoeken en expliciteren, in toepassingen de onderliggende wiskundige kernen laten opsporen. Toetsen door vragen naar samenhangen, naar uitleg, naar redeneringen, naar zelf te bedenken voorbeelden, kennisgrafen laten maken (Zwaneveld 1999) enzovoort.

Docent actief in het leiden van het gesprek en de interactie met de groep.

Weten over weten

Vanaf de brugklas laten rapporteren over de zelf gemaakte fouten, de eigen manier van werken; een eigen spiekboekje laten maken, toetsen laten verbeteren met eigen commentaar, reflectievragen inbouwen.

Docent bewaakt dat het gebeurt en spreekt ook individueel na.

Houding

Ruimte geven voor eigen initiatief en eigen producties in geïntegreerde wiskundige activiteiten, onderzoek, profielwerkstukken. enzovoort. Dat werk ook stevig laten meetellen in de eindbeoordeling en de rapporten. De mogelijkheden van ICT optimaal gebruiken als gereedschap.

Docent inspireert, selecteert geschikte taken, werkt samen met collega's, gaat buurten bij andere vakken voor integratietaken enzovoort.

Overzicht

Analoog aan Van Dormolen (1974) geven we nu een overzicht van de onderwijs- en leeractiviteiten in relatie tot elkaar.

<i>1.</i> Organisatie	<i>Doceren</i>	<i>Leergesprek</i>	<i>Klassengesprek</i>	<i>Groepswerk</i>	<i>Individueel werk</i>
<i>1.1 Doelen</i>	Oriënteren op feiten en begrippen; uitleggen; motiveren.	Doorvragen over weten dat, weten waarom, reflectie.	Laten ver- woorden van waarom/hoe, weten over weten, houding.	Weten hoe; onderzoeks-opdrachten; houding.	Oefenen van basisvaar-Digheden; weten dat.
<i>1.2 Leraar- klas</i>	Ordering door vakbekwame leraar; homogene klas.	Leraar kan door goede vragen leerproces opbouwen; relatief homogene klas.	Inspirerende en inlevende leraar die leerlingen kan uitdagen en stimuleren.	Vraagt veel voorbereiding door leraar; coaching op enige afstand; uitvoering relatief zelfstandig.	Vraagt weinig van de leraar; relatief zelfstandig met optie van diverse leerwegen.
<i>1.3 Tempo</i>	Snel leveren informatie; accenten plaatsen; overzichten geven.	Relatief snel bij convergerende vragen.	Kost nogal wat lestijd en concentratie van leerlingen.	Tijdrovend; in te kaderen door goede planning en coaching.	Tempo van leerlingen kan sterk uiteen lopen.
<i>1.4 Feedback</i>	Weinig.	Reacties en antwoorden leerlingen.	Veel door eigen inbreng leerlingen.	Weinig; wel bewust in te bouwen	Inbouwen door diagnostische toetsing.

2. Rol van de leraar	<i>Doceren</i>	<i>Leergesprek</i>	<i>Klassengesprek</i>	<i>Groepswerk</i>	<i>Individueel werk</i>
<i>2.1 Leider en begeleider</i>	De leraar is autoriteit. Hij legt de leerweg vast.	De leraar is de autoriteit. Hij legt de leerweg en het doel vast	De leraar is gespreksleider, directief maar ook ruimte gevend.	Begeleider groepsproces op enige afstand van leerproces.	Begeleider op inhoud en voortgang.
<i>2.2 Coach leerproces</i>	Tussentijdse feedback d.m.v. opgaven en toetsen.	Feedback d.m.v. de antwoorden op de vragen.	Feedback op de inbreng en vragen van de leerlingen.	Helpen bij afronding, evaluatie en reflectie.	Tussentijdse diagnostische toetsing inbouwen en terugkoppelen.
<i>2.3 Bron informatie, inspiratie</i>	Paradigmatische voorbeelden; sterke opbouw.	Vragen die het denken stimuleren.	Betekenisrijke probleemstellingen.	Leertraject en organisatie voorbedenken.	Opgaven en diagnostische toetsen maken
<i>2.4 Ontwerper</i>	Het verhaal van de les/uitleg/ samenvatting bedenken.	Traject van voorbeelden naar concept uitlijnen.	Het traject van probleem naar concept uitlijnen.	Draaiboek met organisatie en leerinhouden ontwerpen.	Checken of opgaven aan het doel beantwoorden.

3. Rol van leerlingen	<i>Doceren</i>	<i>Leergesprek</i>	<i>Klassengesprek</i>	<i>Groepswerk</i>	<i>Individueel werk</i>
<i>3.1 Leraar-leerlingen</i>	LL. is de consument; afstand Ler.	Ler. $\leftrightarrow$ LL. Ler. krijgt feedback.	LL. op eigen niveau. Ler. ziet ++ en --.	LL. bespreken met Ler. werk, informeel.	Leerling vraagt om hulp.
<i>3.2 Leerlingen</i>	Geen interactie onderling.	Onderling via de Leraar.	Als groepslid benaderd.	Verantwoordelijk voor de groep.	LL. primair individu.
<i>3.3 Activiteiten Leerlingen</i>	Luisteren, meedenken, opschrijven.	Vragen beantwoorden en stellen.	Inbrengen en kritiseren van aanpak/werkwijze.	Actief kennis construeren op productief niveau	Reproductief; weinig zelf construerend.

4. Rol van leermateriaal	<i>Doceren</i>	<i>Leergesprek</i>	<i>Klassengesprek</i>	<i>Groepswerk</i>	<i>Individueel werk</i>
<i>4.1 Functie van leertekst</i>	Oefenen en verwerken.	Oefenen en verwerken; soms vragen oproepend.	Aanleveren van probleemstellingen.	Reeks van opdrachten en informatiebron.	Centrale en enige bron opdrachten, informatie.
<i>4.2 Digitale ondersteuning</i>	Demonstratie; smart board. Software.	Overzichten resultaten; doorvragen; smart board.	Probleemstelling; interactie over aanpak; smart board. Software.	Onderzoeken m.b.v internet; software; onderlinge uitwisseling eigen bijdragen.	Oefenprogramma's; applets; diagnostisch toetsen.

Effectief Realistisch Wiskunde Onderwijs

In de trainingen voor wiskundeleraren die zich op de basisvorming voorbereiden (Brandsma 1995, Bos 1992) werd het volgende model voor Effectief Realistisch Wiskunde Onderwijs (ERWO) gebruikt.

INSTAP	Een rijke context, relevant voor het leerdoel, legt de verbinding tussen ervaringen en nieuwe methoden.
<i>Onderwijsvorm</i>	Klassengesprek, afgewisseld met werken in tweetallen/groepjes.
<i>Docent(e)</i>	Context aandragen, probleem stellen.
<i>Leerlingen</i>	Ideeën opperen, bespreken, reflecteren.
<i>Doel</i>	Oriënteren op probleemverkenning, begrippen/technieken, heuristische methoden.
OP STAP	Eenvoudige situaties met alle kenmerken van de begrippen/technieken/abstracties waar het om gaat.
<i>Onderwijsvorm</i>	Zelfstandig werken in tweetallen/groepjes.
<i>Docent(e)</i>	Stevig controleren, bijsturen, soms klassikaal nalopen.
<i>Leerlingen</i>	Opgaven maken, kenmerken opsporen, zelfcontrole.
<i>Doel</i>	Kenmerken van begrippen/technieken opsporen en leren over leren.

ONDERWEG	Opbouw in combinaties van de begrippen/technieken.
<i>Onderwijsvorm</i>	Zelfstandig doorwerken in tweetallen/groepjes/individueel.
<i>Docent(e)</i>	Terughoudend begeleiden, algemene hints..
<i>Leerlingen</i>	Opgaven maken, zelfcontrole.
<i>Doel</i>	Ontwikkelen van begrippen/technieken.
 WEGWIJZERS	 Momenten van terugkoppeling en reflectie n.a.v. kernopgaven.
<i>Onderwijsvorm</i>	Klassikaal leergesprek.
<i>Docent(e)</i>	Vragen oproepen, doorvragen, verwoorden, samenvatten.
<i>Leerlingen</i>	Mondeling vragen beantwoorden, meedenken, schriftelijk vastleggen.
<i>Doel</i>	Expliciteren, leren over leren.
 CONTROLEPOST	 Diagnostische toetsing, leren van eigen werk.
<i>Onderwijsvorm</i>	Mondeling individueel, klassikaal schriftelijk.
<i>Docent(e)</i>	Terugkoppelen, doorverwijzen.
<i>Leerlingen</i>	Vragen beantwoorden, opgaven maken, conclusies over eigen werk vastleggen.
<i>Doel</i>	Consolideren/monitoren beheersing van begrippen/technieken. Leren over leren.
 VERWERKING	 Toepassing op complexere situaties, expliciteren probleemaanpak.
<i>Onderwijsvorm</i>	Zelfstandig, afgewisseld met klassikale reflectie.
<i>Docent(e)</i>	Stimulerend begeleiden, klassikaal reflecteren.
<i>Leerlingen</i>	Probleem oplossen, terugkijken.
<i>Doel</i>	Transfer van basiskennis, leren probleem oplossen, leren over leren.
 INTEGRATIE	 Begrippen en contexten verbinden met andere kennis en situaties.
<i>Onderwijsvorm</i>	Zelfstandig, afgewisseld met klassikale reflectie.
<i>Docent(e)</i>	Stimulerend begeleiden, klassikaal reflecteren.
<i>Leerlingen</i>	Probleem oplossen, terugkijken,.
<i>Doel</i>	Integratie van nieuwe kennis in bestaand kennisnetwerk.

6.3 Je eigen onderwijs ontwerpen: Voor wie? Wat? Hoe?

Aan het eind van dit funderend katern komen we weer terug op de dagelijkse werkelijkheid van een wiskundeleraar, die voor een bepaald onderwerp een kwalitatief sterk onderwijstraject wil ontwerpen. Zoals al eerder is opgemerkt bestaat er niet voor alle onderwerpen een eenduidig voorschrift dat tot een optimaal ontwerp van onderwijs zal leiden. Daarvoor is een ontwerp te sterk afhankelijk van het domein van de wiskunde, van de doelen die daar bereikt moeten worden en van de leerlingen waar het over gaat. Het hierna volgend kader moet je daarom opvatten als een *heuristiek* die je helpt bij het ontwerpen van je eigen onderwijs voor een serie lessen over een bepaald leerstofgebied of een andere leeractiviteit.

Beginsituatie

- *Ken je leerlingen en je klas*

Wat is de houding t.a.v. wiskunde?

Wat waren de leerresultaten in het verleden?

Welke werkvormen doen het in deze klas goed?

- *Hoe zit het met de veronderstelde voorkennis?*

Welke voorkennis is nodig voor een goede start?

Een begintoetsje laten maken?

Wat doe je als de leerlingen de nodige begrippen en routines niet paraat hebben?

Doelen

- *Aan welke lange termijndoelen wil je laten werken?*

Gaat het ook over motiveren en een positieve houding bevorderen?

Wil je het leren probleem oplossen meenemen of het zelf onderzoeken of ...

- *Welke kennis en vaardigheden moeten leerlingen aan het einde paraat hebben?*

Hier gaat het om de kernopgaven, die je snel kunt toetsen met korte vragen.

Dit korte termijn doel toets je onderweg al diagnostisch en je eist 100% score!

- *Welke probleemstellingen moeten de leerlingen uiteindelijk redelijk goed aan kunnen.*

Hier gaat het om het kunnen toepassen van wiskundige kennis in problemen.

Hier gaat het om het laten zien dat je kunt uitleggen waar het om gaat.

Hier gaat het om het verband met andere wiskunde te laten zien.

Voordat je begint aan het ontwerpen moet je exemplarisch problemen hebben

bedacht, die leerlingen aan het eind redelijk goed moeten kunnen maken.

Ordering van de leerprocessen

- De start

Heb je de voorkennis onderzocht en geanalyseerd?
Wat is je instaprobleem dat oriënteert en motiveert?

- De weg banen

Aan welke voorbeelden en non-voorbeelden moeten leerlingen werken?
Heb je situaties bedacht die voor leerlingen betekenis geven aan het onderwerp?

- Expliciteren

Op welke momenten en bij welke opgaven moeten leerlingen verwoorden?
Hoe kom je er achter of leerlingen de onderliggende abstractie vatten?

- Consolideren

Opgaven om geëxpliciteerde begrippen, vaardigheden en methoden te consolideren. Gevarieerd oefenen.
Diagnostisch toetsen van kennis en vaardigheden die ze paraat moeten hebben.

- Verwerken

Complexere opgaven aan de hand waarvan leerlingen leren het geleerde toe te passen in wiskundige en/of toegepaste probleemstellingen.
Complexere opgaven waarin ook 'oude relevante' kennis moet worden opgeroepen.

- Terugblik

Samen met de leerlingen:
- herordenen van kennis met het oog op toepassing in problemen
- overzicht maken van het nu uitgebreide wiskundig netwerk (mind map)
- inventariseren van *weten over weten*.

- Afsluitende toetsing

Keuze van toetsvormen die passen bij je doelen.
Uitwerking van de gekozen toetsvormen.

Leeractiviteiten

Koppelen van wat leerlingen moeten doen aan fasen in het ontworpen onderwijs.
Bedenken welke rol je zelf wilt spelen in die fasen met het oog op je doelen.

Planning les voor les

In het totale verhaal van het onderwijsplan de verschillende lessen plannen.
Het verhaal per les is verschillend in verschillende fasen.
Bedenk op welke signalen je gaat letten om het lessenplan bij te stellen.
Ontwerp een logboek waarin je per les je observaties beschrijft.

Vinger aan de pols

De start: een meting van de voorkennis; doorvragen over de startproblemen.

De weg banen: begeleiden op het leerproces, doorvragen, niet uitleggen.

Consolideren: controleren op paraat hebben.

Expliciteren: inventariseren, convergeren naar explicaties, inzichtvragen stellen.

Verwerken: begeleiden bij probleem oplossen, doorvragen op aanpak en op het zelf monitoren van de aanpak.

Terugblik: reflectievragen stellen, individueel en interactief per groep/klas.

Fasering van het ontwerpen

Het uitgangspunt van alle katernen uit het Handboek is dat leraren in hun ontwerp baas boven boek willen zijn en zelf creatief aan het werk gaan om een serie lessen te ontwerpen of een onderzoek met een open probleemstelling of een computerpracticum of een ander type ontwerp. In alle gevallen is het begin een operationalisering van wat je wilt bereiken en dat is meestal te concretiseren door geselecteerde of zelf bedachte opdrachten. Hier beperken we ons tot het ontwerp van een serie lessen over een onderwerp waarin je niet automatisch de leerlijn van het boek wilt volgen. Hoe kun je dat ontwerpen faseren?

Verkenning

Waar gaat het over? Wat staat er in het gebruikte boek? Worden de leerstofdoelen gehaald? Ervaringen van collega's? Wat bieden andere boeken over hetzelfde onderwerp? En internet? Vakbladen als Euclides en de Nieuwe Wiskrant?

Doelanalyse

Centraal staat natuurlijk wat je wilt bereiken. En dat kun je het beste operationaliseren door opdrachten te bedenken, waarvan je vindt dat leerlingen die aan het eind redelijk goed moeten kunnen maken. En vervolgens analyseer je wat leerlingen eigenlijk in huis moeten hebben aan kennis, vaardigheden, inzicht, overzicht, probleemaanpak e.d om die opdrachten te kunnen maken. Heb je weinig ervaring met het onderwerp, vraag dan een paar leerlingen uit een hoger leerjaar of ze in jouw aanwezigheid die opdrachten willen maken. Probeer uit je verkenning en doelanalyse conclusies te trekken over wat onderwijsbaar en haalbaar is voor jouw groep leerlingen.

Situatieanalyse

Waar past het onderwerp in de doorgaande leerlijnen? Hoeveel zijn de leerlingen echt gevorderd in die leerlijn? Zie de *Beginsituatie* in het begin van deze paragraaf. Wat zijn de relevante ervaringen met deze leerstof en deze leerlingen?

Ontwerpen

Zijn de doelen en de situatie helder dan kun je het totale plan uitwerken, zoals hiervoor beschreven.

Evalueren

Niet alleen leerlingen moeten iets leren van het uitgevoerde ontwerp, maar je wilt zelf ook leren of dit ontwerp redelijk succesvol was. Evalueren is niet iets dat je pas aan het einde doet, b.v. met een vragenlijstje, maar een goede evaluatie loopt parallel aan de voortgang van het onderwijs. Sta je er alleen voor, dan moet je per les zeker een logboek bijhouden en na afloop van elke les enkele reflecties vastleggen. Voor een volgende versie van je ontwerp zijn de detailopmerkingen over de reacties/vragen van leerlingen op de leertekst en de opdrachten van belang.

Wat wil je zelf leren?

Het ligt voor de hand dat je bij de vele keuzes, die je in je ontwerp maakt, rekening houdt met wat je zelf wilt leren van de uitvoering van je ontwerp. Natuurlijk evalueer je hoe goed het ontwerp in de praktijk uitpakt en wat de leerlingen al dan niet hebben geleerd en gewaardeerd. Daarnaast kun je zelf bijvoorbeeld willen leren:

- Coachen van het werken in groepen of aan onderzoekopdrachten.

Begeleiden op het optimaliseren van groepsprocessen.

Standaarden formuleren voor de voortgang.

Presentatie van groepsresultaten organiseren.

- Een klasgesprek leiden.

Geschikte probleemstellingen bedenken.

Reacties van leerlingen inventariseren.

Convergeren naar strategieën of conclusies.

Een leergesprek leiden.

Geen invul of reproductievragen, pauzeren, niet zelf het antwoord geven.

Neutraal of positief op antwoorden reageren en met *Waarom?*

Vragen en antwoorden doorspelen, aanvullende heuristische vragen bedenken.

Literatuurverwijzing

Veel waardevolle en praktische artikelen zijn te vinden in de twee Nederlandse vaktijdschriften voor wiskundeleraren: *Euclides* en de *Nieuwe Wiskrant*. Een boeiend overzicht van het Nederlandse wiskundeonderwijs is te vinden in de volgende uitgave van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren:

Honderd jaar Wiskundeonderwijs (Goffree ed. 2000).

Didactiekboeken die in Nederland veel invloed hebben uitgeoefend zijn *Didactiek van de Wiskunde* (Van Dormolen 1974) en *Begrip en Inzicht* (Van Hiele 1973).

Websites van andere buitenlandse verenigingen van wiskundeleraren bevatten een schat aan praktische informatie, bijvoorbeeld www.nctm.org van de Amerikaanse club van wiskundeleraren.

Er zijn verschillende uitstekende internationale handboeken op het gebied van onderzoek van wiskundeonderwijs, die goed kunnen dienen voor oriëntatie op een bepaald terrein en als naslagwerk.

Het meest recent verschenen is het volgende handboek met een grote variatie aan kwalitatief goede artikelen:

Lester, F.K. editor, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NCTM, 2007.

Ook het eerste handboek van de NCTM is nog steeds de moeite van het doorzoeken waard:

Grouws, D.A. editor, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NCTM, 1992.

In opdracht van de National Research Council hebben wetenschappers van verschillende disciplines opgeschreven wat naar hun inzicht wetenschappelijk goed gefundeerde kennis is over het leren en onderwijzen van wiskunde:

Kilpatrick, K. , Swafford, J., Findell, B., editors, *Adding it Up. Helping Children Learn Mathematics*. National Academy Press, Washington D.C., 2001.

Literatuurlijst

- Anderson, J.R. (1995). *Cognitive psychology and its implications*. Freeman, New York.
- Anderson, J.R. (2000). *Learning and Memory*. Wiley, New York.
- Banchoff, T. (1990). *Beyond the Third Dimension: Geometry, Computer Graphics and Higher Dimensions*. Freeman.
- Biemans, H.J.A., Simons, P.R.J. (1995). How to use preconceptions? The contact strategy dismantled. *European Journal of Psychology of Education*, 10, 243-259.
- Biemans, H.J.A., Simons, P.R.J. (1996). A computer-assisted instructional strategy for promoting conceptual change. *Instructional Science*, 24, 157-176.
- Biermann, N., Bussmann, H., Niedworok, H.W. (1977). *Schöpferisches Problemlösen im Mathematikunterricht*. Urban & Schwarzenberg, München.
- Bos, M., Streun, A. van (1992). *Effectief Realistisch Wiskunde-Onderwijs*. GION, RuG.
- Bos, M., Kollenveld, M., Kuipers, W., Streun, A. van (2004). Manifest NVvW 'Wiskundendidactiek anno 2005.' *Euclides* 80-3.
- Bos, W.J. , (1955). Het aanvangsonderwijs in de meetkunde. *Euclides*, 31, 57-69.
- Bos, W.J. , Lepoeter, P.E. (1954). *Wegwijzer in de meetkunde*. Meulenhof.
- Bos, W. J.,(1984). Gebruik je hersens!. In Bos, W.J., Hiele, P.M. van, Streefland, L. en Streun, A. van, *Wiskundige problemen en toepassingen*. RUG, Mathematisch Instituut.
- Bransford, J.D., Brown, A.L. , Cocking, R.C. editors (2000). *How People Learn*. National Academy Press, Washington D.C. .
- Brandsma, H.P., Edelenbos, P., Creemers, B.P.M., Bosker, R.J., Akkermans, W., Bos, M. (1995). *Effecten van trainingen voor docenten en schoolleiders*. GION, RuG.
- Bruner, J. S. (1960). *The Process of Education*. Harvard University Press.
- Chi M.T.H., Glaser R. , Rees E. (1981). Expertise in problem solving, in *Advances in the psychology of human intelligence* (Vol 1), Sternberg R.J., ed. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Clemens, D.H. , Battista, M.T., (1992). Geometry and spatial reasoning. In: Grouws, D.A. editor, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NCTM.
- Corte, E. De, (1999). On the road to transfer. *International Journal of Educational Research*, 31, 7, 1999, 555-559.
- cTWO (2008). *Verkennen, gebruiken, verdiepen*. Rapport programmacommissie onderbouw havo-vwo. Website www.ctwo.nl.
- Cuoco, A. A. , Curcio, F.R. (2001). *The Roles of Representaion in School Mathemtics*. NCTM Yearbook.
- Davis, P., Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Birkhäuser Boston.
- Devlin, K. (1997). *Mathematics. The science of Patterns*. The Scientific American Library.
- Devlin, K. (1998). *Wiskunde. Wetenschap van patronen en structuren*. Natuur en Techniek.
- Dormolen, J. van, (1974). *Didactiek van de wiskunde*. Oosthoek.
- Duncker, K. (1935). *Zur Psychologie des produktiven Denkens*. Berlin: Springer, 1935.
- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008a). *Over de drempels met taal en rekenen*. Enschede: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen.
- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008b). *Over de drempels met rekenen. Consolideren, onderhouden, gebruikien en verdiepen*. Enschede: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht, Reidel.
- Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing*. Dordrecht, Reidel.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Reidel.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education, China Lectures*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Frijda, N.H., Elshout J.J., (1976). Probleemoplossen en denken. In: Michon, J.A., Eijkman, E.J.G., Klerk, L.F.W. de, *Handboek der Psychonomie*. Van Loghum Slaterus.

- Fuys, D., Geddes, D., Tischler, R. (Eds.), (1987). English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele. Brooklyn, New York: Brooklyn College, City University of New York.
- Galperin, P.J., in: Parreren, C.F. van, Nelissen, J.M.C. (1979). *Met Oost-Europese psychologen in gesprek*. Wolters-Noordhoff.
- Goffree, F., Hoorn, M. van, Zwaneveld, B. (2000). *Honderd jaar wiskundeonderwijs*. NVvW.
- Groot, A. D. de, (1946). Het denken van de schaker. Amsterdam, Noord-Hollandse Uitgeversmaatschappij.
- Groot, A. D. de, (1965). Thought and Choice in Chess. Den Haag, Mouton.
- Groot, A.D. de, J.C. Traas (1980). *Onderwijs van binnen en van buiten*. Deventer, van Loghum Slaterus.
- Groot, A.D. de (1983). Heuristics, Mental Programs and Intelligence. Groner, R., Groner, M. , Bischof, W.F., *Methods of Heuristics*. Erlbaum, Hillsdale NJ.
- Guilen, M. (1995). *Five Equations that changed the world*. Hyperion New York. Hiele, P. M. van, (1957). *De problematiek van het inzicht*. Muusses.
- Hiele, P.M. van, (1973). *Begrip en inzicht*. Muusses.
- Janvier, C. (1978). *Interpretation of Complex Cartesian Graphs*. University of Nottongham.
- Janvier, C. (1981). The Use of Situations in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 12.
- Janvier, C. (1987). *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics*. Erlbaum.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B. (2001). *Adding it Up. Helping Children Learn Mathematics*. National Research Council, Washington.
- Krutetskii, V.A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. University of Chicago Press.
- Landa, L. N. (1999). Landamatics Instructional-Design Theory for Teaching General Methods of Thinking. Reigeluth C.M. *Instructional-Design Theories and Models II*. Erlbaum.
- Landa, L.N. , The Ability to Think – How Can It be Taught? (1976). *Soviet Education*, XVIII-5.
- Lawson, M.J. , Chinnappan , M. (1994). Generative activity during geometry problemsolving: Comparision of the performance of high-achieving and low-achieving high school students, *Cognition and instruction*, 12, 61-93.
- Lawson, M.J. , Chinnappan, M. (2000). Knowledge connectedness in geometry problemsolving, *Journal for research in mathematics education*, 31, 26 – 43.
- Mayer, R.E., (2001). *Multimedia Learning*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Mayer, R.E., (2008). *Learning and Instruction*. Pearson, Columbus.
- Mols, B. (2007). *Opgelost. Toepassingen van wiskunde en informatica*. Veen Magazines, Diemen.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston USA.
- Otte, M. (1974). *Mathematiker über die Mathematik*. Springer.
- Pellegrino, J.W., Chudowski, N. , Glaser, R. (2001). *Knowing what Students Know*. National Academy Press, Washington D.C.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning, volumes I&II*. Princeton University Press.
- Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery I*. New York, Wiley and Sons.
- Polya, G. (1963). On Learning, Teaching and Learning Teaching. *American Mathematical Monthly*.
- Polya, G. (1965). *Mathematical Discovery II*. New York, Wiley and Sons.
- Polya, G. (1967). *Schule des Denkens*. Bern, Francke Verlag.

- Schalkwijk, L.T.J.M. van, *Onderzoekend wiskunde leren*, dissertatie, Katholieke Universiteit Nijmegen, 1998.
- Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically. Problem solving, metacognition and sense-making. In: Grouws, D.A. editor, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NCTM.
- Skemp, R. (1971). *Wiskundig Denken*. Aula.
- Skemp, R. (1978). Inzicht, planning en het bijbrengen van routine. *Euclides* 53 – 9.
- SLO (2008). Eindrapport Expertgroep: *Over de drempels met taal en rekenen*. SLO 2008.
- Deelrapport rekenen&wiskunde: *Over de drempels met rekenen*. SLO 2008.
- Zie <http://www.minocw.nl/documenten/4322.pdf> of de website www.slo.nl.
- Sternberg, J., Ben-Zeev, T. (1996). *The Nature of Mathematical Thinking*, Lawrence Erlbaum.
- Stewart, I. (1992). *The Problems of Mathematics*. Oxford University Press.
- Stewart, I. (1995). *Nature's Numbers*. Basic Books.
- Streun, A. van, (1981). Het leren oplossen van wiskundige problemen. *Euclides*, 57, 1, 3-13.
- Streun, A. van, (1989). *Heuristisch wiskundeonderwijs*. Dissertatie Rijksuniversiteit Groningen.
- Streun, A. van (1991). The Relation between Knowledge and Heuristic Methods. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 22, no.6, 899-907.)
- Streun, A. van (2000). Representations in Applying Functions. In: *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 2000, 31, 5, 703-725.
- Streun, A. van (2001). *Het denken bevorderen*. Oratie Rijksuniversiteit Groningen.
- Streun, A. van (2007). Parate kennis en algebra. *Euclides* 82, 53-54, 111-112, 151-152, 183-184, 232-233, 274-276, 321-323.
- Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer.
- Tall, D., Thomas, M. editors (2002). *Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics. A tribute to Richard Skemp*. Post Pressed, Australia.
- Teppo, A. , (1991). "Van Hiele Levels of Geometric Thought Revisited." , *Mathematics Teacher* , March 1991, 210-221.
- Zwaneveld, B., *Kennisgrafen in het wiskundeonderwijs*, dissertatie, Open Universiteit Nederland, 1999.

Noten

N¹ *Mentale voorstelling, internal representation*

Zoals gebruikelijk in de psychologische en didactische literatuur worden verschillende termen gebruikt voor dezelfde of sterk verwante begrippen. Duncker (1935) spreekt in zijn analyses van oplossingsprocessen bij wiskundige problemen over de ontwikkeling van het probleem, zoals de oplosser het 'ziet'. In zijn studie over het denken van de schaker spreekt De Groot (1946) over een zich gestaag ontwikkelend 'totaal schema' of over de ontwikkeling van de 'total problem conception' (De Groot 1965). Dat is op een bepaald moment het geheel aan ideeën van de oplosser over de probleemsituatie. In de cognitieve psychologie en internationale handboeken wordt de term 'problem representation' of 'internal representation' vaak gebruikt. De term 'representatie' heeft in

de wiskundendidactiek veelal betrekking op de manier waarop bijvoorbeeld een functioneel verband is beschreven, verbaal, grafisch, analytisch, numeriek (Janvier 1987, Van Streun 2000, Cuoco&Curcio 2001). In de internationale literatuur spreekt men dan van de 'external representation' van een probleem.

Cuoco, A. A. , Curcio, F.R. *The Roles of Representaion in School Mathemtics* (2001). NCTM Yearbook, 2001.

Duncker, K. (1935). *Zur Psychologie des produktiven Denkens*. Berlin: Springer.

Groot, A. D. de (1946). *Het denken van de schaker*. Amsterdam, Noord-Hollandse Uitgeversmaatschappij.

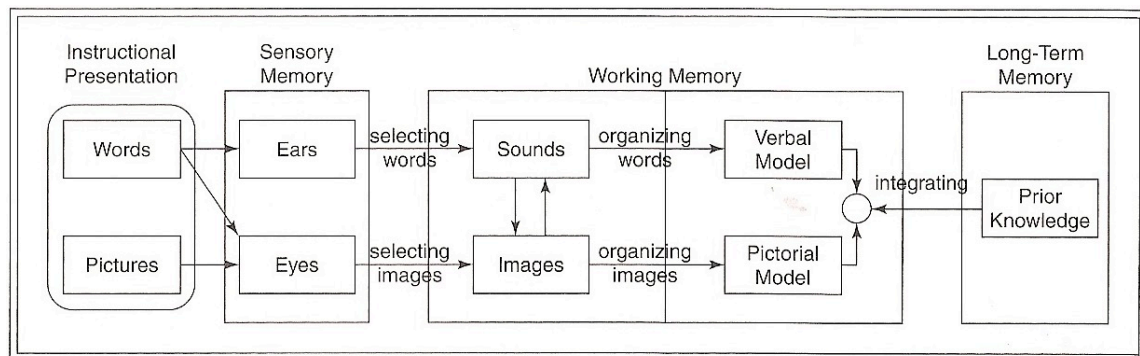
Groot, A. D. de, *Thought and Choice in Chess* (1965). Den Haag, Mouton.

Janvier, C. (1987). *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics*. Erlbaum.

Streun, A. van (2000). Representations in Applying Functions. In: *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 2000, 31, 5, 703-725.

N² Werkgeheugen en lange-termijn-geheugen

In de volgende boeken wordt de relatie gelegd tussen de werking van het menselijk geheugen en het leren in onderwijsituaties. Mayer (2008) is heel breed en toegankelijk. Zie de volgende twee schema's uit zijn boek.



Three memory stores used in meaningful learning	Sensory memory	Very brief storage of incoming sensations from eyes and ears	Learners must be exposed to appropriate learning experiences
	Working memory	Temporary storage and manipulation of incoming sounds and visual images	Learners build mental representations in working memory
	Long-term memory	Permanent storage of knowledge constructed in working memory	Learners use appropriate knowledge from long-term memory during learning

Anderson, J.R. (1995). *Cognitive psychology and its implications*. Freeman, New York.

Bransford, J.D., Brown, A.L. , Cocking, R.C. editors (2000). *How People Learn*. National Academy Press, Washington D.C.

Mayer, R.E., (2008). *Learning and Instruction*. Pearson, Columbus.

Pellegrino J.W. et al. (2001). *Knowing what Students Know*. National Research Council, National Academy Press, Washington D.C.

N³ *Wat is wiskunde en wat zijn wiskundige activiteiten?*

Er bestaat een ruime verzameling van boeken rond dit thema. Bijvoorbeeld:

- Banchoff, T. (1990). *Beyond the Third Dimension: Geometry, Computer Graphics and Higher Dimensions*. Freeman. Een goede wegwijzer in de wereld van vier en meer dimensies.
- Davis, P., Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Birkhäuser Boston. Een boeiende beschrijving van wat het is om als professionele wiskundige wiskunde te doen.
- Guilen, M. (1995). *Five Equations that changed the world*. Hyperion New York. Een wetenschapsjournalist schrijft over het werk en leven van Isaac Newton, Daniel Bernoulli, Michael Faraday, Rudolf Clausius en Albert Einstein.
- Otte, M. (1974). *Mathematiker über die Mathematik*. Springer. Boeiende en nog steeds actuele discussies tussen vooraanstaande wiskundigen over de wenselijke inhoud en aard van wiskundeonderwijs.
- Stewart, I. (1992). *The Problems of Mathematics*. Oxford University Press. Een heel brede keuze van wiskundige onderwerpen.
- Stewart, I. (1995). *Nature's Numbers*. Basic Books. Een prachtig boek voor beginners.
Nederlandse vertaling: *Waar zijn de getallen?* Contact.

Van een ander karakter zijn de boeken die op basis van research en/of zelfreflectie proberen het denkproces van wiskundigen en/of leerlingen te beschrijven. Bijvoorbeeld:

- Krutetskii, V.A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. University of Chicago Press. Een uitgebreide bespreking van de publicaties door wiskundigen (Hadamard, Poincaré e.a.) gevolgd door de resultaten van jarenlange research naar de manier waarop leerlingen wiskundige problemen oplossen.
- Sternberg, J., Ben-Zeev, T. (1996). *The Nature of Mathematical Thinking*, Lawrence Erlbaum. Hierin staan veel resultaten van research verricht door psychologen en wiskundendidactici die psychologisch georiënteerd zijn.
- Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer. David Tall is een wiskundige en wiskundendidacticus die in dit boek een beschrijving geeft van zijn onderzoek naar het wiskundig denken van leerlingen op het gebied van de analyse (vergelijkbaar met bovenbouw havo-vwo).

N⁴ *Cognitieve schema's*

De structuur waarin kennis geordend is opgeslagen wordt wel een semantisch netwerk genoemd (Anderson, 1995). Een semantisch netwerk is een weergave van begrippen met bijbehorende eigenschappen in een netwerk (proposities). Het noemen van een bepaald begrip brengt in een persoon onmiddellijk bepaalde, bij dat begrip horende eigenschappen boven. Anderson meent dat de volgende conclusies over semantische netwerken te rechtvaardigen zijn:

- Als een persoon de relatie tussen een eigenschap of kenmerk van een begrip vaak tegenkomt dan wordt die eigenschap in het geheugen vastgelegd bij dat begrip (kanaries zijn geel).
- Hoe vaker een persoon een eigenschap bij een begrip tegenkomt des te sterker associeert hij die eigenschap met dat begrip.
- Als iemand een uitspraak hoort over eigenschap of kenmerk van een begrip die in het semantisch netwerk niet aan elkaar gekoppeld zijn, dan duurt het relatief lang om die uitspraak te verifiëren (struisvogels ademen).

Anderson noemt een tweede manier om de organisatie van kennis te beschrijven, namelijk een *schema*. Een schema is breder dan een semantisch netwerk. Het is de beschrijving van een kennisstructuur, waarin gedacht wordt vanuit grotere categorieën binnen het geheugen. Een schema is een grotere eenheid van informatie die meerdere proposities en de relaties daartussen omvat. Het is een netwerk van kennis en vaardigheden. In dit katern wordt de term *schema* in deze brede betekenis gebruikt.

Anderson, J.R. (1995). *Cognitive psychology and its implications*. Freeman, New York.

Anderson, J.R. (2000). *Learning and Memory*. Wiley, New York.

N⁵ *Multimediale benadering*

Interessant onderzoek naar de ‘cognitive load’ van het geheugen lijkt informatie op te leveren over de beste manier waarop informatie kan worden gepresenteerd. Er zijn aanwijzingen dat de combinatie van een visuele presentatie en een gesproken tekst tot een optimale opslag in het geheugen leidt. De combinatie van een beeld en een afgedrukte tekst doet het in het onderzoek slechter. Dus ‘*een plaatje met een praatje*’ lijkt nog steeds het beste advies voor leraren die iets willen presenteren. Zie Mayer (2001, 2008).

Mayer, R.E., (2001). *Multimedia Learning*. Cambridge University Press, Cambridge.

Mayer, R.E., (2008). *Learning and Instruction*. Pearson, Columbus.

Websites

<http://www.nvww.nl> De website van onze Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

<http://www.fi.nl> De website van het Freudenthal Instituut.

<http://www.slo.nl> De website van de Stichting Leerplan Ontwikkeling.

<http://www.nctm.org> De website van de National Council of Teachers of Mathematics.

<http://standards.nctm.org/> Uitgewerkte doelen van het wiskundeonderwijs in de V.S

<http://www-gse.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/AHSchoenfeld.html> Deze website bevat een serie artikelen die Schoenfeld over wiskundeonderwijs heeft geschreven. Aanbevolen.