De lineariteitsillusie bij leerlingen van het secundair onderwijs

D. de Bock* **, L. Verschaffel** en D. Janssens**
Economische Hogeschool Sint-Aloysius Brussel*
Katholieke Universiteit Leuven**

Summary
Linear (proportional) functions are undoubtedly one of the most common models for representing and solving both pure and applied problems in elementary mathematics education. But according to several authors, different aspects of the current culture and practice of school mathematics develop in students a tendency to use these linear models also in situations in which they are not applicable. This article reports three closely related studies about the occurrence of this "illusion of linearity" in 12-16-year old students working on word problems involving lengths and areas of similar plane figures of different kinds of shapes, as well as about the effect of visual and metacognitive scaffolds in breaking this improper use of linearity. Generally speaking, the results suggest that students' tendency towards linear modelling is very strong, deep-rooted and resistant to change.

1. Inleiding

Recht evenredige (of lineaire) verbanden tussen grootheden bekleden een centrale plaats in het huidig reken/wiskundeonderwijs, vooral op primair maar ook op secundair niveau. Dat dergelijke verbanden zoveel aandacht krijgen in dit onderwijs, is op zich verdedigbaar. Immers, voor tal van problemen, zowel van praktische als van meer theoretische aard, vormen lineaire functies het onderliggend wiskundig model. Volgens diverse auteurs heeft de toenemende ervaring en vertrouwdheid die leerlingen en studenten met lineaire modellen en redeneringen verwerven, echter ook een keerzijde: het kan er namelijk toe leiden dat zij de neiging ontwikkelen om gelijk welke numerieke relatie tussen grootheden te gaan behandelen alsof het om een lineaire (of proportionele) relatie ging (Berté, 1993; Freudenthal, 1983; Rouche, 1989).

In de literatuur worden regelmatig voorbeelden gegeven van probleemsituaties waarin de lineariteitsillusie (frequent) optreedt. Deze voorbeelden komen uit verschillende wiskundige domeinen en onderwijsniveaus.

> *"Als het 15 minuten duurt om 1 hemd buiten aan de wasdraad te laten drogen, dan zal het 45 minuten duren om 3 hemden buiten te laten drogen."*
> *"Als een treinticket voor een reis van 30 km 4 EUR kost, dan zal je voor een reis van 60 km 8 EUR moeten betalen."*
> *"Als bij een kansspel de kans op succes 0.1 is en je speelt het spel 3 keer dan heb je kans 0.3 op minstens één succes."*
> *"Als de zijde van een vierkant verdubbelt, dan verdubbelt de oppervlakte."*

Het laatste voorbeeld refereert naar een context waarin de lineariteitsillusie frequent opduikt: *het lineair vergroten of verkleinen van vlakke en ruimtelijke figuren.* In de volgende paragraaf gaan we dieper in op deze problematiek.

Voor dit fenomeen van de (foutieve) toepassing van een lineair model in een niet-lineaire context, worden in de literatuur benamingen gebruikt zoals "lineariteitsillusie", "lineair obstakel", "lineaire valstrik", "lineaire misconceptie". Tussen deze termen bestaan er lichte verschillen in teneur en betekenis, verwijzend naar verschillende facetten van het fenomeen van de ongeoorloofde toepassing van lineariteit

De term "lineariteits*illusie*" bijvoorbeeld draagt een connotatie met gezichtsbedrog (denk aan "optische illusies"). Hoewel dit aspect een rol *kan* spelen in situaties waarin leerlingen onterecht lineair redeneren (gezichtsbedrog kan bijv. mede aan de basis liggen van een redenering als "het volume van een cilinder in vooraanzicht wordt waargenomen als een rechthoek waarvan de oppervlakte verdubbelt bij verdubbeling van de basis), zal verderop blijken dat dit zeker niet *altijd* het geval is. De benamingen "lineair *obstakel*" en "lineaire *valstrik*" zijn neutraler, maar daardoor ook minder zeggend. Tenslotte voldoet ook de term "lineaire *misconceptie*" niet helemaal om het onterecht lineair redeneren van leerlingen te kwalificeren (Streefland, 1997). Deze term suggereert te veel dat iemands begrip van of inzicht in een situatie totaal verkeerd is, terwijl het hier enkel gaat over een geval van overgeneralisatie (het ongeoorloofd passeren van de grenzen van het toepassingsgebied van een bepaald begrip). Het verwerven van inzicht is meestal geen kwestie van alles of niets; het is een gradueel en veelzijdig proces, en dat wordt onvoldoende uitgedrukt in de eenzijdig negatieve term "misconceptie".

Ondanks al deze subtiele betekenisverschillen tussen de gebruikte termen voor het fenomeen dat het onderwerp van deze bijdrage vormt, worden deze termen hierna zonder onderscheid door elkaar gebruikt.

2. Het effect van lineaire vergroting (of verkleining) op oppervlakte en volume

Het eerder gegeven voorbeeld over de verdubbeling van de oppervlakte van een vierkant bij verdubbeling van de zijde, refereert naar een context waarin de lineariteitsillusie frequent opduikt: het *lineair vergroten of verkleinen van vlakke en ruimtelijke figuren*. Zoals bekend ondergaan één-, twee- en driedimensionale grootheden een verschillende verandering bij het vergroten of verkleinen: een lineaire vergroting (verkleining) met factor r vermenigvuldigt alle

lengtes	met factor r,
oppervlaktes	met factor r^2,
volumes	met factor r^3.

Essentieel hierbij is dat deze verschillende factoren niet afhangen van de specifieke figuur (of het een vierkant, cirkel, bol, kegel, onregelmatig lichaam, ... betreft), maar enkel van de grootheid in kwestie (lengte, oppervlakte of volume). Volgens Freudenthal is dit principe wiskundig zó fundamenteel dat het zowel fenomenologisch als didactisch op de eerste plaats moet komen.

> "*This principle deserves, as far as the moment of constitution and the stress are concerned, priority above algorithmic computations and applications of formulae because it deepens the insight and the rich context in the naive, scientific, and social reality where it operates*" (Freudenthal, 1983, p. 401).

Het ongeoorloofd toepassen van een lineair model op grootheden van een verschillende dimensie staat bekend als een klassieke misvatting. Het vaakst geciteerde voorbeeld in dat verband is ongetwijfeld de verdubbeling van het vierkant in de dialoog "Meno" van de Griekse filosoof Plato (zie bijv. Berté, 1993; Daumas, 1989; Rouche, 1992). Wanneer Socrates, Plato's leermeester, aan zijn slaaf een vierkant toont met een zijde van "twee voeten" en hem vraagt welke zijde het vierkant met een dubbele oppervlakte moet hebben, antwoordt de slaaf: "het is evident, Socrates, dat de zijde dan het dubbele moet zijn". De slaaf gaat dus spontaan uit van een recht evenredig verband tussen lengte en oppervlakte en verlaat dit idee pas wanneer Socrates hem met een tekening de onjuistheid van zijn stelling aantoont.

Sedertdien hebben ook verscheidene auteurs erop gewezen dat inzicht in de hierboven beschreven relaties tussen lineaire afmetingen, oppervlaktes en volumes van gelijkvormige figuren, doorgaans erg traag en moeizaam tot stand komt. Vele leerlingen trappen daarbij geregeld in de lineaire valstrik. In de Amerikaanse *Standards* lezen we bijv.:

> "*Most students in grades 5-8 incorrectly believe that if the sides of a figure are doubled to produce a similar figure, the area and volume also will be doubled*"
> (National Council of Teachers of Mathematics, 1989, p. 114-115).

Onderzoekers van het Freudenthal Instituut die de invloed van lineaire vergroting op oppervlakte en inhoud onderzochten in realistische contexten (zie bijv. Streefland, 1984; Treffers, 1987), stelden evenwel vast dat deze misvatting vrij gemakkelijk door leerlingen wordt overwonnen, zelfs op het niveau van de basisschool. Treffers schrijft naar aanleiding van een ontwikkelingsonderzoek met zesdeklassers rond het thema "Gulliver's travels" in dit verband:

> "*This question* [How many Lilliputian handkerchieves make one for Gulliver?] *introduces the influence of linear enlargement on area. The pupils have no difficulty with the problem*" (Treffers, 1987, p. 5).

Noch het citaat uit de *Standards*, noch de bewering van Treffers worden evenwel ondersteund met *concrete cijfers*. Voorzover wij weten is er trouwens nauwelijks systematisch empirisch onderzoek rond dit fenomeen verricht.

Vanuit deze vaststelling werden recent drie constaterende empirische studies verricht rond de lineariteitsillusie in dit toepassingsgebied. Een eerste studie had als doel de sterkte van de lineariteitsillusie te onderzoeken bij 12-13-jarigen die geconfronteerd werden met vraagstukken over lengte en oppervlakte van gelijkvormige vlakke figuren. Tevens was het de bedoeling na te gaan (1) welke het effect is van de aard van de figuur waarover een vraagstuk handelt, en (2) wat de invloed is van zelfgemaakte en aangeboden tekeningen op dit fenomeen. In een tweede studie werden de bevindingen uit het eerste onderzoek gerepliceerd bij een groep 15-16-jarigen. In de derde studie tenslotte werd bij 12-13- en 15-16-jarigen nagegaan welke het effect is van diverse vormen van hulp op het optreden van deze illusie.

3. Studie 1: een exploratieve studie bij 12-13-jarigen

3.1. Onderzoeksopzet en -materiaal

De studie werd uitgevoerd in het begin van het schooljaar 1995-1996 in het eerste leerjaar secundair onderwijs van een Vlaams lyceum dat haar leerlingen rekruteert uit een brede waaier van nabijgelegen basisscholen. Aan het onderzoek namen 120 leerlingen deel, verdeeld in drie gelijkwaardige groepen.

Het onderzoek bestond uit twee fasen. In een eerste fase lieten we alle 120 leerlingen - zonder speciale voorafgaande aanwijzingen of instructies - dezelfde schriftelijke toets oplossen bestaande uit 12 experimentele items en 3 bufferitems (Toets 1). De 12 experimentele items hadden alle betrekking op lineaire vergroting van vlakke figuren en werden geconstrueerd rond drie verschillende soorten figuren: 4 items over vierkante (V), 4 over cirkelvormige (C) en 4 over grillige figuren (G). Binnen elke categorie van figuren waren er telkens 2 proportionele items en 2 niet-proportionele items. In Tabel 1 geven we een voorbeeld van elk: een proportioneel (item 1) en een niet-proportioneel (item 2), beide rond een vierkante figuur.

1. Om een gracht te graven rond een vierkant stuk weiland met zijde 100 m, heeft boer Gust ongeveer 4 dagen nodig. Hoeveel dagen zal hij ongeveer nodig hebben om een gracht te graven rond een vierkant stuk weiland met zijde 300 m?
   (Antwoord: 12 dagen)

2. Om een vierkant stuk grond met zijde 200 m te bemesten, heeft boer Karel ongeveer 8 uur nodig. Hoeveel uur zal hij ongeveer nodig hebben om een vierkant stuk grond met zijde 600 m te bemesten?
   (Antwoord: 72 uur)

Tabel 1. Twee voorbeelden van experimentele items

Twee weken na de eerste toetsafname werden de drie groepen van leerlingen geconfronteerd met een tweede toets (Toets 2), een parallelversie van Toets 1. Groep I, die fungeerde als controlegroep, kreeg - net zoals tijdens de eerste toetsafname - geen verdere instructies of hulp. De leerlingen van Groep II kregen de instructie om een schets of tekening te maken alvorens de oplossing neer te schrijven. Deze aanbeveling werd bij het begin van de toets gedaan en verduidelijkt aan de hand van een voorbeeld-item, - uiteraard *geen* niet-proportionele opgave. De leerlingen van Groep III tenslotte kregen bij elk item een correcte tekening aangeboden. Bij wijze van voorbeeld geven wij in Figuur 1 de tekening die hoort bij het niet-proportioneel item rond "vierkanten" uit Tabel 1.

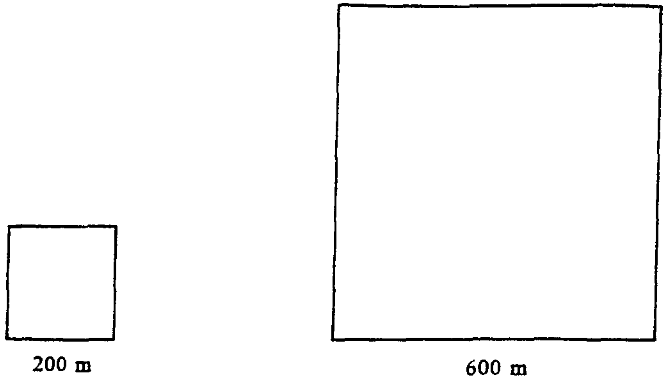

Fig. 1

De antwoorden van de leerlingen op de proportionele en de niet-proportionele items werden als juist of fout beoordeeld en er werd tevens gekeken naar oplossingswijzen. Vervolgens zijn ook statistische analyses uitgevoerd (variantie-analyse en a posteriori LSD-tests).

3.2. Resultaten

Tabel 2 geeft een overzicht van het percentage juiste antwoorden voor de drie groepen van leerlingen (I, II en III) voor de proportionele en de niet-proportionele items over vierkanten (V), cirkels (C) en grillige figuren (G) in Toets 1 en Toets 2.

Groep	Toets 1						Toets 2					
	Proportionele items			Niet-proportionele items			Proportionele items			Niet-proportionele items		
	V	C	G	V	C	G	V	C	G	V	C	G
I	96	98	89	5	0	1	99	96	85	3	0	0
II	93	95	89	6	1	0	93	95	95	4	2	0
III	91	91	87	4	3	0	93	89	89	8	5	1

Tabel 2. Overzicht van de resultaten van studie 1

Zoals verwacht werden de proportionele items door deze 12-13-jarigen bijna altijd juist opgelost, terwijl de niet-proportionele items zelden of nooit correct beantwoord werden (voor de drie groepen en de twee toetsen samen bedroegen de percentages correcte antwoorden op de proportionele en niet-proportionele items respectievelijk 92% en 2%). Bovendien wees een aanvullende analyse uit dat het overgrote deel van de fouten op de niet-proportionele items neerkwam op een ongeoorloofde toepassing van een lineair model of redenering.

De prestaties van de leerlingen bleken te verschillen naargelang de aard van de figuur waarover in het vraagstuk sprake is en wel in die zin dat er significant meer correcte oplossingen werden gegeven op de opgaven rond vierkante figuren (49%) dan bij de items met grillige figuren (45%). Dit effect manifesteerde zich zowel bij de proportionele als bij de niet-proportionele items. Voor deze laatste itemcategorie hadden wij dat ook verwacht. Immers, voor de niet-proportionele items rond vierkanten (de V-items) bestaan er drie adequate oplossingsstrategieën: (1) het grote vierkant a.h.w. "betegelen" met kleine vierkantjes, (2) van beide vierkanten de oppervlakte berekenen met behulp van de gepaste formule ("oppervlakte vierkant = zijde maal zijde"), (3) het algemeen principe "als de lengte (zijde) maal *r*, dan de oppervlakte maal r^2" toepassen. Voor cirkels (de C-variant) is de eerste strategie (nl. een exacte betegeling) onmogelijk, en wordt ook de tweede strategie moeilijker (omwille van de grotere complexiteit van en de geringe vertrouwdheid van de leerlingen met de betreffende formule). Voor grillige figuren (de G-variant) tenslotte valt ook de tweede oplossingsmethode weg (er bestaat immers geen formule) en kan men dus enkel nog terugvallen op de derde methode, nl. het algemeen principe toepassen.

Een positief effect van tekeningen kon niet door deze onderzoeksresultaten worden bevestigd: de variantie-analyse bracht aan het licht dat het percentage correcte antwoorden tussen beide toetsafnamen in geen van de drie groepen op significante wijze toenam, noch in het algemeen, noch in het bijzonder voor wat betreft de niet-proportionele items. Noch de instructie om een tekening te maken (Groep II), noch het aanbieden van een tekening (Groep III) bleken dus sterk genoeg om tegenwicht te bieden aan het overweldigend effect van de lineariteitsillusie bij deze 12-13-jarigen. Dit resultaat verraste ons aangezien het gebruik van tekeningen algemeen wordt erkend als een belangrijke heuristiek voor het representeren en oplossen van meetkundeproblemen (zie ook Pólya, 1945; Schoenfeld, 1992).

Enkele elementen van verklaring voor dit uitblijven van een faciliterend effect van tekeningen kwamen naar voren uit een nadere analyse van de antwoordbladen van de leerlingen. Daaruit bleek dat - voor de drie groepen samen - slechts bij 2% van de niet-proportionele items uit Toets 1 een tekening werd aangetroffen. De leerlingen maakten dus zelden of nooit *spontaan* een schets of tekening als onderdeel van hun oplossingsproces van de niet-proportionele items.

Uit de analyse van de notities van de leerlingen van Groep *II* bij Toets 2 bleek verder dat de expliciete instructie om een tekening te maken slechts bij 46% van de niet-proportionele items was opgevolgd. Daarenboven produceerden de leerlingen die de instructie wel opvolgden meestal een tekening met een geringe voorstellingswaarde (voor een voorbeeld van een zelfgemaakte tekening zonder en met een goede voorstellingswaarde, zie resp. de linkse en rechtse tekening uit Figuur 2).

Waarschijnlijk produceerden vele leerlingen tekeningen zonder goede voorstellingswaarde omdat ze niet echt begrepen wat ze met een tekening konden aanvangen in de verschillende fasen van het oplossingsproces (bijv. interpretatie- versus verificatiefase) en was het effect van de instructie "maak een tekening" daardoor zo gering (zie in dat verband ook Lesh, 1985).

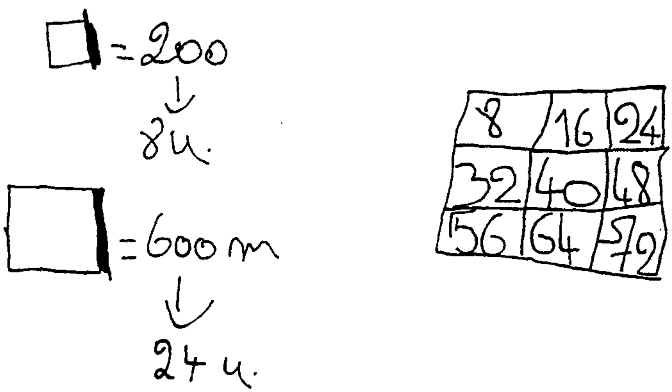

Fig. 2

Tenslotte gingen we ook na of de leerlingen van Groep III bij Toets 2 de gegeven tekeningen op de één of andere manier hadden "bewerkt". Deze analyse bracht aan het licht dat slechts 6% van deze tekeningen bij de niet-proportionele opgaven door de leerlingen "bewerkt" waren. Ook dit gegeven suggereert dat de leerlingen over het algemeen weinig of geen aandacht besteedden aan of gebruik maakten van de gegeven tekeningen (vermoedelijk omdat zij de symbolische taal van de aangeboden tekeningen niet zomaar verstonden).

3.3. Conclusie

De enorm sterke negatieve invloed van de lineariteitsillusie op het oplossen van vraagstukken over lengte en oppervlakte van gelijkvormige figuren, komt als belangrijkste conclusie van studie 1 naar voren. Deze invloed manifesteerde zich op een verschillende wijze naargelang van de aard van de figuur waarover een vraagstuk handelde. Een positief effect van zelfgemaakte of aangeboden tekeningen op het doorbreken van deze illusie werd niet door de onderzoeksresultaten bevestigd.

Het uitermate gering aantal correcte antwoorden van deze 12-13-jarigen op de niet-proportionele items roept evenwel onmiddellijk de vraag op hoe sterk deze illusie nog zou zijn bij leerlingen die ouder zijn en over een veel grotere "vakinhoudelijke bagage" beschikken om deze illusie te overwinnen. Daarom werd het eerste onderzoek hernomen bij een groep 15-16-jarigen.

4. Studie 2: een vervolgonderzoek bij 15-16-jarigen

4.1. Onderzoeksopzet en -materiaal

Het tweede onderzoek werd uitgevoerd op het einde van het schooljaar 1995-1996 in hetzelfde lyceum van de eerste studie. Alle 222 leerlingen van het vierde leerjaar van deze secundaire school namen eraan deel. Deze leerlingen volgden een brede waaier van studierichtingen van het algemeen secundair onderwijs.

In tegenstelling tot studie 1, werd de toets niet tweemaal afgenomen, maar werden de leerlingen direct ingedeeld in drie gelijkwaardige groepen op basis van verschillende leerlingenkenmerken: Groep I (waarin de leerlingen geen speciale aanwijzingen of hulp kregen), Groep II (waarin de leerlingen de instructie kregen om telkens eerst een tekening te maken) en Groep III (waarin er bij elk item een correcte tekening werd aangeboden). Verder werden in de toets dezelfde items gebruikt als in studie 1(cf. Tabel 1).

4.2. Resultaten

Tabel 3 geeft een overzicht van het percentage correcte antwoorden voor de drie groepen van 15-16-jarigen (I, II en III) voor de proportionele en de niet-proportionele items over vierkanten (V), cirkels (C) en grillige figuren (G).

Groep	Proportionele items			Niet-proportionele items		
	V	C	G	V	C	G
I	91	97	97	26	11	1
II	89	91	97	26	20	5
III	89	93	97	39	21	7

Tabel 3. Overzicht van de resultaten van studie 2

Studie 2 bracht aan het licht dat de 15-16-jarigen zich globaal genomen minder lieten verleiden tot een ongeoorloofde toepassing van lineaire modellen of redeneringen dan de 12-13-jarigen: voor de drie groepen samen bedroegen de percentages van correcte antwoorden op de proportionele en niet-proportionele items ditmaal respectievelijk 93% en 17% (te vergelijken met 92% en 2% in studie 1).

Net als in studie 1 verschilden de prestaties van de leerlingen naargelang de aard van de figuur waarover het vraagstuk handelt: er werden significant meer correcte antwoorden gegeven op de niet-proportionele items over vierkanten (30%) dan op de niet-proportionele items rond grillige figuren (4%). Enigszins tot onze verrassing stelden we bij de proportionele items een omgekeerde trend vast: significant meer correcte antwoorden op de G-items (97%) dan op de V-items (90%).

We vonden weerom geen effect van de factor "tekening": noch in Groep II (zelfgemaakte tekeningen), noch in Groep III (aangeboden tekeningen) presteerden de leerlingen significant beter op de niet-proportionele items dan in Groep I (de controlegroep). Nu kan men hieruit niet *zomaar* besluiten dat het werken met een tekening geen betekenisvolle, positieve invloed gehad heeft op het vinden van het correcte antwoord op de niet-proportionele items. Immers, zoals eerder beschreven in de resultaten van studie 1, werd de instructie om een tekening te maken (Groep II) vaak niet opgevolgd en werd er ook weinig (zichtbaar) gebruik gemaakt van de gegeven tekeningen (Groep III). Om dus te kunnen besluiten dat tekeningen geen effect hebben, zou eerst nog aangetoond moeten worden dat er geen samenhang is tussen het *effectief* maken van een tekening of het *effectief* gebruiken van een gegeven tekening enerzijds en het vinden van het correct antwoord op een niet-proportioneel item anderzijds.

Omwille van de extreem lage scores op de niet-proportionele items én van de zeer geringe aantallen spontaan gemaakte of "bewerkte" tekeningen in de eerste studie, was het niet mogelijk om deze mate van samenhang tussen tekening en antwoord bij de niet-proportionele items (statistisch) te analyseren. In studie 2 was dit - omwille van het groter aantal zelfgemaakte en/of bewerkte tekeningen bij en correcte antwoorden op de niet-proportionele items - wel mogelijk. Daartoe stelden we voor elk van de drie groepen een contingentietabel op met als variabelen "Tekening" en "Antwoord" en vervolgens toetsten we de (on)afhankelijkheid van deze variabelen met behulp van een χ^2-toets. Uit deze toetsingen kwam naar voren dat zowel het (al dan niet spontaan) maken van een tekening als het effectief gebruik maken van een gegeven tekening de kans verhogen op het ontdekken van de onjuistheid van een stereotiepe, proportionele redenering bij een niet-proportioneel item en bijgevolg ook op het vinden van de correcte oplossing. Anderzijds blijkt hieruit ook dat men het effect van deze tekeningen ook niet moet overschatten: het maken of gebruiken van een tekening zorgt er in geen geval voor dat men de juiste oplossing *gegarandeerd* vindt.

Doordat de 15-16-jarigen al wat meer correcte antwoorden gaven op de niet-proportionele items, was het ook mogelijk om via de analyse van de leerlingnotities te onderzoeken welke van de drie eerder beschreven oplossingswegen - de methode van het "betegelen", de weg van het gebruiken en uitrekenen van de gepaste formule of het toepassen van het algemene principe - door de leerlingen het meest gevolgd werd. Vastgesteld werd dat het toepassen van de relevante formule veruit de meest gebruikte aanpakstrategie was. Voor het niet-proportioneel item rond een vierkante figuur uit Tabel 1 betekent dit de oppervlakte van beide vierkanten effectief berekenen (200 x 200 = 40 000 m^2 en 600 x 600 = 360.000 m^2) en vervolgens de uitkomst bepalen van de deling 360 000 : 40 000, nl. 9. Negentig procent van de leerlingen die dit item correct beantwoordden, pasten deze tweede oplossingsvariant toe (soms in combinatie met één van de andere methoden); "zuivere" toepassingen van de eerste en de derde oplossingsmethode troffen we slechts in respectievelijk 7% en 3% van de gevallen aan. Vooral het geringe aandeel van de - hier toch voor de hand liggende – betegelingsstrategie was verrassend. Eigenlijk is "betegelen" een zeer eenvoudige, contextgebonden strategie, waarvoor in feite weinig of geen "schoolse" wiskundekennis vereist is. Dat zo weinig leerlingen van deze voor-de-hand-liggende informele strategie gebruik maakten, houdt wellicht verband met het in tal van onderzoeken vastgestelde denkbeeld ("belief") bij vele leerlingen en studenten dat het oplossen van een wiskundig probleem vooral een kwestie is van het vinden en toepassen van de juiste formule (zie ook Schoenfeld, 1992; Verschaffel & De Corte, 1997a, 1997b). Het feit dat de opgaven niet (expliciet) over "betegelen" handelden en bovendien werden geformuleerd in termen als "een vierkant stuk grond met zijde 200 m" (cf. Tabel 1), omschrijvingen die meer associaties oproepen met rekenboekjes dan met échte reële situaties, kan een bijkomende verklaring zijn waarom zoveel leerlingen hun toevlucht zochten in een algebraïsche benadering.

Tenslotte komen we nog even terug op de vaststelling dat bij de 15-16-jarigen de percentages correcte antwoorden op de niet-proportionele items in de verwachte richting lagen (hoogste scores op de V-items en laagste op de G-items), terwijl de percentages correcte antwoorden op de proportionele items in de omgekeerde richting lagen (hoogste scores op de G-items en laagste scores op de V-items). Uit een nadere analyse van deze foutieve antwoorden bleek dat die niet zelden te wijten waren aan ongepaste *niet-*proportionele redeneringen! Blijkbaar ontdekten de leerlingen dus bij vierkantige (en in mindere mate ook bij cirkelvormige) figuren gemakkelijker het niet-proportionele karakter van een gegeven situatie dan bij de grillige figuren, maar daar staat tegenover dat ze - wellicht als gevolg daarvan - bij die figuren ook sneller beginnen te twijfelen aan de bruikbaarheid van een lineair model in probleemsituaties waarvoor zo'n model wél past. Overigens, ook in de eerste studie waren er onder de zeldzame leerlingen die één of meerdere niet-proportionele items correct hadden opgelost, ook een paar die (daardoor?) bij één of meerdere gewone, proportionele items niet-proportioneel begonnen te redeneren.

4.3. Conclusie

Uit studie 2 komt naar voren dat 15-16-jarigen nog in zeer sterke mate worden beïnvloed door de lineariteitsillusie, al is het effect er iets minder overweldigend dan bij de 12-13-jarigen. In geen van beide leeftijdsgroepen was er een positief effect van zelfgemaakte of aangeboden tekeningen, al gaven de resultaten bij de 15-16-jarigen wel aan dat het *effectief* (gebruik) maken van een tekening de kans op het vinden van de juiste oplossing bij dit soort vraagstukken verhoogt.

Hoewel het foutief denkproces dat de leerlingen in beide studies volgden gemakkelijk kan omschreven worden - deze leerlingen volgden een proportionele redenering in probleemsituaties waarvoor dit ongepast is - is het veel moeilijker vast te stellen welke elementen tot de verkeerde denkweg van deze leerlingen hadden geleid. In principe kunnen hiervoor verschillende, al dan niet op elkaar inwerkende factoren, verantwoordelijk worden gesteld. Eén verklaringselement vormt de context waarin de leerlingen in deze studies getest werden. In dit verband rezen twee vragen. Ten eerste vroegen wij ons af of de leerlingen in deze studies hun beschikbare kennis en vaardigheden wel ten volle hadden ingezet. Ten tweede rees de vraag of de illustraties die wij in deze studies hadden gebruikt (cf. Figuur 1), het oplossingsproces van de leerlingen wel voldoende ondersteunden. Om dit uit te klaren werd een nieuw onderzoek opgezet waarin werd nagegaan welke de impact is van twee vormen van hulp op de prestaties van de leerlingen: (1) *metacognitieve hulp*, d.w.z. hulp om zich ervan bewust te worden dat men al z'n cognitieve mogelijkheden moet inzetten om de taak tot een goed einde te brengen en het zeker niet volstaat om op "automatische piloot" te werken, en (2) *visuele ondersteuning*, d.w.z. hulp om de opgaven op een grafische, informele wijze aan te pakken (bijv. door het afpassen van lengtes of het betegelen van oppervlaktes).

5. Studie 3: een onderzoek naar het effect van metacognitieve en visuele ondersteuning op het doorbreken van de lineariteitsillusie bij 12-13- en 15-16-jarigen

5.1. Onderzoeksopzet en -materiaal

Studie 3 werd uitgevoerd eind februari 1997 in twee Vlaamse secundaire scholen uit een andere geografische regio dan die van het lyceum waarin de twee voorgaande studies plaatshadden. Alle leerlingen van het eerste en het vierde jaar van de betrokken scholen (resp. 260 12-13- en 125 15-16-jarigen) namen aan het onderzoek deel. Zij werden via matching aan vier experimentele groepen toegewezen. In deze experimentele groepen werd dezelfde schriftelijke toets afgenomen als in de twee voorgaande studies (cf. Tabel 1), maar de hulp die de leerlingen daarbij kregen, was in elk van de vier groepen verschillend. In Groep M-V- (= geen metacognitieve en geen visuele hulp), kregen de leerlingen geen hulp bij het oplossen van de toets. In Groep M+V- (= de groep met metacognitieve hulp), werd de toets voorafgegaan door de volgende niet-proportionele opgave over een kubus:

> *"Een houten kubus met zijde 2 cm weegt 6 gram. Hoeveel weegt een houten kubus met zijde 4 cm?"*

Voor deze opgave werden twee antwoordalternatieven gegeven, voorgesteld als de oplossingen van twee leerlingen Wim en Stef. Daarna werd gevraagd welke oplossing volgens hen correct is, die van Wim of die van Stef. Op de antwoordbladen van de leerlingen werd dit als volgt geformuleerd:

> *"Twee leerlingen, Wim en Stef, geven een verschillende oplossing voor dit vraagstuk.*
> *Wim denkt als volgt: 4 cm is twee keer zo lang als 2 cm, dus moet ik het gewicht ook met twee vermenigvuldigen. Als ik dat doe bekom ik 6 gram x 2 = 12 gram.*
> *Stef denkt als volgt: In een kubus met zijde 4 cm gaan er 8 kubusjes met zijde 2 cm. Het gewicht moet dus ook 8 keer groter worden. Het antwoord is dus 6 gram x 8 = 48 gram.*
> *Welke leerling heeft gelijk? Wim of Stef?"*

Wim vertolkt de dominante misvatting dat het gewicht (volume) en de zijde (ribbe) van een kubus proportioneel zijn (NCTM, 1989). Stef redeneert terecht dat dit gewicht verachtvoudigt bij verdubbeling van de zijde. De confrontatie met deze twee redeneringen plaatst de leerlingen voor een cognitief conflict, hetgeen een beproefde strategie is om lerenden te doen twijfelen aan de hen vertrouwde opvattingen en ideeën en hen nieuwe wegen te doen inslaan (Forman & Cazden, 1985; Piaget, 1985). In de Groep M-V+ (= de groep met visuele ondersteuning) werd bij elke opgave een correcte tekening aangeboden, maar in tegenstelling tot de twee voorgaande studies, werden deze tekeningen ditmaal op ruitjespapier aangeboden. Het ruitjespapier bestond uit vierkantjes van 1 cm^2. Bij de items rond vierkante figuren werd er bovendien voor gezorgd dat zoveel mogelijk zijden van het vierkant samenvielen met lijnen van het ruitjespapier. Leerlingen kregen in deze conditie dus de kans om lengtes en oppervlaktes van figuren op grafisch-informele wijze te bepalen. In de Groep M+V+ (= groep met metacognitieve en visuele ondersteuning) tenslotte werden beide vormen van hulp gecombineerd.

5.2. Resultaten

Tabel 4 geeft een overzicht van het percentage correcte antwoorden van de 12-13- en de 15-16-jarigen in de vier experimentele groepen (M+V+, M+V-, M-V+ en M-V-) voor de proportionele en de niet-proportionele items over vierkanten (V), cirkels (C) en grillige figuren (G).

Groep	12-13-jarigen						15-16-jarigen					
	Proportionele items			Niet-proportionele items			Proportionele items			Niet-proportionele items		
	V	C	G	V	C	G	V	C	G	V	C	G
M+V+	84	90	91	24	10	0	87	78	97	60	23	8
M+V-	92	100	95	9	3	0	74	80	97	44	21	12
M-V+	95	98	90	19	8	2	82	87	97	29	18	3
M-V-	92	98	95	8	5	1	90	94	98	32	15	2

Tabel 4. Overzicht van de resultaten van studie 3

Studie 3 bevestigde nogmaals de enorm sterke invloed van de lineariteitsillusie bij 12-16-jarigen die geconfronteerd werden met vraagstukken over lengte- en oppervlakteberekening in gelijkvormige vlakke figuren. Bovendien kwamen ook gelijkaardige effecten aan het licht wat betreft de rol van de leeftijd als wat de invloed van de aard van de figuur betreft waarop de opgave betrekking heeft.

Wat de invloed van de aangeboden metacognitieve en visuele ondersteuning betreft, kwam uit het onderzoek naar voren dat van beide vormen van hulp een significante positieve invloed uitging op de prestaties van de leerlingen voor de niet-proportionele items. De leerlingen van de M+ groepen gaven significant meer correcte antwoorden op de niet-proportionele items dan de leerlingen van de M- groepen (resp. 18% en 12%). Ook in de V+ groepen lag het percentage correcte antwoorden op deze items significant hoger dan in de V- groepen (resp. 17% en 13%). Hoewel van beide vormen van hulp dus een positief effect uitging, moet men dit resultaat ook relativeren: de stijging blijft in beide hulp-condities beperkt tot ongeveer 5% en de scores op de niet-proportionele items komen nog steeds niet boven de 20% uit! Van metacognitieve hulp ging al bij al nog het sterkste effect uit, maar dit effect manifesteerde zich vooral bij de leerlingen van het vierde jaar en bij de eenvoudigste opgaven over regelmatige figuren. Het (geringere) effect van visuele ondersteuning manifesteerde zich daarentegen in gelijke mate bij beide leeftijdsgroepen en bij de verschillende niet-proportionele opgaven in de toets. Tenslotte bleek ook dat beide vormen van ondersteuning elkaar niet versterkten: de scores van de leerlingen in de M+V+ groep lagen niet significant hoger dan in de M+V- of de M-V+ groep.

Als keerzijde van de betere resultaten op de niet-proportionele opgaven ten gevolge van de aangeboden hulp, gingen de scores op de proportionele opgaven in deze condities steevast achteruit. In Figuur 3 wordt de interactie tussen de variabelen "Metacognitieve hulp" en "Proportionaliteit" (proportionele versus niet-proportionele items) grafisch weergegeven: tegenover de eerder vermelde stijging van de scores op de niet-proportionele items (van 12% in de M- groepen naar 18% in de M+ groepen) staat een - eveneens significante - daling van de scores op de proportionele items (van 93% in de M- groepen naar 89% in de M+ groepen). Voor de andere hulp-factor werd iets analoogs gevonden: tegenover de significant betere prestaties van de leerlingen met visuele ondersteuning op de niet-proportionele items (13% correcte antwoorden op deze items in de V- groepen tegenover 17% in de V+ groepen), stonden zwakkere prestaties van deze leerlingen op de proportionele items (92% in de V- groepen tegenover 90% in de V+ groepen), al was dit laatste verschil wel te klein om significant te zijn (zie Figuur 4). Via aangepaste hulp komen leerlingen blijkbaar iets makkelijker tot het inzicht dat een gegeven situatie niet-proportioneel is, maar ten gevolge daarvan gaan ze vaak ook niet-proportioneel redeneren in proportionele situaties. We herinneren eraan dat bij de 15-16-jarigen van studie 2 een gelijkaardig effect werd vastgesteld met betrekking tot de aard van de figuur (cf. 4.2). Ook in verscheidene andere studies over strategische en conceptuele verandering werden vergelijkbare resultaten gerapporteerd (Siegler & Jenkins, 1989; Vosniadou, 1994).

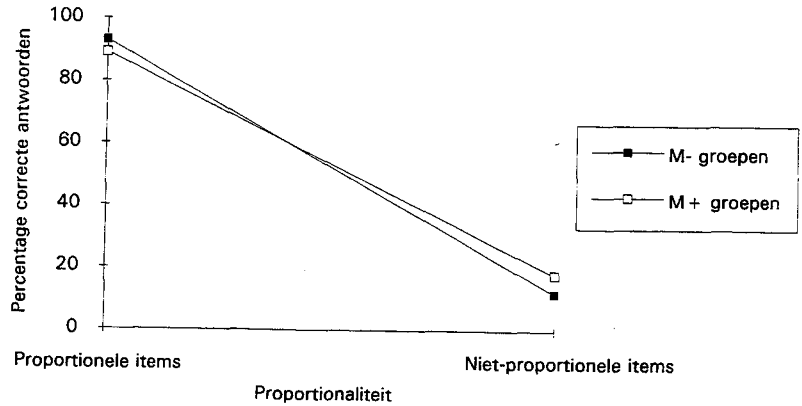

Fig. 3

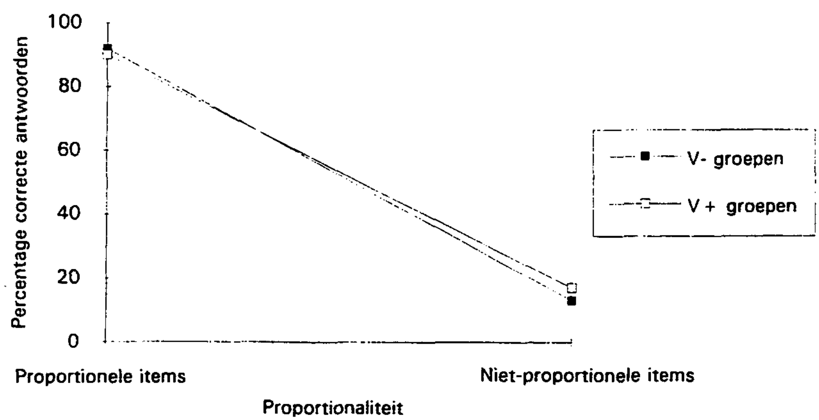

Fig. 4

5.3. Conclusie

Studie 3 bevestigt de enorm sterke impact van de lineariteitsillusie bij 12-16-jarigen die geconfronteerd worden met toepassingsopgaven over lengte en oppervlakte van gelijkvormige vlakke figuren. Bovendien bracht deze studie significante effecten van metacognitieve hulp en visuele ondersteuning aan het licht, maar hoewel beide vormen van hulp de prestaties van de leerlingen op de niet-proportionele items positief beïnvloedden, was de grootte van deze effecten al met al erg klein. Dit wijst erop hoe moeilijk het is de "lineaire illusie" bij leerlingen te doorbreken en zo de weg vrij te maken voor de verwerving van nieuwe wiskundige modellen en hun bijbehorende toepassingsdomein.

6. Discussie

De gerealiseerde studies leverden empirische gegevens op over de omvang en de hardnekkigheid van de *lineariteitsillusie bij het oplossen van problemen* over lengte en oppervlakte van gelijkvormige vlakke figuren door leerlingen van het secundair onderwijs. De vraag of de gevonden sterkte van de lineariteitsillusie typisch is voor vraagstukken rond gelijkvormige meetkundige figuren dan wel bij andersoortige toepassingsopgaven even sterk is, kan op basis van deze studies uiteraard niet beantwoord worden. Daarvoor is verder onderzoek vereist waarin de relatieve sterkte van de lineariteitsillusie nagegaan wordt bij verschillende categorieën van probleemsituaties.

Verder onderzoek zou ook een licht kunnen werpen op de relaties tussen de lineariteitsillusie en het brede domein van de zgn. "misconcepties" (of "preconcepties" of "alternatieve concepties") en "illusies" van leerlingen bij het leren van wiskunde en natuurwetenschappen. In de inleiding hadden we het reeds over een mogelijk verband tussen het onterecht proportioneel redeneren van leerlingen in bepaalde situaties en het fenomeen van de *optische illusies*. Een verwante, maar in zekere zin primitievere misvatting dan de illusie van lineariteit, is die van het additief redeneren in situaties waarin (eerder) een multiplicatieve redenering van toepassing is (bijv. in de context van de lineaire vergroting van een figuur, wordt geredeneerd dat alle lengtes met een constante worden *vermeerderd*, in plaats van vermenigvuldigd). Deze *additieve illusie* werd in talrijke studies vastgesteld en blijkt vooral bij basisschoolleerlingen die de overstap maken van de additieve naar de multiplicatieve structuren, een heel sterke impact te hebben (zie bijv. Hart, 1981; Karplus, Pulos & Stage, 1983; Lin, 1991; Streefland, 1988). Een overeenkomst met de lineaire illusie is dat leerlingen in beide gevallen een meer elementair wiskundig model (over)generaliseren voorbij de grenzen van zijn toepassingsdomein. Er bestaan ook raakpunten tussen de lineariteitsillusie en de zgn. *constantie-illusie* of de *intuïtieve regel "Gelijke A - gelijke B"* (zie bijv. Tsamir, Tirosh & Stavy, 1998), - een regel die regelmatig opduikt wanneer leerlingen eigenschappen van meetkundige figuren formuleren (bijv. "driehoeken met gelijke hoeken hebben gelijke zijden", "vierhoeken met gelijke zijden hebben gelijke hoeken", "veelhoeken met hetzelfde aantal zijden hebben hetzelfde aantal diagonalen", enz.). Zo denken bijv. vele leerlingen spontaan dat vlakke figuren met dezelfde omtrek ook dezelfde oppervlakte hebben of dat ruimtefiguren met dezelfde manteloppervlakte ook dezelfde inhoud hebben (voor enkele klassieke voorbeelden, zie bijv. Castelnuovo & Barra, 1980). Dat zulke leerlingen ook geen onderscheid maken tussen de schaalfactoren die op deze grootheden van een verschillende dimensie van toepassing zijn, ligt in de lijn der verwachtingen.

Meer specifiek in verband met de drie studies waarover in dit artikel gerapporteerd werd, blijft evenwel de vraag *waarom* de leerlingen zich zo massaal lieten vangen aan de lineariteisillusie, zelfs in de twee hulp-condities van studie 3. Verklaringselementen kunnen worden gezocht in de context waarin de leerlingen in deze studies getest werden. Om hierin verder klaarheid te brengen, werken wij momenteel aan twee nieuwe studies waarin enkele nieuwe aspecten van deze context nader onder de loep worden genomen.

In een eerste studie zal worden nagegaan in hoeverre de teleurstellende prestaties van de leerlingen mede een gevolg waren van het niet zo realistische en weinig uitdagend karakter van de opgaven waarmee gewerkt werd (cf. Tabel 1). We herinneren eraan dat Streefland (1984) en Treffers (1987) hebben vastgesteld dat leerlingen die de kans kregen de invloed van lineaire vergroting op oppervlakte en volume te exploreren in aantrekkelijke, realistische contexten, niet of nauwelijks in de "lineaire valstrik" trapten. Voor de realisatie van zo'n context wordt opnieuw gedacht aan "Gulliver's travels" van Jonathan Swift. In het onderzoek zal een experimentele groep van leerlingen eerst de kans krijgen om zich, via enkele fragmenten uit een film over dit klassieke verhaal, in te leven in het bezoek van Gulliver aan het eiland van de Lilliputters, een wereld waarin alles 12 keer kleiner is. In deze fragmenten krijgen zij ook verschillende objecten uit beide werelden naast elkaar te zien. Daarbij aansluitend zullen zij dan geconfronteerd worden met een aantal opgaven gekoppeld aan deze filmfragmenten en handelend over lengtes, oppervlaktes en volumes in de wereld van de Lilliputters. Een controlegroep zal wiskundig gezien equivalente opgaven aangeboden krijgen, maar dan geformuleerd als kale rekensommen.

Een tweede vraag in verband met de context waarin de leerlingen in de gerapporteerde studies getest werden, betreft de mogelijke invloed van de wijze van probleemformulering op het antwoordgedrag van de leerlingen. In deze studies werden de experimentele items steeds aangeboden in een opgavestructuur gekenmerkt door drie gegeven getallen (a, b en c) waaruit de leerlingen dan een onbekend getal x dienden te berekenen (cf. Tabel 1). Bij een proportionele opgave is deze onbekende oplossing van een vergelijking van de vorm $a/b = c/x$. Wij vermoeden dat sommige leerlingen, ten gevolge van het onderwijs dat zij genoten hebben, deze "ontbrekende-waarde"-structuur eenzijdig met proportionele opgaven hebben leren associëren en dat zij bijgevolg niet door een verkeerd inzicht in een wiskundig concept (het effect van een lineaire vergroting op oppervlakte), maar door deze stereotiepe probleemformuleringswijze in de "lineaire valkuil" werden gelokt. Om dit uit te klaren loopt momenteel een onderzoek (De Bock, Verschaffel, Janssens & Rommelaere, 1999) waarin leerlingen wiskundig gelijkwaardige items over het effect van lineaire vergroting op oppervlakte en volume aangeboden krijgen, maar dan geformuleerd als vergelijkingsopgaven waarbij de lineaire schaalfactor (r) gegeven is en de oppervlakte- of volumeschaalfactor (resp. r^2 of r^3) moet worden bepaald (bijv., variërend op item 2 in Tabel 1: "Boer Karel heeft vandaag een vierkant stuk grond bemest. Morgen moet hij een vierkant stuk grond bemesten waarvan de zijde driemaal zo groot is. Hoeveel keer meer tijd zal hij ongeveer nodig hebben om dit stuk grond te bemesten?").

Meer algemeen kan de ongemeen sterke manifestatie van de lineariteitsillusie en het geringe effect van verschillende vormen van hulp zoals wij in de reeds verrichte studies hebben vastgesteld worden toegeschreven aan kenmerken van het wiskundeonderwijs dat de leerlingen gevolgd hebben, in het bijzonder aan de geringe aandacht die dit onderwijs besteedt aan activiteiten als visualiseren en modelleren. Nochtans zijn dergelijke activiteiten van essentieel belang voor het vormen van solide inzichten in tal van wiskundige domeinen. Bij wijze van voorbeeld refereren wij in dit verband naar de prachtige analyse van Simon (1995) van hoe leerlingen via visualiseringsactiviteiten rond oordeelkundig gekozen probleemsituaties inzicht verwerven in het begrip oppervlakte en in de relatie tussen het meten van een oppervlakte en het vermenigvuldigen van lengtes. Wat de studie van proportionaliteit betreft, rijst het vermoeden dat leerlingen in het onderwijs weliswaar veel ervaring opdoen met redeneringen *binnen* het proportioneel model, maar dat de geschiktheid van dit model voor een gegeven situatie (bijv. in concurrentie met aanverwante wiskundige modellen zoals algemene eerstegraadsfuncties, antiproportionele of exponentiële modellen) maar zelden het voorwerp van reflectie en discussie uitmaakt. Doch daar zal in de nabije toekomst verandering in komen. In de recent ontwikkelde Vlaamse eindtermen voor het lager onderwijs en de eerste graad van het secundair onderwijs krijgt het leren wiskundig modelleren een centrale plaats toebe-deeld (Vanotterdijk, 1995; Verschaffel, 1995). Indien in het elan van deze recente vernieuwing van de doelen van het wiskundeonderwijs ook aangepaste onderwijsleermiddelen en nascholingsprogramma's voor leraren worden ontwikkeld, is er goede hoop dat onze leerlingen in de toekomst beter zullen gewapend zijn tegen de valstrik van de lineariteitsillusie, zowel in het algemeen als in het bijzonder bij problemen over lengte en oppervlakte van gelijkvormige vlakke figuren. Waardevolle bouwstenen voor het ontwikkelen van deze materialen zijn reeds te vinden in het Utrechtse Wiskobas-materiaal (zie bijv. Treffers, 1987), maar ook in een aantal meer recente wiskunde-methoden (zie bijv. Groupe d'Enseignement Mathématique, 1994; Lawrence Hall of Science, 1994; NCTM, 1994). Ook de experimentele manipulaties die we in onze constaterende toetsen evalueerden (leerlingen meer bewust maken, authentischer maken van taken,...), kunnen dit proces mee richting geven.

Noten

1. Dit artikel is een bewerking van een tekst die de auteurs eerder publiceerden in *Educational Studies in Mathematics* (De Bock, Verschaffel & Janssens, 1998a), en van een presentatie op de *International Conference on Symbolizing and Modelling in Mathematics Education* (De Bock, Verschaffel & Janssens, 1998b).
2. Met dank aan dr. Koeno Gravemeijer voor zijn waardevolle ideeën en opmerkingen bij de eerste versie van dit artikel.

Literatuur

Berté, A. (1993). *Mathématique dynamique.* Paris: Nathan.

Bock, D de., Verschaffel L. & Janssens, D. (1998a). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 65-83.

Bock, D. de, Verschaffel L. & Janssens, D. (1998b). *The influence of metacognitive and visual scaffolds on the predominance of the linear model,* Poster presented at the International Conference on Symbolizing and Modelling in *Mathematics Education*, June 17-19. Utrecht, The Netherlands.

Bock, D. de, Verschaffel, L. Janssens D. & Rommelaere, R. (1999). *Op zoek naar de wortels van de lineariteitsillusie: Een kwestie van probleem-*

formulering?, Paper gepresenteerd op de Onderwijs Research Dagen 1999, Mei 20-21. Nijmegen, Nederland.
Castelnuovo, E. & Barra, M. (1980). *Mathématique dans la réalité.* Paris: CEDIC.
Daumas, D. (1989). La démonstration de l'irrationalité chez les grecs. In: Commission interIREM Histoire et Epistémologie des Mathématiques, *La démonstration dans l'histoire* (pp. 389-423). Lyon: IREM.
Forman, E.A. & Cazden, C.B. (1985). Exploring Vygotskian perspectives in education. The cognitive value of peer interaction. In: J.V. Wertsch (ed.), *Culture, communication, and cognition: Vygotskian perspectives* (pp. 323-347). New York: Cambridge University Press.
Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel.
Groupe d'Enseignement Mathématique (1994). *De question en question. Mathématiques 2.* Brussel: Didier Hatier.
Hart, K.M. (1981). *Children's understanding of mathematics, 11-16.* London: Murray.
Karplus, R., Pulos, S. & Stage, E.K. (1983). Early adolescents proportional reasoning on "rate" problems, *Educational Studies in Mathematics,*, 14, 219-233.
Lawrence Hall of Science (1994). *Equals investigations. Flea-sized surgeons.* Berkeley, CA: University of California.
Lesh, R. (1985). Conceptual analyses of mathematical ideas and problem solving processes. In: L. Streefland (ed.). *Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 73-96). Utrecht: OW&OC.
Lin, F.L. (1991). Characteristics of "adders" in proportional reasoning, *Proceedings of the National Science ROC(D) 1,* 1, 1-13.
National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.
National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics addenda series Grades 5-8. Understanding rational numbers and proportions.* Reston, VA: NCTM.
Piaget, J. (1985). *The equilibration of cognitive structures: The central problem of intellectual development.* Chicago: University of Chicago Press.
Pólya, G. (1945; 2nd edition, 1957). *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press.
Rouche, N. (1989). Prouver: amener à l'évidence ou contrôler des implications? In: Commission inter-IREM Histoire et Epistémologie des Mathématiques. *La démonstration dans l'histoire* (pp. 8-38), Lyon: IREM.
Rouche, N. (1992). *Le sens de la mesure.* Brussel: Didier Hatier.
Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In: D.A. Grouws (ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.
Siegler, R.S. & Jenkins, E.A. (1989). *How do children discover new strategies?* Hillsdale, NJ: Erlbaum.
Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26,* 114-145.

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio. Some thoughts on the long term learning process (Towards a theory). Part I: Reflections on a teaching experiment. *Educational Studies in Mathematics, 16,* 7594.
Streefland, L. (1988). *Realistisch breukenonderwijs. Onderzoek en ontwikkeling van een nieuwe leergang.* Utrecht: OW&OC.
Streefland, L. (1997). Een geval van reflectief denken in ontwikkeling met verhouding als paradigma (slot). *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs, 15,* 3, 22-31.
Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description. The Wiskobas project.* Dordrecht: Reidel.
Tsamir, P., Tirosh, D. & Stavy, R. (1998). Do equilateral polygons have equal angles? In: A. Olivier & K. Newstead (eds.). *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 137-144). Stellenbosch: University of Stellenbosch.
Vanotterdijk, R. (1995). Toelichting bij de visie achter het voorstel van eindtermen 1ste graad SO. *Wiskunde & Onderwijs, 21,* 4-53.
Verschaffel, L. (1995). Visies op reken/wiskundeonderwijs op de basisschool. In: L. Verschaffel & De Corte E. (red.). *Naar een nieuwe reken/wiskundedidactiek voor de basisschool en de basiseducatie. Deel 1: Achtergronden* (pp. 95-128). Brussel/Leuven: Studiecentrum Open Hoger Onderwijs (StOHO)/Acco.
Verschaffel, L. & De Corte, E. (1997a). Teaching realistic mathematical modelling in the elementary school. A teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in Mathematics Education, 28,* 577-601.
Verschaffel, L. & De Corte, E. (1997b). Word problems. A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school. In: T. Nunes & P. Bryant (eds.). *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 69-98). Hove, UK: Psychology Press.
Vosniadou, S. (1994). Knowledge representation and organization. In: T. Husen & N. Postletwhaite (eds.). *The international encyclopedia of education* (2nd edition, pp. 3151-3155). Oxford: Pergamon.