

Hoe onderwijs je probleemoplossen?

A. van Streun
Werkgroep β -onderwijs
Universiteit Groningen

Summary

The educational goal of teaching problem solving is the improvement of transfer of acquired mathematical knowledge and skills. We have to deal with teaching strategies, general thinking methods like heuristics, the organization of textbooks, the development of concepts, verbalizing, reasoning etc. The radical change in the direction of real problem solving requires and provokes a change in the attitudes and beliefs of students and a change in the attitudes and beliefs of their teachers.

A major obstacle in the problem solving process is the absence of the recognition of the same fundamental mathematical component in different problem situations. Especially the start of building up a cognitive schema of a new topic proved to be essential. Reflecting at their activities students and teacher formulate the essential similarities in different (contextualized) problems, building up an orientation base for recognizing fundamental mathematical concepts and methods in the new contexts and problems of the next lessons.

1. Oplossingsprocessen

Het onderzoek naar het verloop van oplossingsprocessen heeft een lange geschiedenis en heeft voor allerlei wetenschapsgebieden interessante resultaten opgeleverd. In deze paragraaf ligt het accent op de resultaten, die voor het onderwijs relevant zijn.

De transfervraag staat centraal

Kijken we naar probleem oplossen in het kader van onderwijs, dan gaat het altijd om de transfervraag. Leerlingen hebben een begrip, een techniek, een werkwijze of methode geleerd en de vraag is nu of zij die kennis en vaardigheden in een andere situatie kunnen toepassen. Gaat het om een situatie, die dichtbij de geoefende en wellicht gememoriseerde situaties ligt, dan is er sprake van nabije transfer. Ligt de nieuwe situatie veraf van de bekende situaties, dan noemen we dat wel verre transfer.

Aandacht voor probleem oplossen in het onderwijs wordt gelegitimeerd door de mate waarin het een onderwijsdoel is om transfer te bevorderen. In

een concrete onderwijssituatie is het goed mogelijk om opgaven objectief in klassen te verdelen, die gekenmerkt worden door een bepaalde afstand tot de bekende en geoefende situaties (Van Streun 1989).

Conform de definitie van Frijda en Elshout (1976) is er pas een *probleem*, wanneer een persoon de oplossing niet onmiddellijk kan geven of niet door een algoritmische methode kan vinden. Een *probleem* vraagt in die definitie om een analyse van de probleemsituatie en een zoekprocedure. Gebruiken we als algemene term voor vraagstukken, probleemstellingen, toepassingen enzovoort de term *opgave*, dan kan een opgave zich voor de oplosser als een probleem voordoen. Opgaven die veraf liggen van voor leerlingen bekende probleemstellingen, zullen vaak als probleem worden ervaren, maar ook bij standaardvraagstukken komt dat regelmatig voor.

Kenmerken van de goede probleemoplosser

Weer beperken we ons tot dat type probleem oplossen, dat in het onderwijs een rol speelt in verband met de wendbaarheid van de te onderwijzen kennis en vaardigheden. Vakinhoudelijke kennis is bij die vorm van probleem oplossen een essentieel deel van het gereedschap. Het is nuttig om onderscheid te maken tussen verschillende soorten bekwaamheden, die een rol spelen bij het oplossen van problemen. Wij onderscheiden:

- vakinhoud;
- methoden;
- metacognitie;
- attitude.

De vakinhoud betreft *feitelijke kennis* van wetten, regels, algoritmen, het beheersen van *betekenissen* en het *overzicht* op het desbetreffende deelgebied. *Feitelijke kennis* is memoriseerbaar en leidt bij heel specifieke opdrachten rechtstreeks tot een oplossing. Een wiskundestudent die een dozijn typen differentiaalvergelijkingen met hun specifieke exacte oplossingsmethoden memoriseert, kan het tentamen met succes afsluiten. Daarnaast gaat het om de *betekenis* van allerlei begrippen, zoals afgeleide, vergelijking, variabele, verband enzovoort. Op allerlei momenten in het onderwijs blijkt de betekenis van begrippen en termen weggezonden of zelfs nooit verworven te zijn. Zonder die betekenis te kennen is het niet mogelijk om enige variatie in de vraagstelling of toepassing op te vangen, want de ingeprente standardsituatie helpt in dat geval niet verder.

Het *overzicht* op de onderlinge relaties van de feitelijke kennis en de betekenis is vooral noodzakelijk als de voorgelegde probleemsituatie niet bij voorbaat gekoppeld is aan een sterk begrensd deelgebied. De oplosser moet in dat geval bij de probleemverkenning de relevante vakinhoud zelf selecteren uit een groter en samenhangend geheel.

Elk oplossingsproces is te beschrijven als de weg naar een doel door middel van het toepassen van een keten van *methoden*. Een methode, zoals hier als algemeen begrip aangeduid, kan bewust worden gebruikt voor het bereiken van een doel, zoals het oplossen van een probleem of het geven van een antwoord bij een opgave. Tot het gereedschap van een goede probleemoplosser behoort een breed repertoire aan methoden, variërend van heel specifieke algoritmische methoden (behorend tot de vakinhoud en gegarandeerd leidend tot een oplossing) tot heel algemene oplossingsmethoden, zoals de situatie-analyse (Wat is er bekend? Wat weet je dus nog meer?), de doel-analyse (Wat wordt er gevraagd? Waar komt dat op neer?) en de doel-middelen-analyse (Welk verschil moet je overbruggen? Welke eigenschappen, regels of methoden kun je wellicht gebruiken?). Tussen die algemene en heel specifieke methoden bevinden zich de heuristische methoden (zoekprocedures, niet gegarandeerd tot succes leidend, maar wel breed inzetbaar voor grote klassen van problemen) en de Systematische Probleem Aanpak (SPA), die een oplossingsprocedure voor bepaalde typen problemen beschrijft.

Onder het aspect *metacognitie* verstaan we hier activiteiten zoals het zelf controleren en terugkijken, de selfregulation en de monitoring. Het gaat om de metacognitieve vaardigheden, het nu en dan op afstand bekijken wat je bij het oplossen aan het doen ben. Dus bijhouden waar je mee bezig bent, 'Wat was ook al weer de vraag', 'Hoe ver ben ik nu', 'Is dit een redelijk (tussen)antwoord', 'Had ik het achteraf handiger kunnen doen' enzovoort.

Belangrijk is de *houding* ten opzichte van wiskunde, de durf om aan een probleem te beginnen, het vertrouwen dat je er wel uitkomt, de opvatting over hoe je wiskunde moet leren. In de onderzoeksliteratuur wordt vermeld dat leerlingen bij wiskunde denken aan het memoriseren van specifieke oplossingsmethoden voor specifieke problemen. Die houding en opvattingen zijn een obstakel op de weg naar onderwijs, waarin leerlingen leren hun kennis optimaal te gebruiken in een breed bereik van (probleem)situaties. Volgens veel leerlingen gaat het bij wiskunde niet om het denken, maar om het onthouden van regels en het toepassen van regels op verschillende typen sommen. Daar sluit de gebruikelijke examenpraktijk goed bij aan, evenals het examengericht trainen op die typen opgaven. Als daarenboven het onderwijsprogramma overladen is, zal menig docent grijpen naar het imitatieleren (enkele typerende opgaven met uitwerking bespreken, daarna intraineren) of klakkeloos instampen (voordoelen, nadoen, oefenen).

Dat werkt de genoemde ongunstige attitude van leerlingen voor het oplossen van problemen in de hand, met als gevolg dat het min of meer blindelings grijpen naar een techniek of regel de meest gesignaleerde probleem aanpak van leerlingen wordt (figuur 1).

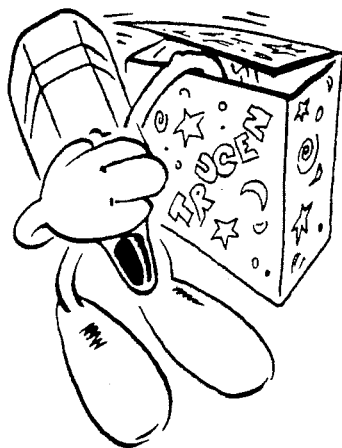


Fig.1. Blindelings trucs toepassen

Het verloop van een oplossingsproces

Het verloop van een oplossingsproces kan worden beschreven als de *ontwikkeling* van het geheel aan ideeën van de oplosser over de probleemsituatie. Duncker (1935) spreekt in zijn analyses van oplossingsprocessen bij wiskundige problemen over de ontwikkeling van het probleem, zoals de oplosser het 'ziet'. In zijn studies over het denken van de schaker heeft De Groot het over een zich gestaag ontwikkelend 'totaal schema' (De Groot, 1946) of over de ontwikkeling van de 'total problem conception' (De Groot, 1965). In de moderne cognitieve theorieën worden de termen 'probleemrepresentatie' of 'interne representatie' veel gebruikt. Bij de analyse van hardop-denken-protocollen van eerstejaarsstudenten wiskunde (Van Streun 1991) is de beschrijving van een oplossingsproces in termen van een zich ontwikkelende *mentale voorstelling* van de probleemsituatie bruikbaar gebleken voor het zoeken van aanknopingspunten voor het onderwijs in probleem oplossen.

2. Een uitgewerkt voorbeeld

In de leerstof van wiskunde A en B van het vwo is het maken van een wiskundig model bij een concrete situatie een bekende en beruchte activiteit. Volgens Polya (1954, 1962, 1965) moet dat leren vertalen van een reële situatie naar een wiskundig model het belangrijkste algemene onderwijsdoel van wiskunde-onderwijs zijn. In de onderwijspraktijk van veel schoolboeken en op de examens wordt zo'n probleemstelling veelal opgesplitst in kleine deelvragen en wordt het model weggegeven. Het kan ook anders.

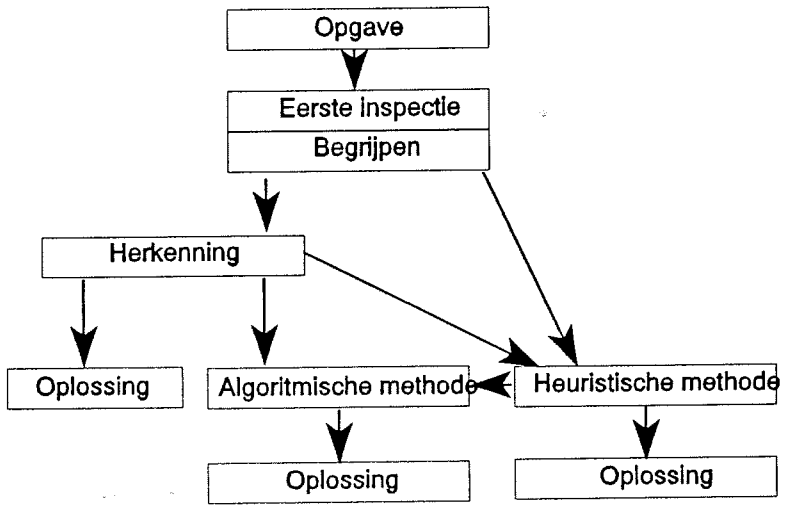


Fig.2. Schematische weergave van het oplossingsproces

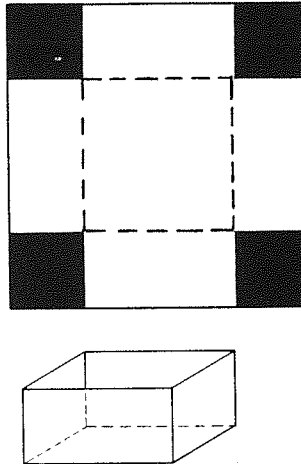


Fig.3. Het bakje met de grootste inhoud

Opgave

Uit een vierkant stuk papier kun je zoals in figuur 3 is aangegeven bij de hoeken vier gelijke vierkantjes uitknippen en van het overblijvende deel een bakje vouwen. De inhoud van dat bakje hangt af van de afmetingen van de uitgeknipte vierkantjes. Bij welke verhouding tussen de zijden van het gehele stuk papier en de zijden van de uitgeknipte vierkantjes is de inhoud van het bakje maximaal?

Een systematische probleemaanpak1. *De probleemverkenning*

Wat is hier aan de hand? Wat weet je? Waar moet je naar toe?

Welke kennis heb je nodig?

Even tekenen. Even zo'n bakje maken.

Geen idee voor een aanpak?

2. *Heuristische methoden*

Concreter maken. Een getallenvoorbeeld kan helpen.

De grote zijde 16 cm, de hoogte 3 cm. Even intekenen.

De berekening van de inhoud uitschrijven:

$$\text{Inhoud} = 3 \times (16-6) \times (16-6) = 300 \text{ cm}^3$$

Nu met 16 cm en hoogte 4 cm: $\text{Inhoud} = 4 \times (16-8) \times (16-8) = 576 \text{ cm}^3$

Nu met hoogte h cm: $\text{Inhoud} = h \times (16-2h) \times (16-2h) \text{ cm}^3$

Nu met Z cm en hoogte h cm: $\text{Inhoud} = h \times (Z-2h) \times (Z-2h) \text{ cm}^3$.

3. *Plan*

De inhoud is kennelijk een functie van h.

Met behulp van de afgeleide is het maximum te bepalen.

4. *Uitvoering*

Onderzoek van het algemene geval met behulp van de kennis van de

differentiaalrekening leidt tot de conclusie dat de maximale inhoud wordt

bereikt bij een hoogte, die een zesde deel is van de zijde van het gegeven

stuk papier.

5. *Terugblik*

Hoe heb je het aangepakt? Wat heeft je verder geholpen? Kun je de

oplossing nog controleren? Is het probleem nog te variëren? Zijn er

andere modelveronderstellingen mogelijk?

Klassen van problemen

Voor een groot aantal problemen in het wiskunde-onderwijs kan deze heuristische aanpak worden onderwezen. Het is een speciaal geval van het algemene aanpakschema van Polya (1946).

De eerste twee stappen zijn erop gericht dat de mentale voorstelling van de probleemsituatie zich verder gaat ontwikkelen, totdat het mogelijk wordt

om een plan voor de uitvoering te maken. Het maken van de formule is niets anders dan het generaliseren van de berekening aan de hand van een speciaal geval. Daar moet de oplosser zich wel van bewust zijn, zodat niet het antwoord van de tussenberekeningen maar de werkwijze zelf nader wordt bekeken. Tijdens de terugblik staan ook de impliciete modelveronderstellingen ter discussie. In dit voorbeeld speelt dat geen rol, maar bij veel toegepaste situaties is sprake van een herhaalde bijstelling van het model op grond van wisselende modelveronderstellingen.

3. Aanknopingspunten voor het onderwijs

Bij mijn deelname in 1990 aan de veel geciteerde problem solving cursus voor studenten wiskunde en informatica in Berkeley van Alan Schoenfeld (1983) realiseerde ik mij opnieuw dat het veel eenvoudiger is om een algemene cursus voor het leren oplossen van (wiskundige) problemen te geven, dan om het leren probleem oplossen te incorporeren in het regulier onderwijs, waar de vakinhoud sterk interfereert met de probleemoplossingsstrategieën.

De aandacht in zo'n PS-cursus gaat juist uit naar de methodische kant en vakinhoudelijke voorkennis speelt geen rol of wordt op afroep bijgeleverd. De transfer van dat verworven repertoire aan methoden naar vakinhoudelijke problemen blijkt vaak tegen te vallen, omdat de al genoemde aspecten van de vakinhoud (feitelijke kennis, betekenissen, overzicht) daarin een essentiële rol vervullen.

De aandacht bij het vakonderwijs ligt daarentegen bij de begripsontwikkeling en de technische vaardigheden, terwijl de aanpak van een probleem veelal berust op herkenning. Ervaringen van docenten en resultaten van onderzoek in de context van het vakonderwijs op een beperkt deelgebied leiden daarom van tijd tot tijd tot de conclusie dat beheersing van het vakgebied voldoende is om de problemen uit dat (beperkte) domein op te kunnen lossen. Ook bij deze benadering blijkt de transfer naar nabije of verre gebieden en problemen heel beperkt, omdat daarbij een algemene aanpak noodzakelijk is wegens het ontbreken van de directe herkenning.

Elders (van Streun 1989, 1991b) is al op grond van de onderzoeksliteratuur en eigen onderzoek in 4 vwo de conclusie getrokken dat het combineren van het onderwijs in de vakinhouden en in oplossingsmethoden een aangepaste *fasering* van het onderwijs vereist. Het uitlokken en benutten van *blokkades* in oplossingsprocessen motiveert het onderwijs in de methoden. Beschikbaarheid van lesmateriaal dat rekening houdt met de fasering en de verschillende functies van opgaven is daarbij noodzakelijk.

De rol van de docent(e) is essentieel in de ontwikkeling van de vereiste *attitude* en de noodzakelijke *metacognitieve* vaardigheden.

Blokkades opwerpen en benutten

Op allerlei vakgebieden heeft men onderzoek gedaan naar het verschil tussen oplossters, die veel succes hebben en anderen. Voor het oplossen van problemen op al die verschillende terreinen geldt dat slechte presteerders veelal direct in de beginfase de mist ingaan. Ze verzuimen zich een goede voorstelling te maken van de situatie door de voorgelegde tekst eens rustig over te lezen, wat verkennende acties uit te voeren en zich wat vragen over die situatie te stellen. In plaats daarvan storten zij zich onmiddellijk op het oplossen door tamelijk willekeurig één of andere techniek of methode te gaan toepassen. Oppervlakkige kenmerken van de beschrijving bepalen daarbij de eerstgekozen aanpak, waar men vervolgens hardnekkig aan vast houdt.

In het beoogde onderwijs moet daarom bewust tijd worden uitgetrokken voor het vormen van een eerste mentale voorstelling van de probleemsituatie. Hierin begrepen zit het 'begrijpen' van de probleemsituatie en van de vraag, dus ook het kunnen activeren van de benodigde vakkennis en betekenissen van woorden, begrippen en termen. De voornaamste basisvaardigheid is hier de probleemanalyse, het bewust analyseren van een probleemsituatie, van de gegevens, het gevraagde, hun onderlinge relatie en het verband met mogelijk relevante kennis.

Inspectie van een opgave kan onmiddellijk leiden tot herkenning en het routinematig actualiseren van een oplossing of oplossingsmethode, die gegarandeerd tot succes leidt. Leerlingen, die de opgave niet kunnen klassificeren of een nieuwe situatie voorgelegd krijgen, zitten vast en geven het op, tenzij zij in hun repertoire over heuristische methoden beschikken. Dat zijn methoden, die kunnen helpen bij het gericht zoeken naar de oplossing van een probleem, zonder dat het vinden van de oplossing is gegarandeerd. Het kan de voortzetting van een doel-middelen-analyse zijn uit de eerste probleemanalyse of het doorrekenen van een speciaal geval of het maken van een tabel, grafiek of tekening of het onderzoeken van extreme situaties enzovoort. Het effect van het toepassen van heuristische methoden is dat de ontwikkeling van de mentale voorstelling van de probleemsituatie voortgaat, totdat alsnog herkenning optreedt of het probleem direct wordt opgelost of er geen voortgang meer plaats vindt.

Bij onderwijs uit gangbaar lesmateriaal doet zich nu het verschijnsel voor dat auteurs en gebruikers hebben ontdekt, dat bij sommige opgaven en probleemstellingen de vereiste herkenning van een aanpak zich in de klas niet massaal voordoet. Dat is lastig. De vragen worden aangepast, de moeilijkhe-

den worden in kleine stapjes ontleed of de docent(e) geeft op voorhand al aan hoe dat lastige probleem moet worden aangepakt. De noodzaak voor een probleemanalyse en het toepassen van heuristische omwegen, doet zich dan niet meer voor omdat de auteur of de docent(e) het denkwerk heeft voorgestructureerd. Blokkades in oplossingsprocessen worden vermeden. (Hetzelfde verschijnsel van het vermijden van de noodzaak tot probleemverkenning doet zich uiteraard bij veel examenopgaven voor.)

In een artikel over het leren aanpakken van meetkundige constructies met passer en liniaal signaleerde Wim Bos (1955), samen met P.E. Lepoeter auteur van een klassieke serie schoolboeken, het omgekeerde verschijnsel. Met behulp van de constructie-opgaven leerden leerlingen vragen te stellen aan een probleemsituatie en met een analysefiguur een meetkundige situatie te onderzoeken. Slimme leerlingen 'zagen' evenwel bij de gangbare opgaven al snel hoe de constructie moest en waren moeilijk tot het maken van een analysefiguur te motiveren. Dat is een bekend verschijnsel bij het onderwijs met behulp van een SPA. Bos zijn didactische oplossing werkt nog steeds. Hij voerde de moeilijkheidsgraad van de opgaven net zo ver op, totdat ook de slimste leerlingen echt een bewuste probleemanalyse moesten uitvoeren voordat zij een plan voor de oplossing konden maken.

Mijn stelling is dan ook:

Onderwijs in probleemoplossingsmethoden heeft alleen zin als leerlingen aan de hand van de voorgelegde probleemsituaties kunnen ervaren dat die methoden hen helpen bij het overwinnen van blokkades in hun oplossingsproces.

Het ontwikkelen van een brede oriënteringsbasis

Bij ons onderzoek in 4vwo (Van Streun 1983, 1984) vonden wij dat de voornaamste oorzaak voor de geringe transfer lag in het ontbreken van de herkenning van dezelfde wiskundige componenten in verschillende probleemsituaties. Uiteraard is die herkenning een deel van de wiskundige bekwaamheid (Krutetskii, 1976), heeft het alles te maken met een vorm van verbale abstracte intelligentie (Janvier, 1981) en hebben zwakke probleemoplossers sterker de neiging om af te gaan op oppervlaktekenmerken van een probleem dan goede probleemoplossers (Silver, 1979 voor wiskundige en Chi e.a., 1981 voor natuurkundige problemen). Snow and Yalow (1982) melden dat in probleemgericht en zelf ontdekkend onderwijs alleen de meer intelligente leerlingen de impliciete strategieën en begrippen uit de voorbeelden en problemen abstraheren.

Het benadrukken van fundamentele overeenkomsten in verschillende contexten en probleemsituaties lijkt een vruchtbaar uitgangspunt voor de ontwikkeling van goed gestructureerd probleemgericht onderwijs. Met Herbert Simon (Simon 1981, pp.369-370) ben ik van mening dat in het onderzoek naar leerprocessen veel meer aandacht uit moet gaan naar de aard van de herkenning, die bij alle leren en probleem oplossen zo'n fundamentele rol vervult. De vraag is hoe in het onderwijs die herkenning kan worden bevorderd, zodat ook bij middelmatige en zwakke leerlingen transfer kan worden bevorderd.

Het belangrijkste principe is dat in de opbouw van een nieuw onderwerp vanaf het begin situaties worden aangeboden, die enerzijds alle kenmerken hebben van de nieuwe begrippen en technieken en anderzijds ook de betekenissen in een brede variatie aan contexten laten zien. Silver (1987) spreekt in dit verband van '*prototypical problem situations for introducing and developing instruction on mathematical concepts and skills. If this is done, then it should be easier to apply that knowledge to similar situations encountered at a later time, for the learner's mental representation of the mathematical knowledge would probably consist of a well-connected propositional and procedural network composed of both the particular concepts and skills and rich connections between elements of that knowledge and the prototypical problem situations to which the knowledge is applicable. To benefit wide transfer instruction should build toward general structures that include not only the prototypical examples considered but also problem situations that have not considered.*'

Het onderzoek in 4vwo (Van Streun 1989) speelde in de overgangsfase van de klassieke 'kale' wiskundige leerstof naar de deels toegepaste leerstof in wiskunde A. Tijdens de periode van het ontwikkelingsonderzoek was het goed mogelijk om de effecten van 'kale' wiskundelessen en varianten van meer toegepast wiskunde-onderwijs goed te vergelijken. Een brede start van de differentiaalrekening met veel aandacht voor de verschillende betekenissen van de afgeleide (grafisch, numeriek, snelheid, marginale veranderingen, analytisch) kostte bijvoorbeeld veel meer onderwijstijd met een niet significant verschil in leerresultaat op de 'kale' toetsopgaven bij wiskunde. De leerlingen, die een brede oriënteringsbasis hadden aangeboden gekregen, volgden de natuurkundelessen (het begin van de mechanica) gemengd met de andere leerlingen. Bij de tweede en derde mechanicatoets scoorden de 'breed onderwezen' leerlingen veel beter dan de andere groep (Sinnema en Van Streun, 1984). Bij hen trad herkenning van de verschillende betekenissen op. 'Het komt allemaal op hetzelfde neer', verklaarden zij.

In de laatste tien jaar is binnen het wiskunde-onderwijs ruim ervaring opgedaan met pogingen om het onderwijs in elk nieuw onderwerp (hoofdstuk van een leerboek) met een brede, probleemgerichte oriëntatiefase te beginnen. De voorbeeldpakketjes van het Freudenthal Instituut voor HEWET (vwo, wiskunde A), HAWEX (havo, wiskunde A en B) en W12-16 kennen een lange ontwikkelfase, waarin leerlingen uit de verschillende contexten de wiskundige essentie moeten abstraheren. Aan de vereiste probleemaanpak wordt in het lesmateriaal geen expliciete aandacht gegeven. Uit de besproken noodzaak om tot herkenning te komen van onderliggende abstracties, begrippen en methoden volgt, dat bij dergelijke lesmateriaal aan de leraar hoge eisen worden gesteld in het klassikaal accentueren en structureren. In ons onderzoek in 4 vwo (1984, 1989) vereiste het HEWET-materiaal dan ook de meeste klassikale uitleg en toelichting. Zowel in het Nederlandse als bijvoorbeeld in het Amerikaanse wiskunde-onderwijs Crosswhite (1987) is het leerboek de belangrijkste leidraad voor de leraar, die daar wel eens iets uit weglaat, maar zelden iets fundamenteels toevoegt of helemaal omgooit. Daarom is het de moeite waard om via het leerboek het onderwijs in het probleem oplossen en de transfer te stimuleren.

In de schoolboekenserie Wiskunde Lijn (voortgekomen uit het vermelde onderzoek in 4 vwo) begint elk hoofdstuk in de bovenbouw havo-vwo met een INSTAP van enkele lessen, waarin typerende probleemstellingen in de vorm van contexten worden aangeboden. Oriëntatie op de betekenissen en op de aanpak met heuristische methoden staat centraal. De SPA's komen in alle leerboeken voor.

Mijn stelling is:

Bij het β -onderwijs in het probleem oplossen is het geïntegreerd ontwikkelen van een brede oriënteringsbasis voor de nieuwe begrippen en de oplossingsmethoden aan de hand van instapsituaties van cruciaal belang.

Fasering en werkvormen

Zoals aangegeven bestaat er voor het wiskunde-onderwijs al lesmateriaal, waarin veel werk wordt gemaakt van het ontwikkelen van een brede oriënteringsbasis. In het onderzoek in 4 vwo met ruim 20 klassen (van Streun, 1989) bleek de beperkte wendbaarheid van wiskundige kennis als de oriëntering zich had beperkt tot de 'kale' wiskunde (Wiskunde Eerst Dan Toepassingen). Aan de andere kant bleek het noodzakelijk om het aantal contexten in de opbouw van het cognitieve schema te beperken, omdat veel leerlingen uit de veelheid aan situaties niet kwamen tot de vereiste abstractie

van een mathematisch-didactische kern. Reflectie op de kenmerken van enkele contexten, grafieken en analytische functies leidt zo naar een explicitering van het begrip afgeleide, als de snelheid van verandering van het verband tussen twee grootheden. Reflectie op situaties als samengestelde rente, btw en korting, exponentiële groei en het herhaald dubbel vouwen van een vel papier leidt tot het multiplicatieve model met de vermenigvuldigingsfactor en de formule $K=b \cdot g^t$. Die reflectie en explicitering in een klassediscussie lijkt noodzakelijk om tot de vereiste abstractie te komen.

Buiten enkele onderzoeksprojecten is nog geen systematisch of vergelijkend onderzoek gedaan naar de effecten van lesmateriaal, waarin bewust en consequent eerst wordt gewerkt aan het ontwikkelen van een brede oriënteringsbasis. De genoemde leerstofpakketjes van het Freudenthal Instituut, commercieel uitgegeven op het moment dat de landelijke invoering plaats had, hebben geen brede ingang gevonden in het gewone onderwijs. Het overgrote deel van de wiskundedocenten maakt gebruik van wiskundeboeken, waarin expliciet het voordoen-nadoen-oefenen als didactiek wordt aanbevolen (Getal & Ruimte, Sigma, Netwerk). Evaluatie-onderzoek onder gebruikers van Wiskunde Lijn wees uit dat een oriënterende INSTAP van 3 lessen (vwo-delen) tot overslaan uitnodigt, omdat de docenten de leerlingen sneller zelfstandig willen laten werken.

Een INSTAP van ruim 1 les (havo-delen en onderbouw basisvorming) wordt in het algemeen voldoende geacht om samen in de klas aan een oriënteringsbasis te werken. De verdere ontwikkeling vindt dan plaats tijdens het begeleid en zelfstandig werken aan opdrachten.

De theoretisch aan te bevelen strategie van een voortdurende afwisseling tussen het zelfstandig laten werken aan echte problemen en het samen discussiëren, reflecteren en verwoorden stuit in de praktijk van veel docenten op bezwaren. Het klasgesprek is een lastige en vermoeiende werkvorm, die hoge eisen stelt aan leerlingen en docenten. Bovendien maakt lesmateriaal, dat een sterk beroep doet op de toegevoegde waarde van de interactie in de klas, de leerlingen sterk afhankelijk van de kwaliteit van die interactie. Een alternatief, dat beter aansluit bij de onderwijspraktijk van veel docenten, is een onderwijsstrategie met lesmateriaal, waarin veel ruimte is voor zelfstandig werken door de leerlingen. Op duidelijk aangegeven momenten vindt klassikale reflectie plaats om het zicht op de herkenning van de mathematisch-didactische kernen en het overzicht op het geheel te versterken.

Mijn stelling is:

De innovatie van het onderwijs in probleem oplossen staat of valt met het ontwikkelen van een optimale fasering in de leerstof en goed hanteerbare werkvormen, waarbij veel tijd wordt ingeruimd voor zelfstandig werken door de leerlingen.

De rol van de docent(e)

Om het beoogde leerproces van de leerlingen goed te kunnen sturen en activeren, stelt de docent(e) hoge eisen aan het werk van de leerlingen. Dat is de basis om in een terugblik te kunnen bekijken wat er te leren valt van de oplossingspogingen. Waar ging het goed, waar fout? Waarom? Hoe ben je begonnen? Waarom? Wat noteer je om voor een volgende keer te onthouden? De docent(e) laat de leerlingen (deels) zelf hun antwoorden controleren, fouten verbeteren en aantekeningen bij die fouten maken. De eigen foutenanalyse en de zelf bedachte uitroeptekens (Denk erom dat ...) vormen de basis voor het systematisch verbeteren van de eigen prestaties.

Leerlingen moeten op die manier worden gestimuleerd in het leren leren, het leren de eigen aanpak zelf te reguleren en te leren van eigen ervaringen.

Een docent(e), die wil werken aan het vergroten van de wendbaarheid van de onderwezen vakkennis zal:

- een voor leerlingen veilig onderwijsklimaat moeten realiseren;
- voortdurend demonstreren dat niet het antwoord maar de probleemaanpak essentieel is;
- eigen oplossingsroutes van leerlingen waarderen en bespreken;
- de probleemaanpak en heuristische methoden expliciet maken;
- regelmatig bij de start en de verwerking van een onderwerp het verkennen en oplossen van problemen centraal stellen.

Mijn stelling is:

Problem solving cursussen op het niveau van de docenten zijn belangrijk voor de bewustwording van strategieën, attitudes, beliefs en metacognitieve vaardigheden.

De rol van het leerboek

In het reguliere wiskunde-onderwijs speelt de inhoud van het leerboek een beslissende rol. Docenten volgen de opbouw van het boek, gebruiken de opgaven, laten delen of opgaven weg maar voegen weinig tot niets toe. Het is voor docenten ook heel moeilijk om probleemoplossende vaardigheden te ontwikkelen, als leerlingen in hun boek al snel de regeltjes tegenkomen, waarmee een probleem tot een oefen/invulopgave kan worden gereduceerd.

Evenzo is het moeilijk voor een docent om stelselmatig de eenzijdige exercities uit het leerboek te vervangen of aan te vullen door echte probleemsituaties. Leerlingen zijn daar zeker niet blij mee.

Aan de andere kant werkt een leerboek vol probleemsituaties zonder een duidelijke structuur met het oog op de aanpak van die problemen demotiverend, als de docent(e) niet voortdurend sterk begeleidend bezig is. Dat laatste, sterk begeleid en geleid onderwijs, is weer ongunstig voor een lesklimaat waarin leerlingen zelf hun vaardigheid in het oplossen van problemen moeten ontwikkelen.

Er zullen daarom hoge eisen moeten worden gesteld aan de leerboeken, zodat er een duidelijk evenwicht ontstaat tussen begripsontwikkeling, probleem oplossen en routinevaardigheden. In het zicht van een meer zelfstandig studeren in de bovenbouw van havo en vwo is de urgentie voor het ontwikkelen van passend lesmateriaal hoog. De eenvoudigste oplossing voor de gewenste zelfstudie is immers het schrijven van voorgeprogrammeerd lesmateriaal, waarin leerlingen tijdens het studeren geen echte problemen meer tegenkomen.

Mijn stelling is:

Ontwikkelingsonderzoek moet zich richten op de aanpassing en ontwikkeling van lesmateriaal, waarin het onderwijs in het vak en in het oplossen van problemen wordt geïntegreerd.

4. Ontwikkeling en innovatie in het β -onderwijs

De lezer van dit speciale nummer van dit tijdschrift zal ongetwijfeld in de beschrijvingen van en ervaringen met probleemgericht β -onderwijs voor de verschillende vakgebieden veel overeenkomsten vinden in de aard van de moeilijkheden en de voorgestelde oplossingen. Geheel in overeenstemming met de verkokerde traditie van het Nederlandse onderwijs wordt bij elk vak in ons β -onderwijs een eigen SPA ontwikkeld en onderwezen. Voor elk vak worden optimale onderwijsstrategieën ontwikkeld en voor innovatie geschikt gemaakt. Vanuit de school en de leerlingen gezien is dat allerm minst effectief.

Gaan we ervan uit dat de vaardigheid in het oplossen van problemen op verschillende vakgebieden bestaat uit het kunnen beschikken over een ruim en gevarieerd repertoire aan algemene en meer vakspecifieke methoden, dan is het vreemd dat het onderwijs in die meer algemene methoden per vak in het β -onderwijs zou moeten verschillen. Even merkwaardig is het dat langs verschillende wegen gewerkt wordt aan het bevorderen van de gewenste attitude en de vereiste metacognitieve vaardigheden, die bij nader inzien

ongetwijfeld voor de verschillende vakken in het β -onderwijs niet zo sterk verschillen. Wordt het geen tijd voor grensoverschrijdende ontwikkel-, en onderzoeksprojecten? De nieuwe tweede fase met de profielen en de nadruk op studievaardigheden lijkt een goede gelegenheid voor zo'n geïntegreerde aanpak.

Literatuur

- Bos, W.J. (1955). Het aanvangsonderwijs in de meetkunde. *Euclides*, 31, 57-69.
- Chi, M.T.H., P.J. Feltovich & R. Glaser (1981). Categorization and Representations of Physics Problems by Experts and Novices. *Cognitive Science*, 5, 121-152.
- Crosswhite, F.J. (1987). Cognitive Science and Mathematics Education: A Mathematics Educator's Perspective. In A.H. Schoenfeld (Ed.). *Cognitive Science and mathematics Education*, (pp. 265-277), Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.
- Duncker, K. (1935). *Zur Psychologie des produktiven Denkens*. Berlin: Springer.
- Frijda, N.H. & J.J. Elshout (1976). Probleem oplossen en denken. In J.A. Michon, E.J.G. Eijkman & L.F.W. de Klerk, *Handboek der Psychonomie*. Deventer: Van Loghum Slaterus.
- Groot, A.D. de (1946). *Het denken van de schaker*. Amsterdam: Noord-Hollandse Uitgeversmaatschappij.
- Groot, A.D. de (1965). *Thought and Choice in Chess*. Den Haag: Mouton.
- Janvier, C. (1981). Use of Situations in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 113-122.
- Krutetskii, V.A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.
- Polya, G. (1946). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton: Princeton University Press.
- Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery 1*. New York: J. Wiley and Sons.
- Polya, G. (1965). *Mathematical Discovery 2*. New York: J. Wiley and Sons.
- Schoenfeld, A. H. (1980). Teaching Problem-Solving Skills. *The American Mathematical Monthly*, 10, 794-805.
- Silver, A.E. (1979). Student Perceptions of Relatedness among Mathematical Verbal Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10, 195-210.

- Silver, A.E. (1987). Foundations of Cognitive Theory and Research for Mathematics Problem Solving Instruction. In A.H. Schoenfeld (Ed.). *Cognitive Science and Mathematics Education*, (pp.33-60). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.
- Simon, H.A. (1981). The Central role of Learning in Cognition. In J.R. Anderson, *Cognitive Skills and their Acquisition*, (pp.361-380), Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.
- Sinnema, S. & A. van Streun (1984). Samen beginnen met de differentiaalrekening en de mechanica? *NVON-Faraday*, 53, 17-19.
- Snow, R.E. & E. Yalow (1982). Education and Intelligence. In R.J. Sternberg, *Handbook of Human Intelligence* (pp.493-585). Cambridge UK: Cambridge U.P.
- Streun, A. van (1983). De herkenning van wiskundige essenties in realistische probleemsituaties. *Nieuwe Wiskrant*, 2, 4, 20-24.
- Streun, A. van (1984). Ervaringen met A-wiskunde in 4 vwo. *Nieuwe Wiskrant*, 3, 4, 8-13.
- Streun, A. van (1989). *Heuristisch wiskunde-onderwijs*. Groningen, dissertatie Rijksuniversiteit Groningen.
- Streun, A. van (1991a). The Relation between Knowledge and Heuristic Methods. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 22, 6, 899-907.
- Streun, A. van (1991b). Het onderwijs in de know-how van de wiskunde. In H.G.B. Broekman & L.C. Spijkerboer, *Algoritmen en heuristieken in contextrijk reken- en wiskunde-onderwijs* (pp.29-45). Utrecht: Freudenthal Instituut.