Modelleren als organiserende activiteit in het wiskunde-onderwijs

M. Doorman, K. Gravemeijer
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht en Vanderbilt University

Summary
In dit artikel beschrijven we een hypothetische leerroute waarlangs leerlingen formele wiskunde kunnen her-uitvinden. Het betreft een leerroute voor differentiaal- en integraalrekening die is geïnspireerd door de geschiedenis van de wiskunde en de kinematica. Centraal in deze geschiedenis staat het modelleren van bewegingen met discrete functies en grafieken. We laten zien hoe deze geschiedenis beschreven kan worden in termen van een proces van progressief mathematiseren. Tijdens dit proces ontwikkelt de discrete grafische benadering zich van model van bewegingen tot model voor redeneringen in differentiaal- en integraalrekening. Daarmee geven we de activiteit van het modelleren van bewegingen een centrale plaats in een geïntegreerde wis- en natuurkunde leergang, waarin een wederzijdse ondersteuning wordt verwacht van de ontwikkeling van inzicht in de kinematica en in integraal- en differentiaalrekening.

1. Inleiding

In alle natuurwetenschappelijke vakken is er sprake van wiskundige modellen. Modellen en wiskunde lijkt derhalve een vanzelfsprekende combinatie. Modelleren bestaat in die context in het algemeen uit het beschrijven van een fenomeen in een toepassingssituatie met behulp van kant-en-klaar wiskundig gereedschap. Wiskundig modelleren krijgt daarmee sterk het karakter van het vertalen van een probleemsituatie in wiskundige termen.

Een heel andere vorm van modelleren is aan de orde, als het wiskundige gereedschap niet direct beschikbaar is. Dan geeft de probleemsituatie aanleiding tot allerlei informele, situatie-specifieke beschrijvingen. Zo kan het zinvol zijn een schetsje te maken, afkortingen te gebruiken of om specifieke symbolen in te voeren. Tijdens dit modelleren worden wiskundige middelen ontwikkeld.

Deze laatste vorm van modelleren staat veel dichter bij het idee van "wiskunde als menselijke activiteit" (Freudenthal, 1991) dan de eerste, waarin de wiskunde meer als produkt naar voren komt. De keuze voor wiskunde als activiteit betekent hier niet dat het eindproduct weinig waarde heeft, de activiteit is een middel om de scheiding tussen formele wiskunde en informele strategieën te overbruggen. Dit idee van progressief mathematiseren vormt de kern van het zo geheten realistische reken-wiskundeonderwijs. Globaal komt het hier op neer, dat leerlingen de gelegenheid moet worden geboden om wiskunde her-uit- te-vinden via het mathematiseren van zaken uit de realiteit enerzijds, en het mathematiseren van eigen wiskundige activiteit anderzijds. Het her-uit-vinden van wiskunde door leerlingen kan een oplossing zijn voor de vaak gesignaleerde kloof tussen informele kennis en formele wiskun-

de. Dit probleem vormt de kern van het artikel: *Hoe kunnen we leerlingen helpen zich formele wiskunde eigen te maken?*
We benaderen het probleem vooral vanuit het perspectief van de ontwikkelaar van lesmaterialen. De taak van de ontwikkelaar van realistisch rekenwiskundeonderwijs is het uitstippelen van een route waarlangs de formele wiskunde ontwikkeld wordt.

Als voorbeeld nemen we een korte, aanvankelijke leerlijn rond differentiaal- en integraalrekening. Eerst volgen we Tall met zijn kritiek op een traditioneel ontwerp voor zo'n leerlijn. Vervolgens laten we enkele alternatieven zien, waaronder een "realistische" benadering. Deze realistische benadering is geïnspireerd door de geschiedenis van de wiskunde. Dat betekent echter niet dat leerlingen volgens realistisch wiskundeonderwijs nogmaals de historische lijn van ontdekkingen moeten doorlopen. Het her-uitvinden slaat op het uitvinden van wiskunde die reeds geformuleerd is, de geschiedenis kan hierbij als inspiratiebron dienen.
Het voorbeeld beschrijft hoe Galileï de basisprincipes voor het integreren van functies ontwikkelde, terwijl hij onderzoek deed naar de relaties tussen afstand, snelheid en tijd van vallende objecten. We zullen laten zien dat deze historie kan worden beschreven in termen van een proces van progressief mathematiseren. Eerst worden grafieken uitgevonden als middel om bewegingen te beschrijven en later vormen grafieken de basis van studie in differentiaal- en integraalrekening. Daarmee raken we de kern van dit artikel. De grafieken ontwikkelen zich van *model van* bewegingen tot *model voor* integraal- en differentiaalrekening.

2. Een traditionele aanpak en enkele alternatieven

Traditioneel

Volgens Tall maken wiskundigen vaak de volgende denkfout bij het ontwerpen van een leerlijn (Tall 1991, p. 17). Een wiskundige neemt een gecompliceerd wiskundig onderwerp en simplificeert het door het op te breken in kleinere onderdelen in een (wiskundig gezien) logische volgorde. Vanuit het gezichtspunt van de expert vormen de onderdelen een geheel. Maar de leerling ziet elk onderdeel als een geïsoleerd stukje leerstof, als een stukje van een puzzel, terwijl nog niet duidelijk is hoe de puzzel er uiteindelijk uit zal zien. Het kan zelfs zo zijn dat een leerling zich van ieder stukje een geïsoleerd beeld vormt, zonder dat alle stukjes bij elkaar ooit een geheel vormen.

Tall illustreert deze werkwijze met een analyse van de afgeleide functie. Voor het begrip afgeleide $f'(x)$ heb je het begrip limiet nodig, namelijk de limiet van het differentiequotiënt $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ voor h naar 0.

Het begrip limiet moet dus vooraf gaan aan het begrip afgeleide. Het proces van het nemen van die limiet is eenvoudiger als eerst de limiet voor een vaste x wordt bepaald. De volgende stap is dan om x te laten variëren om zo het idee te geven van een afgeleide functie. Vanuit de formele wiskunde geredeneerd ontstaat de volgende leerlijn:

1. *begrip limiet*
2. *de limiet voor* $x = a$: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *waarbij h naar 0 gaat:* $f'(a)$
3. *in plaats van a kun je daar ook x zien, laat x variëren en zo ontstaat de afgeleide functie* $f'(x)$.

Voor de leerling is de eerste stap al mysterieus en komt uit de lucht vallen, met bovendien alle cognitieve problemen die het limietbegrip met zich meebrengt. Het andere grote probleem is de overgang van stap 2 naar 3, waarbij het berekenen van de limiet een geheel andere activiteit is, dan het zien van $f'(x)$.als functie waarvan de functiewaarden aangeven wat de helling is van de grafiek van $f'(x)$..

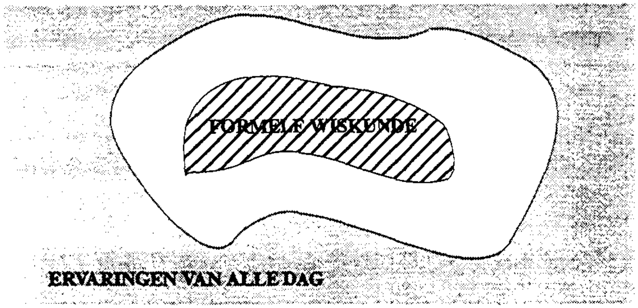
Alternatief

Bij de ontwikkeling van een leerlijn moet volgens Tall gezocht worden naar contexten van waaruit cognitieve groei mogelijk is (zie Bishop, 1996). Dat wil zeggen contexten die de wiskunde concreet maken en die betekenisvol wiskundig denken mogelijk maken.

Hij pleit voor meer visualisatie van wiskundige concepten in het onderwijs. Het is belangrijk om leerlingen eerst een kwalitatieve, globale kennismaking met een wiskundig begrip te geven. Een mogelijkheid om dit te doen is met behulp van computerprogramma's waarmee leerlingen wiskundige concepten kunnen exploreren. De handelingen van de leerlingen zijn dan beperkt tot de aspecten van het probleem die de wiskundige kern omvatten en die kenmerkend zijn voor die kern. Zo'n kennismaking moet vervolgens de behoefte voor een formele beschrijving van de theorie creëren. Zulke exploratieve computer-omgevingen noemt Tall "generic organisers". Enkele voorbeelden daarvan zijn onderdelen uit het computerprogramma Vu-Grafiek (Blokland, 1990), zoals Uitvergroten en Differentiëren (Tall, 1985, 1986).

Tall (Bishop, 1996) observeert echter dat de overgang van betekenisvolle discussies rond die generic organisers naar formele redeneringen een probleem bij deze aanpak is. Leerlingen blijken vaak een definitie, die gebaseerd is op het werken met zo'n generic organiser, te zien als een beschrijving of een model van wat de computer doet, in plaats van als een wiskundige definitie die je kunt gebruiken voor formele redeneringen. Het lijkt erop dat die visuele exploratie teveel op zichzelf staat. In Tall's alternatief is de relatie tussen grafieken en contexten beperkt tot een introductie-fase. De functies en grafieken zijn hoofdzakelijk objecten in een abstracte wiskundige wereld.

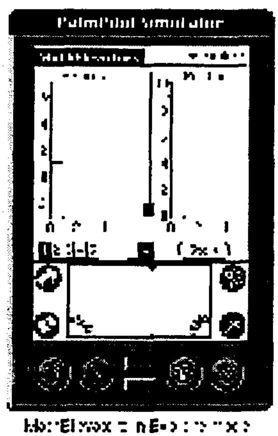
Kaput (1994a) probeert juist de relatie tussen het wiskundige systeem en alledaagse fenomenen te benadrukken. Hij typeert formele wiskunde en alledaagse ervaringen als twee disjuncte entiteiten in wat hij noemt het Eiland Probleem (zie figuur 1).



Figuur 1: Het eiland probleem volgens Kaput.

Het probleem is, volgens Kaput, de kloof tussen het eiland van de formele wiskunde en het vaste land van de alledaagse ervaringen. Deze kloof ontstaat volgens hem vooral doordat wiskundige functies gedefinieerd worden door algebraïsche formules, terwijl empirische functies alledaagse fenomenen beschrijven. Welke functies uit de realiteit zijn tenslotte gegeven door een gesloten algebraïsche formule?

Om dit probleem op te lossen zoekt Kaput situaties waarbij leerlingen zo goed mogelijk gebruik kunnen maken van hun eigen kennis van alledaagse zaken om grip te krijgen op formele representaties. Een voorbeeld van zo'n situatie is geïmplementeerd in MathCars. Dit programma gebruikt een simulatie van een autootje. Op het scherm zie je de auto en enkele meters van het dashboard. Op het dashboard kun je naast de gebruikelijke meters ook een afstand-tijd en een snelheid-tijd grafiek zien. De kracht van het programma is de verbinding tussen al deze grafische representaties (auto, meters en grafieken). Hiermee kunnen leerlingen allerlei vermoedens formuleren en testen over de grafische representaties.

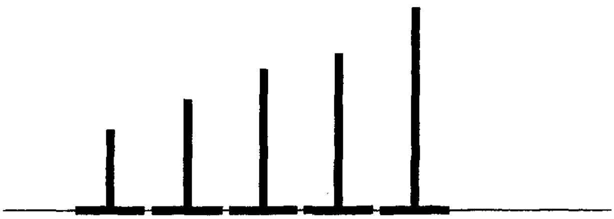


Figuur 2: MathCars in explore-mode.

Het idee is dat leerlingen de samenhang tussen de representaties ontdekken door met zo'n simulatie te werken. Vervolgens zullen ze direct de relatie begrijpen tussen die samenhang en de buitenwereld die door de simulatie wordt weergegeven. Een kanttekening bij Kaput's idee is dat hij een kant-en-klaar systeem als uitgangspunt neemt, dat consistent is met zijn beeld van een wiskundig systeem. Het programma is echter een kunstmatig systeem dat niet uit de leefwereld van leerlingen komt. Het kan heel goed zijn dat voor leerlingen de verbindingen tussen de grafische representaties helemaal geen logisch of consistent geheel vormen.

De activiteiten voor de leerlingen met dergelijke computerprogramma's richten zich vooral op het exploreren van een computermodel. Doerr (1997) zet twee activiteiten tegenover elkaar: aan de ene kant het ontwerpen van modellen en aan de andere kant het exploreren van modellen. Naast de exploratieve benadering van modellen staat de aanpak waarbij het uitgangspunt is dat leerlingen zelf modellen ontwikkelen. Leerlingen moeten dan zelf specificeren wat de variabelen zijn en onderzoeken hoe die kunnen samenhangen.

De mogelijkheden van het ontwerpen van (grafische) modellen door leerlingen blijkt uit een onderzoek van DiSessa e.a. (DiSessa, 1991). Zij beschrijven hoe leerlingen zelf grafieken ontwerpen voor het beschrijven van een beweging. De bedoeling was om leerlingen voor te bereiden op het interpreteren van afstand-tijd en snelheid-tijd grafieken, maar het bleek uit de klassegesprekken dat leerlingen zelf op allerlei grafische representaties kwamen (zie bijvoorbeeld figuur 3). Die representaties bleken een goed startpunt voor gesprekken en activiteiten.



Figuur 3: Elk horizontaal streepje geeft de lengte van een tijdsinterval weer. Het bijbehorende vertikale streepje geeft de afstand die in dat tijdsinterval is afgelegd.

Streefland ziet opgaven rond snelheidsverschijnselen als geschikte situaties die leerlingen uitdagen voor het expliciet maken en verscherpen van hun wiskundige middelen. Hij doelt hierbij op het bepalen van een afgelegde weg vanuit een snelheid-tijd grafiek. Leerlingen moeten daarbij van de directe betekenis van oppervlakte af kunnen zien. De oppervlakte speelt dan slechts een bemiddelende rol. Het gaat tenslotte om het bepalen van de afgelegde, een 1-dimensionale grootheid, die slechts 'toevallig' door de oppervlakte onder de grafiek vertegenwoordigd wordt (Streefland, 1981).

Hierbij denkt Streefland bijvoorbeeld aan vragen als: stel je rijdt in dezelfde tijd met een hogere snelheid, dan kom je verder. Kun je dat ook vanuit de gegeven grillige snelheid- tijd grafieken motiveren? Het vermoeden dat de oppervlakte onder de kromme hier iets mee te maken heeft kan daarbij opkomen. Door leerlingen de afstandsverschillen met behulp van de grafieken nader te laten preciseren, kun je volgens Streefland dit vermoeden versterken. De betekenis van de oppervlakte onder een snelheid-tijd grafiek kan dan worden ontdekt.

Als het inderdaad mogelijk is om leerlingen op deze manier de betekenis van kenmerken van afstand-tijd en snelheid-tijd grafieken zelf uit te laten vinden, dan lijkt het waarschijnlijk dat de kloof tussen formele wiskunde en hun ervaringen niet ontstaat. Met 'uitvinden' wordt vooral het karakter van het leerproces bedoeld. De activiteiten zijn belangrijker dan de uitvinding als zodanig . De activiteiten moeten ervoor zorgen dat leerlingen hun verkregen kennis zien als uitbreiding van hun eigen kennis; een uitbreiding waarbij van hun een inbreng verwacht wordt en waarvoor ze zelf medeverantwoordelijk zijn (Freudenthal, 1991).

Samenvatting
Uit deze alternatieven voor de traditionele aanpak kunnen we enkele karakteristieken halen. Het doel van elk van de besproken alternatieven is om een inzichtelijk, betekenisvolle leergang te ontwerpen. De leerlingen moeten zoveel mogelijk de gelegenheid krijgen om voort te bouwen op hun informele kennis. Opmerkelijk is bovendien dat telkens grafieken een centrale rol spelen.
Er zijn echter drie verschillende oriëntaties te herkennen:

- leerlingen helpen in het ontwikkelen van kenmerkende noties die functioneren als basis voor hun begripsontwikkeling (Tall);
- een 'realisitische' leeromgeving scheppen waarin leerlingen leren door een model te exploreren (Kaput);
- het benadrukken van het (her-)uitvinden door leerlingen (DiSessa en Streefland).

Alle drie proberen ze de kloof tussen formele wiskunde en informele kennis te overbruggen. Kenmerkend voor de laatste is echter dat geprobeerd wordt de formele wiskunde te laten voortkomen uit de (wiskundige) activiteiten van de leerlingen om zo het ontstaan van de eerder genoemde kloof te voorkomen. Dit is ook een doel van realistisch wiskundeonderwijs, waar het ontwerpen zich richt op het scheppen van optimale situaties van waaruit de formele wiskunde kan worden ontwikkeld.

3. Progressief mathematiseren en guided re-invention
De achterliggende gedachte bij bovengenoemde alternatieven is de overtuiging dat het leren van wiskunde een proces is dat begint met het mathematiseren van concrete fenomenen, en dat vervolgt met het mathematiseren van de voorgaande activiteiten. Dit uitgangspunt komt overeen met een meer algemeen principe, dat de manier waarop de wiskunde ooit ontwikkeld is, een goede leidraad kan vormen voor de manier waarop individuen de wiskunde zich eigen moeten maken. Polya (1963) en Freudenthal (1973, 1991) propageerden onder andere dit principe.

Polya stelt expliciet dat de volgorde waarin kennis door de mensheid is verkregen, ook een goede volgorde is voor het individu: "The next glimmer of understanding had to grow out of what was already understood" (Polya, 1963). Niet dat we alle fouten uit het verleden ook moeten herhalen, maar de volgorde waarin de belangrijkste stappen voorwaarts gedaan zijn, is wellicht een goede volgorde voor het onderwijs. Deze zogenaamde genetische methode is een gids waarmee je volgordes kunt beoordelen. De geschiedenis leert ons wat conceptueel gezien moeilijke sprongen waren. De kunst is het onderwijs zo in te richten dat leerlingen die sprongen kunnen maken. De oplossing hiervoor kan in het verleden liggen.

Freudenthal's vertrekpunt is vooral zijn kritiek op traditioneel wiskundeonderwijs. Hij wijst sterk de anti-didactische inversie af waarop, volgens hem, traditioneel onderwijs gebaseerd is (Freudenthal, 1973). Het voorbeeld van de afgeleide functie illustreert zo'n inversie. De inversie houdt in dat het resultaat van wiskundig onderzoek – een gestroomlijnde theorie – gekozen wordt als het beginpunt voor het onderwijs. De problemen die de aanleiding waren voor de nieuwe theorie, komen pas aan het eind van de leergang als toepassingen. Hiermee zijn aanleiding en motivatie voor een nieuwe theorie in het onderwijs weggenomen en derhalve vindt Freudenthal deze inversie anti-didactisch. Als alternatief uitgangspunt voor dit onderwijs noemt hij primair wiskunde als activiteit, in tegenstelling tot wiskunde als kant-en-klaar-systeem. Onder wiskundige activiteit verstaat Freudenthal met name het "mathematiseren", dat staat voor organiseren vanuit een wiskundig perspectief (Freudenthal, 1991). Mathematiseren is voor Freudenthal niet alleen een doel in zichzelf; het mathematiseren ziet hij ook als de manier om wiskunde voort te brengen. De leerlingen ontwikkelen zo gezegd hun eigen wiskundige kennis door het bedrijven van wiskunde. Dit is tenslotte ook de manier waarop wiskundigen zelf de wiskunde in de loop der tijd hebben voortgebracht. Daarmee is het mathematiseren volgens Freudenthal een activiteit die je in de wetenschap ziet en die ook voor het onderwijs waardevol is. In vergelijking met Polya zou je kunnen zeggen dat Polya met de genetische methode de ontwikkeling van wiskundige begrippen benadrukt, terwijl Freudenthal zich vooral richt op het type activiteiten waarmee leerlingen te maken moeten krijgen.

Freudenthal onderscheidt het mathematiseren van situaties uit het dagelijks leven en het mathematiseren van wiskundige kennis die leerlingen inmiddels hebben opgedaan (Freudenthal, 1971). Hij ziet tussen die twee echter geen fundamenteel verschil. Bij het her-uitvinden van wiskunde is het zelfs onvermijdelijk dat leerlingen hun eigen wiskundige activiteiten zullen mathematiseren. Treffers (1987) maakt hierbij het onderscheid tussen horizontaal en vertikaal mathematiseren. Horizontaal mathematiseren verwijst naar het proces waarbij context problemen beschreven worden in wiskundige termen, opdat de problemen met wiskundige middelen kunnen worden opgelost. Vertikaal mathematiseren verwijst naar het mathematiseren van de eigen wiskundige activiteit. Door het vertikale mathematiseren bereiken leerlingen een hoger wiskundig niveau. In een proces van progressief mathematiseren (dat bestaat uit een combinatie van horizontaal en vertikaal mathematiseren) kunnen de leerlingen zelf wiskunde ontwikkelen.

Freudenthal (1971, 417) geeft hierbij aan dat "the operational matter on one level becomes a subject matter on the next level." Hoewel hij dit meer op micro-niveau bedoelt, is er een verband met Sfard's (1991) meer macroscopische beschrijving van de ontwikkeling van wiskunde gebaseerd op historische analyses. Zij karakteriseert de geschiedenis van de wiskunde als een voortdurend proces van "reification", of verdinglijking van processen tot objecten. Als voorbeeld geeft zij het begrip functie. Heel lang werden functies gezien als rekenvoorschriften. Later werden functies ondergebracht in verschillende categorieën (lineair, exponentieel, etcetera) en daarmee worden functies zelf object van studie. Sfard suggereert dat leerlingen ook dergelijke fasen moeten doorlopen. Leerlingen zullen pas kunnen werken met functies als objecten, nadat ze voldoende ervaring hebben opgedaan met functies als procedures.

De ideeën van Freudenthal over wiskundeonderwijs hebben geleid tot de realistische onderwijstheorie. Deze theorie kan worden samengevat in de drie principes: (*i*) re-invention of progressief mathematiseren, (*ii*) didactische fenomenologie en (*iii*) gebruik van modellen als brug bij het mathematiseren (Gravemeijer, 1994). Deze drie principes kan men zien als heuristieken voor het ontwikkelen van een leergang.

Om een re-invention proces in de praktijk van het onderwijs te kunnen realiseren, moet het historische proces worden vertaald naar leerling-activiteiten. In de realistische benadering kan het progressief mathematiseren gestructureerd worden met behulp van adequate modellen. Daartoe wordt gezocht naar modellen die in context-nabij, informeel modelleren door leerlingen naar voren zouden kunnen komen. Er wordt, anders gezegd, gezocht naar modellen die goed passen bij informele, context-gebonden strategieën. Deze modellen komen in het onderwijs naar voren als "model-van", als modellen die verwijzen naar voor de leerlingen concrete contexten. Wanneer de leerlingen hetzelfde type model herhaaldelijk gebruiken in verschillende situaties, dan krijgt zo'n model een ander karakter. Het model wordt een zelfstandig gereedschap dat voor de leerling betekenis heeft los van een verwijzing naar een specifieke context. Dit type algemene modellen kan vervolgens functioneren als een "model-voor", een model voor meer formeel wiskundig redeneren. Naast het feit dat de modellen naar voren moeten komen bij informele redeneringen van leerlingen, moeten ze dus ook voldoende wiskundige draagwijdte hebben (Streefland, 1985, Gravemeijer, 1994).

In het vervolg beschrijven we hoe een historisch gegeven - de aanzet tot de ontwikkeling van de integraalrekening door Galileï - met behulp van de bovengenoemde heuristieken gebruikt kan worden voor het ontwikkelen van wiskundeonderwijs. In deze schets komen grafieken eerst naar voren als een manier om de beweging van vallende objecten te beschrijven. Later worden diezelfde grafieken gebruikt om te redeneren over het integreren van functies.

4. Een blik in het verleden

In de eerste helft van de 14e eeuw richtten enkele zeer bekwame natuurfilosofen op het Merton College in Oxford zich op het probleem hoe de afgelegde weg te beschrijven van een object dat met een snelheid beweegt die constant af- of toeneemt (Clagett, 1959). Dit probleem was niet zo eenvoudig, omdat de snelheid van het object voortdurend verandert en omdat het begrip beweging in die tijd nog heel ruim gedefinieerd was. Het begrip beweging, dat was ontleend aan Aristoteles, verwees ook naar verandering van temperatuur of vorm. In die tijd definieerde men snelheid als momentane snelheid. Men gebruikte niet de benadering waarbij de feitelijke afgelegde weg gedurende een bepaald tijdsinterval als maat voor de (gemiddelde) snelheid wordt genomen. En dus zeker niet voor de snelheid op een bepaald moment de limiet van die deling (dS/dt). De differentiaalrekening bestond nog niet. Op het Merton College werden drie resultaten geboekt:

1. *een beschrijving van de betekenis van momentane snelheid*
   De momentane snelheid van een object (de snelheid op een bepaald moment) werd gedefinieerd door deze te koppelen aan de weg die het object zou afleggen als het met die snelheid een zeker tijdsinterval zou voortbewegen.
2. *een beschrijving van de betekenis van constante versnelling*
   De snelheid neemt toe met gelijke hoeveelheden in gelijke tijdsintervallen.
3. *de wet van Merton*
   Als van een object de snelheid constant verandert van een beginsnelheid 0 tot een snelheid v in een tijdsinterval t, dan is de afgelegde weg gelijk

aan de afgelegde weg van een object dat over een tijdsinterval *t* voortbeweegt met een constante snelheid van *v* (in moderne termen $s(t) = \frac{1}{2}.vt$

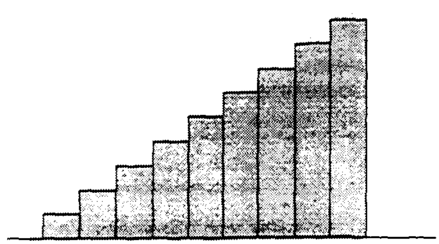
We volgen hiervoor het bewijs van Richard Swineshead (uit ca. 1335). Stel dat van een object *A* de snelheid constant toeneemt van 0 tot *v*, terwijl van een object *B* de snelheid constant afneemt van *v* tot 0. Op ieder moment *t* geldt dat de som van hun momentane snelheden gelijk is aan *v*. Dus samen leggen ze een zelfde afstand af als één object met een snelheid *v*.

De objecten *A* en *B* leggen allebei eenzelfde afstand af, dus ieder afzonderlijk leggen ze evenveel af als een object dat voortbeweegt met snelheid $\frac{1}{2}$ *v*.

Eigenlijk kun je in deze redenering al iets herkennen van een oneindige som van infinitesimalen die later bij de integraalrekening toegepast wordt.

Het blijft een elegante redenering voor iets dat wij nu op een andere manier inzien. Er werd nog geen gebruik gemaakt van grafische modellen van dergelijke situaties. In die tijd (rond 1360) is Nichole Oresme de eerste die op het idee komt om grafieken te maken. Hij beschrijft hoe meetkundige figuren (lijnen of rechthoeken) de grootte van een variabele kunnen aangeven: de lengte van de lijn of de oppervlakte van de rechthoek geeft dan die grootte aan. Vervolgens ontstaat de grafiek doordat hij langs een horizontale lijn de tijd uitzet en loodrecht daarop de grootte van een variabele.

Bij het onderzoek naar een object dat beweegt met constante versnelling veronderstelde hij dat de snelheid toeneemt met gelijke hoeveelheden in gelijke tijdsintervallen. Doordat de snelheid voortdurend verandert, is het lastig om zo'n grafiek te maken van de afgelegde weg. Voor een benadering van de grafiek van de afgelegde weg stelde Oresme gedurende ieder tijdsinterval de snelheid constant. Conform de hierboven aangeduide definitie van momentane snelheid werd die snelheid uitgedrukt in termen van de weg die in dat tijdsinterval zou worden afgelegd. Oresme gebruikte daarbij de oppervlakte van rechthoeken om de afgelegde weg per tijdsinterval weer te geven. Zo ontstaat een grafiek van rechthoeken waarvan de oppervlakte staat voor de afgelegde weg van een object dat met een constante versnelling beweegt.



Figuur 4: Grafiek waarbij de oppervlakte een maat voor de afgelegde weg is.

De uiteindelijke lijn die hij krijgt bij het verfijnen van de rechthoeken of het tekenen van meer vertikale lijnen gaf hij ook een naam *linea summitatis* (bovenlijn). Hij ziet dat het een rechte lijn is en dat de som van alle oppervlaktes van rechthoekjes, de som van afgelegde afstanden, gelijk is aan de oppervlakte onder de driehoek. Daarmee geeft hij een meetkundig bewijs van de stelling van Merton. Hieronder ziet u twee plaatjes die zijn bewijs illustreren.

Figuur 5: Uit een 15e eeuws manuscript van Oresme's De configurationibus qualitatum.

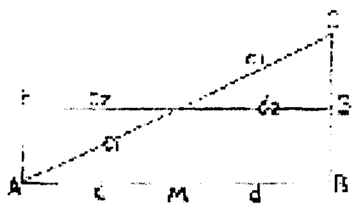
Het bijzondere is dat Oresme grafieken maakt die niet direct gegenereerd worden door een formule, maar door een beschrijving van het onderliggende proces. Hij kan hier echter alleen gebruik van maken bij lineaire verbanden: daar lukt het hem om oppervlaktes te berekenen, en daarin was hij vooral geïnteresseerd. Wellicht dat hij daardoor het idee van het tekenen van grafieken in een assenstelsel nauwelijks verder ontwikkeld heeft.

Deze eeuw zijn er geleerden geweest die hebben beweerd dat Oresme de wet van Merton zo niet kon bewijzen, omdat zijn redenering ongeoorloofd zou zijn. Hij had eerst de snelheid moeten definiëren als differentiaalquotiënt en vervolgens de afgelegde weg kunnen bepalen via grafische integratie. Dijksterhuis bespreekt dit en verdedigt Oresme als volgt:

> *"Het is een situatie, die zich in de geschiedenis van de wiskunde herhaaldelijk heeft voorgedaan: mathematische begrippen worden vaak - men kan bijna wel zeggen: in den regel - reeds lang intuïtief gehanteerd, voordat men ze met volkomen scherpte kan omschrijven en fundamentele stellingen worden vaak intuïtief ingezien voordat men ze strikt kan bewijzen" (Dijksterhuis, 1980).*

Galileï werkt het principe van Oresme gedetailleerder uit en bovendien gebruikt hij de wet van Merton voor het beschrijven van de vrije val. Hij geeft daartoe een op experimenten gebaseerde verklaring voor het vermoeden dat bij een vallend object de snelheid constant toeneemt in de tijd. Hij is niet de eerste die via experimenten probeerde vermoedens te toetsen, maar hij is wel de eerste die met deze werkwijze indruk maakte op zijn collega's en velen overtuigde van de noodzaak van het experimenteren (Asimov, 1987). De geleerden in het Merton College volgden nog de Aristoteliaanse traditie van het redeneren.

Galileï maakt ook gebruik van grafieken om het kwadratische verband tussen afgelegde weg en tijd aan te tonen. In de grafiek hieronder heeft hij de snelheid-tijd grafieken van twee situaties weergegeven. *AC* geeft de eenparig versnelde beweging weer en *FG* de beweging met een constante snelheid van het middelste ogenblik *M*.



Figuur 6: Grafiek van Galileï uit Discorsi III 1 (Opere VIII 208).

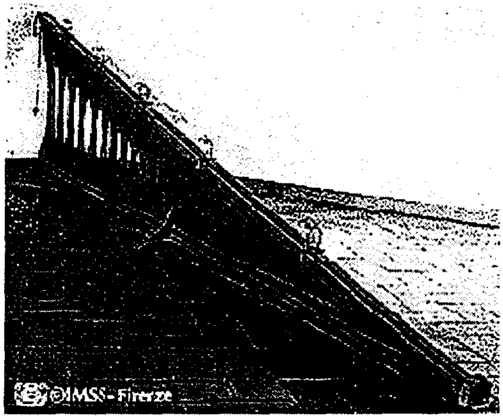
Dijksterhuis merkt echter op dat de redering van Galileï verschilt van die van Oresme. De redering van Galileï volgt meer het bewijs van Swineshead met behulp van momentane snelheden (die hij niet helemaal correct kon definiëren). In plaats van oppervlaktes als maat voor de afgelegde weg, gebruikt Galileï de verzameling van alle lengtes cc_1, en dd_1 die bij elkaar de totale snelheid weergeven waarmee de weg doorlopen wordt. Omdat deze lengtes symmetrisch rond M liggen en overal geldt $cc_1 + dd_1 = cc_2 + dd_2$, leidt hij uit deze grafiek af dat ook de afgelegde wegen gelijk zijn. Hiermee verklaart hij ook dat de afgelegde weg in het tijdsinterval tot M een kwart is van de gehele afgelegde weg. Als je de totale tijd in vier intervallen verdeelt, dan krijg je dat in het eerste interval 1/16 wordt afgelegd, halverwege is 4/16 afgelegd en op driekwart is 9/16 van het geheel (16/16) afgelegd. Hiermee verklaarde Galileï dat er een kwadratisch verband is tussen de afgelegde weg en de tijd.

Naast deze grafische verklaring geeft Galileï ook een andere verklaring voor het kwadratische verband in termen van verhoudingen. Hij ontwierp een licht hellend glijbaantje met spijkers op oplopende afstanden. Het rollende balletje moest precies evenveel tijd nodig hebben voor het passeren van iedere volgende spijker. De afstanden tussen de spijkers bleken constant toe te nemen en zich te verhouden als een rij opvolgende oneven getallen, 1:3 of 1:3:5:7, etcetera.

tijdsinterval	0		1		2		3		4
afgelegde weg	0		1/16		4/16		9/16		16/16
toename		1/16		3/16		5/16		7/16	

Hij wist dat de som van een rij oneven getallen altijd een kwadraat is. Daarmee kon hij de formule, die gebaseerd was op het vermoeden dat de versnelling van een vallend object constant is, toetsen. Zijn verwachting dat er een (mooi) kwadratisch verband is, stuurde het ontwerp van zijn proefopstelling en wellicht ook zijn waarnemingen.

Voor Galileï was overigens het meten van constante tijdsintervallen een ingewikkelde kwestie. Het is mogelijk dat hij hiervoor zijn hartslag gebruikte, hoewel ook vermoed wordt dat hij zong om een constant ritme te genereren (Stewart, 1995).



Figuur 7: Een instrument uit de 19ᵉ eeuw om experimenten van Galileï te herhalen

Galileï vond met zijn experimenten dat de afgelegde valweg lineair toeneemt bij ieder tijdsinterval en daaruit concludeerde hij dat de relatie tussen valweg en tijd kwadratisch moet zijn.

5. Een didactische analyse

Deze geschiedenis leert ons dat de eerste aanzetten voor de integraalrekening voortkomen uit natuurkundige problemen. Grafieken spelen hierbij een belangrijke rol. Er werd in eerste instantie niet gekeken naar een grafiek van functiewaarden waarbij de oppervlakte onder de grafiek moest worden bepaald, maar er werd een grafiek gemaakt waarbij de oppervlakten van rechthoekjes de afgelegde weg tijdens een bepaald tijdsinterval voorstellen. De grafiek is een onderdeel van de discrete benadering van een continu proces. Bovendien is er eerder betekenis gegeven aan oppervlaktes onder een grafiek dan aan hellingen in bepaalde punten van de grafiek.

De grafieken komen hier eerst naar voren als modellen van relaties tussen afstand, tijd en snelheid van bewegende voorwerpen. Geleidelijk aan wordt in de loop van de geschiedenis de grafiek echter meer en meer een opzichzelfstaand object. Dat wil zeggen, de grafiek representeert de samenhang tussen twee variabelen. Vervolgens kan de grafiek als zelfstandig object gaan functioneren, als model voor wiskundig redeneren. In dit geval het redeneren over het differentiëren en het integreren van functies. Waarbij het misschien goed is ons te realiseren dat het bij differentiëren en integreren niet gaat om hellingen van, of oppervlakten onder grafieken. Uiteindelijk gaat het om het differentiëren en integreren van functies; om limieten van verschilfuncties en van somfuncties. Die functies bestaan los van de visuele representaties. Zo'n visuele representatie levert echter wel een goede basis voor het redeneren over dit soort limieten. Maar dat kan alleen als de visuele representatie meer is dan alleen maar een plaatje en dat is nu precies waar het bij een "model- voor" dat geworteld is in een "model-van" om gaat.

De historische ontwikkeling verschilt hiermee van de volgorde die in het onderwijs gebruikelijk is. We moeten ons daarbij echter realiseren dat de leerlingen tegenwoordig al op jonge leeftijd vertrouwd zijn met grafieken. Een kwalitatieve analyse van bijvoorbeeld afstand-tijd grafieken is dan ook een voordehand liggende voorbereiding op integraal- en differentiaalrekening en vormt een logische opstap voor een informele introductie van dit onderwerp. In relatie tot dit voorbereidende onderwijs wordt door velen het belang benadrukt van een veelzijdige representatie van functies. Naast grafieken moet er ook aandacht worden besteed aan tabellen en (woord-) formules en dergelijke (Freudenthal, 1983; Janvier, 1987; Dekker, 1991).

Overigens blijkt uit onze historische schets dat de ontwikkeling van de integraalrekening enigszins eenzijdig op grafieken steunt. We spreken gemakshalve wel van de grafiek als model, maar in feite gaat het om de discrete benadering van een continu proces, waar de grafiek een exponent van is. Bovendien zien we met name bij Galileï een combinatie van grafieken, formules en tabellen (met betrekking tot som- en verschilrijen). We zien ook dat Galileï's bekendheid met som- en verschilrijen een belangrijke factor is. In die zin kunnen som- en verschilrijen gezien worden als de algebraïsche voorlopers van de differentiaal- en integraalrekening. De differentiaal- en integraalrekening is hiermee gefundeerd in een discrete benadering van veranderingen.

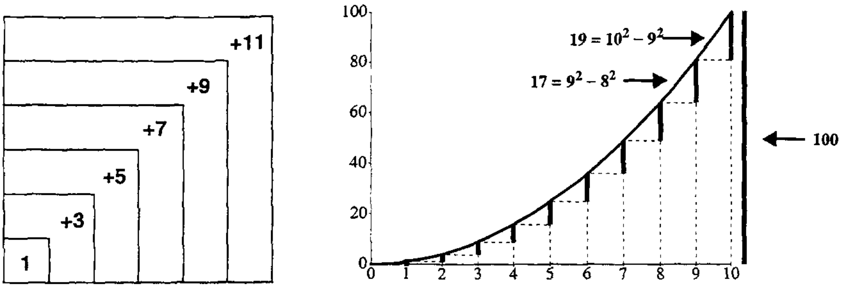
6. Een realistische introductie op differentiaal- en integraalrekening

De historisch-didactische analyse vormt het uitgangspunt voor ontwikkelingsonderzoek naar een geïntegreerde leergang voor kinematica en differentiaal- en integraalrekening waarin gebruik wordt gemaakt van de eerder genoemde ontwerpheuristieken en van het natuurkunde-didactische principe van probleemstellend onderwijs (zie bijdrage in dit nummer van Vollebregt e.a.). Als startpunt voor een leerstofpakket, dat gezien kan worden als uitwerking van bovenstaande analyse, bekijken we het pakket Som&Verschil, Afstand&Snelheid (Kindt, 1996). Bij het ontwerp van deze leerlingentekst is gebruik gemaakt van een tekst van Polya die de redenering van Galileï volgt (Polya, 1963).

Het pakket begint met een hoofdstuk over rijen, verschilrijen en somrijen dat aansluit op activiteiten die leerlingen in het voorgaande jaar hebben gehad. De situaties zijn slechts incidenteel aan de buitenwereld ontleend; de wiskundige context is echter realistisch voor deze leerlingen. In dit hoofdstuk wordt het gereedschap ontwikkeld waarmee leerlingen het type problemen kunnen benaderen, dat bij de differentiaal- en integraalrekening een rol speelt. De nadruk ligt in dit deel van het pakket op het mathematiseren van de eigen wiskundige activiteit: van kenmerken van verbanden zoals toenamediagrammen en - tabellen naar de relatie tussen verschilrijen en somrijen.

Het limiet-begrip wordt uitgesteld omdat uit onderzoek (zie Cornu's artikel *Learning Limits* in de Lange, 1988) en uit de geschiedenis blijkt dat dit conceptueel lastig is (zie ook de opmerkingen van Tall hierover) en op dit moment nog niet noodzakelijk is.

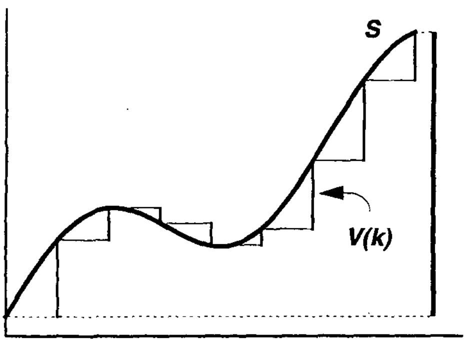
De kenmerken van de rijen worden onderzocht en in het bijzonder wordt het verband tussen verschilrijen en somrijen gelegd.



Figuur 8: De som van opeenvolgende oneven getallen is een kwadraat en het verschil tussen twee opvolgende kwadraten is een oneven getal.

Uit figuur 8 blijkt dat het verschil tussen twee opvolgende kwadraten altijd een oneven getal is en dat de som van een reeks van opeenvolgende oneven getallen beginnend met één, altijd een kwadraat geeft. In termen van de symbolen die worden geïntroduceerd is dat:

$\overset{k+1}{\underset{k}{\Delta}} n^2 = 2k+1$ en $\sum_{k=0}^{n-1} 2k+1 = n^2$. Voor het visualiseren van dergelijke verbanden worden ook grafieken regelmatig gebruikt. Voor het algemene geval wordt het verband tussen som en verschil geïllustreerd in de grafiek hieronder. Welke vorm de (continue) grafiek ook heeft, de som van alle deelverschillen is altijd gelijk aan het verschil tussen begin- en eind-waarde.



Als $V(k) = \overset{k+1}{\underset{k}{\Delta}} S(x)$,

Dan $\sum_{k=0}^{n-1} V(k) = S(n) - S(0)$

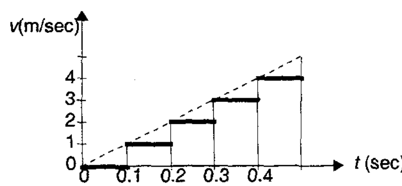
Figuur 9:Het verband tussen som en verschil.

Leerlingen gebruiken bij hun onderzoek naar de relaties tussen sommen en verschillen ook de grafische rekenmachine. Daarmee ontdekken ze bijvoorbeeld dat de verschilrij van 2^n gelijk is aan 2^n en de verschilrij van 3^n gelijk is aan $2{*}3^n$. Algebraïsch kunnen ze dat bewijzen en vervolgens kunnen ze het verband tussen som en verschil gebruiken om een meetkundige reeks te bepalen.

Zo vinden ze dat $\underset{k}{\overset{k+1}{\Delta}} 3^n = 3^{k+1} - 3^k = 3*3^k - 3^k = 2*3^k$ en volgt vervolgens uit bovenstaand verband dat $\sum_{k=0}^{n-1} 3^k = (3^n - 3^0)/2$.

Na deze discrete analyse komt de overgang naar problemen rond het modelleren van situaties rond afstand, snelheid en tijd. Hierbij spelen grafieken weer een belangrijke rol. De grafieken in de discrete analyse waren niet willekeurige modellen om alleen maar eigenschappen van die discrete analyse te ontdekken of te illustreren. Deze (discrete) grafieken worden nu gebruikt als modellen van discrete benaderingen van eenparig versnelde bewegingen.

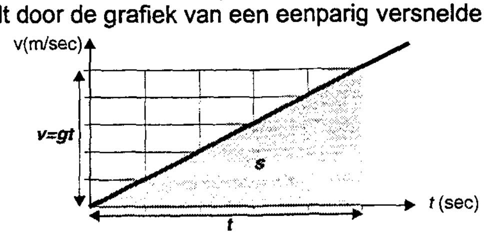
De ontwikkeling van deze grafieken vindt plaats in een verhaal rond de ontdekkingen van Galileï. De grafiek bestaat uit een reeks van recht-hoeken, waarbij horizontaal de tijd en vertikaal de snelheid langs de assen staat. De hoogte van een rechthoek is een maat voor de snelheid in het doorlopen tijdsinterval. De breedte geeft de lengte van het tijdsinterval aan. Het lijkt in deze situatie heel natuurlijk om overal gelijke tijds-intervallen te kiezen.



Figuur 10: Een snelheid-tijd grafiek van een eenparig versnelde beweging.

Als we de oppervlakte uitdrukken in de schaal van de assen, dan is de oppervlakte van zo'n rechthoek precies gelijk aan de afgelegde weg in het tijdsinterval bij de gekozen constante snelheid. De oppervlakte van alle rechthoeken bij elkaar is een benadering van de totale afgelegde weg. Het aardige van deze benadering is dat de redenering blijft kloppen als je de tijdsintervallen kleiner kiest om een betere benadering te krijgen. Bij het berekenen van de totale oppervlakte gebruiken leerlingen de hen inmiddels bekende rekenkundige reeks.

Vervolgens wordt de relatie gelegd tussen de oppervlakte onder de grafiek van de discrete benadering en de oppervlakte onder de driehoek die gegeven wordt door de grafiek van een eenparig versnelde beweging.



$$s = \frac{1}{2} t \times gt = \frac{1}{2} gt^2$$

Figuur 11: De oppervlakte van de grijze driehoek is de afgelegde weg.

Via deze opgaven exploreren leerlingen de relaties tussen de oppervlakte onder een grafiek, de afgelegde weg en de formule $v = \Delta s/\Delta t$. Bij deze exploratie is het leren redeneren met grafieken ten behoeve van differentiaal- en integraalrekening sterk verweven met de betekenis van de grafieken in hun natuurkundige context. De uiteindelijke formule onthult de kwadratische relatie tussen tijd en afgelegde weg die Galileï gebruikte om zijn hypotheses empirisch te testen. Na deze berekening volgen enkele opgaven waarbij de aandacht verschuift van de natuurkundige context naar eigenschappen van en het bepalen van primitieve functies (zonder die term te gebruiken).

Deze introductie op de integraalrekening gaat vooraf aan de differentiaalrekening. Bij de differentiaalrekening zijn afstand-tijd grafieken het uitgangspunt voor het bepalen van (gemiddelde) snelheden. In de activiteiten functioneert de grafiek steeds meer als model voor het redeneren over het integreren en differentiëren van willekeurige functies en van standaardfuncties zoals machtsfuncties en exponentiële functies. Vaak worden eerst ruwe discrete benaderingen gebruikt en later oneindig kleine intervallen. Bovendien vindt een verschuiving plaats van problemen in contexten uit het dagelijks leven naar wiskundige concepten en de relaties daartussen.

7. Slot

Aan het begin van het artikel stelden we de vraag: hoe kunnen we leerlingen helpen formele wiskunde te begrijpen? Centraal in dit artikel stond realistisch wiskundeonderwijs. Deze benadering onderscheidt zich van andere doordat het de kloof tussen informele kennis en formele wiskunde probeert te voorkomen, door een hypothetische leerroute te ontwerpen waarlangs formele wiskunde word her-uitgevonden. In het ideale geval komt de formele wiskunde voort uit de wiskundige activiteiten van de leerlingen.

De volgende stap is het onderwijs-experiment. In dit experiment moet duidelijk worden in hoeverre de ideeën met betrekking tot re-invention, model-shift en didactische fenomenologie werken en goed uitgewerkt zijn. Het re-invention aspect in het lesmateriaal is geloofwaardig als de uitwerkingen van de leerlingen in de uitgezette route passen. De kracht van de modellen blijkt als inderdaad bij de leerlingen de model-shift optreedt. De inbreng van de didactische fenomenologie moet volgen uit de steun die leerlingen hebben aan de contexten (Gravemeijer, 1994).

Het idee is dat contextproblemen uit de leerroute verbonden zijn met situaties die door leerlingen als reëel worden ervaren. In de beschreven leergang krijgen leerlingen daardoor meer grip op de reële problemen rond snelheid en afgelegde weg. De contextproblemen moeten zich bovendien lenen voor het ontwikkelen van de wiskunde. Dit betekent dat de contextgebonden modellen geschikt moeten zijn voor vertikale mathematisering, met andere woorden: zich lenen voor formele wiskundige redeneringen. De grafieken die naar voren komen als model van relaties tussen snelheid, tijd en afgelegde weg, worden later weer gebruikt als model voor de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening.

Door op deze manier wiskunde te leren met behulp van contextproblemen proberen we een gescheiden ontwikkeling van buitenschoolse kennis en wiskundige kennis te voorkomen. De nadruk ligt hier niet op het leren van vaardigheden, maar om Greeno's (1991) omgevingsmetafoor te gebruiken, op het ontwikkelen van wiskundige en natuurkundige kennis als een omgeving waar de leerlingen de weg weten. Het uiteindelijke doel van wiskunde- en natuurkundeonderwijs is het ontwikkelen van een "vak realiteit" die niet geisoleerd is van de realiteit buiten dit vakgebied. Als leerlingen het proces van het her-uitvinden van wiskunde en natuurkunde ervaren als een uitbreiding van hun eigen algemene kennis, dan zal er geen kloof ontstaan tussen informele, buitenschoolse strategieën en formele vaardigheden. Beide zijn een onderdeel van dezelfde realiteit.

De relatie tussen het gebruik van modellen die voortkomen uit contextproblemen, en de ontwikkeling van het vak is daarmee reflexief. Aan de ene kant zijn de modellen geworteld in de werkelijkheid van de leerling, aan de andere kant zorgen ze voor een uitbreiding van kennis over die werkelijkheid. Bij de geschetste leergang van differentiaal- en integraalrekening is het precies die samenhang tussen snelheid, afgelegde weg en de wiskunde, die leerlingen in staat stelt om op een betekenisvolle manier te redeneren over problemen rond snelheid, afgelegde weg en differentiaal- en integraalrekening.

Literatuur

Asimov, I. (1987). *Asimov's new guide to science*. Penguin Books.

Bishop, A.J. et al (eds.) (1996). *International handbook on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Blokland, P., Kok, D., Tall, D. (1990). *VU-Grafiek*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Brown, J.S., Collins, A. & Duguid, P. (1989). *Situated Cognition and the Culture of Learning*. Educational Researcher, 18 (1), 32-42.

Clagett, M. (1959). *Science of mechanics in the middle ages*. Madison: The University of Wisconsin Press.

Dekker, R. (1991). *Wiskunde leren in kleine heterogene groepen*. De Lier: Academisch Boeken Centrum.

Dijksterhuis, E.J. (1980). *De mechanisering van het wereldbeeld*. Amsterdam: Meulenhoff.

DiSessa, A. A., Hammer, D., Sherin, B. & Kolpakowski, T. (1991). *Inventing Graphing: Meta-Representational Expertise in Children. Journal of Mathematical Behavior, 10*, 117-160.

Doerr, H. M. (1997). Experiment, simulation and analysis: an integrated instructional approach to the concept of force. *Int. Journal of Science Education*, vol 19 no 3, p. 265- 282,.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. Hampshire: The Falmer Press.

Freudenthal, H. (1971). Geometry Between the Devil and the Deep Sea. *Educational Studies in Mathematics, 3,* 413-435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (1991). An instruction theoretical reflection on the use of manipulatives. In: L Streefland. (ed.) *Realisic mathematics education in primary school*. Utrecht: CdB Press.
Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
Greeno, J.G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, 170-218.
Janvier, C. (1987). Representation and Understanding: The Notion of Function as an Example. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
Kaput. J. J. (1994). The Representational Roles of Technology in Connecting Mathematics with Authentic Experience. In: R. Biehler, R.W. Scholz, R. Sträßer, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 379-397.
Kindt, M. (1996). *Som & verschil, afstand & snelheid. Differentiaal- en Integraalrekening deel 1*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
Lange, J. de & Doorman, M. (1988). *Senior Secondary Mathematics Education, report of Action Group 4 at ICME-6*. Utrecht: Freudenthal Instituut, 50-54.
Polya, G. (1963). *Studies in mathematics, volume XI, Mathematical Methods in Science*. Stanford: School Mathematics Group.
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*. 1-36.
Stewart, I. (1995). *Nature's Numbers, the unreal reality of mathematics*. Basic Books.
Streefland, L. (1981). Zoals eenvoudig valt in te zien .... *Nieuwe Wiskrant, 1*, proefnummer, 3-7.
Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron. *Nieuwe Wiskrant, 5*, 1, 60-67.
Streefland, L. (1990). *Fractions in Realistic Mathematics Education, a Paradigm of Developmental Research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Tall, D.O. (1985). The gradient of a graph, *Mathematics Teaching 111*, 48-52.
Tall, D.O. (1986). A graphical approach to integration, *Mathematics Teaching 114*, 48- 51.
Tall, D. (ed) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel.