

Proefschrift Monique Pijls

Collaborative mathematical investigation with the computer: learning materials and teacher help

Bespreking door:

Anne van Streun

Pauline Vos

Instituut voor Didactiek en Onderwijsontwikkeling

Faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen

Rijksuniversiteit Groningen

Probleemstelling en veldexperimenten

Het onderzoek van Pijls had tot doel om in 4 havo bij het onderwerp 'Routes en kansen' het procesmodel van Dekker en Elshout-Mohr (1998) voor het bereiken van wiskundige niveauverhoging in een onderwijsontwerp toe te passen en op effect te beoordelen. In dat procesmodel zijn de volgende kernactiviteiten van belang: het eigen werk laten zien, uitleggen, verdedigen en reconstrueren. Het lesmateriaal moet leerlingen stimuleren over hun werk te praten en te discussiëren. De docent speelt een belangrijke rol bij het aanmoedigen van de leerlingen en het praten over hun wiskundige ideeën.

In het onderwijsontwerp werd het onderwerp 'Routes en kansen' gebaseerd op het tellen van routes in een rooster, volgens Pijls het centrale concept in dit domein. Een vooraf gesignaleerd leerprobleem was het kunnen oplossen van tel- en kansproblemen met een rooster en de overgang van het perceptuele niveau (het rooster) naar het conceptuele niveau (tellen en kansen in het algemeen). Het ontwerp en het onderzoek spitsten zich toe op de samenwerking tussen leerlingen, de begeleiding door de docent en het lesmateriaal, waarvoor een computersimulatie was ontwikkeld.

In het eerste veldexperiment ($n=60$) werden de verschillen in niveauverhoging vergeleken tussen drie groepen leerlingen, die onder verschillende condities werkten. De condities werden gekarakteriseerd door de positie van de onderzoeksopdrachten met de computer, namelijk *voor*, *tijdens* en *na* het leren van een wiskundig concept. In het tweede veldexperiment ($n=52$) was de tijdens-conditie uit het eerste veldexperiment aangepast en werd deze uitgesplitst in twee condities, die zich kenmerken door het type begeleiding dat de docent mag geven, namelijk *proceshulp* (interactie stimuleren) en *producthulp* (wiskundige hints geven).

De verwachting van het eerste veldexperiment was dat de leerlingen in de tijdens-conditie op het aspect van de wiskundige niveauverhoging beter zouden presteren op de natoets (gegeven hun resultaten op de voortoets) dan de leerlingen van de voor- en na-conditie. In de tijdens-conditie waren de onderzoeksopdrachten, in tweetallen uit te voe-

ren met behulp van de computer, geïntegreerd in de gewone opdrachten uit het reguliere leerboek. Er bleek geen significant verschil in wiskundig niveau op te treden tussen leerlingen van de drie condities, terwijl weinig leerlingen het gedefinieerde conceptuele niveau bereikten. Uit de kwalitatieve analyses valt op te maken dat leerlingen in de tijdens-conditie vaker probeerden een constructieve analyse te maken die tot niveauverhoging had kunnen leiden.

Op basis van commentaar van enkele wiskundendidactici werd de tijdens-versie van het lesmateriaal aangepast, zodat leerlingen meer de kans kregen om de procedure van het tellen van routes in het rooster te 'heruitvinden'. Vervolgens is met deze tijdens-versie onderzocht welke hulp van de begeleidende docent meer effect heeft op het gewenste leerresultaat. Op de natoets bleek er geen significant verschil te zijn tussen de condities 'proceshulp' en 'producthulp', terwijl opnieuw amper sprake is van de door de onderzoeker gewenste niveauverhoging.

Pijls concludeert dat het bereiken van wiskundige niveauverhoging moeilijk blijkt voor deze leerlingen, of ze nu met onderzoeksmatige opdrachten hebben gewerkt of niet. Leerlingen hebben bij het uitvoeren van onderzoeksmatige opdrachten minder de neiging om voor hen betekenisloze trucs uit het leerboek te gebruiken. De onderzoeker nodigt vervolgens de leraren uit om uitleg maar helemaal achterwege te laten, omdat meer uitleg kennelijk ook niet helpt. Pijls beargumenteert dat leerlingen dan eigen wiskundige ideeën kunnen ontwikkelen en met medeleerlingen bediscussiëren, maar ze kan dit met haar data niet hard maken.

Ter discussie

Dit onderzoek snijdt een aantal belangrijke didactische probleemstellingen aan, waar in het wereldje van de landelijke wiskundendidactiek veel uitgesproken en soms tegengestelde opvattingen over bestaan. Het gaat over samenwerkend leren, over de inzet van computersimulaties, over de plaats van onderzoeksopdrachten in de opbouw van een leertraject, over de beste manier waarop leraren hun leerlingen kunnen begeleiden bij het uitvoeren van onderzoeksopdrachten, en last but not least hoe leerlingen in het aanvangsonderwijs van de kansrekening tot wiskundige niveauverhoging kunnen worden opgestuwd. Het is goed dat aan deze discussies nu empirie wordt toegevoegd. Pijls heeft zich met enthousiasme en met een duidelijke opvatting op die problematiek gestort en zorgvuldig de opzet en resultaten van het onderzoek gedocumenteerd. Voor haar is het ongetwijfeld teleurstellend dat geen enkele verwachting is uitgekomen. Voor de uitbreiding van de wetenschappelijke kennis is dat geen probleem; kennis over wat niet werkt is net zo belangrijk als kennis over wat wel werkt. Wij hebben wel een aantal vragen bij dit onderzoek, waarvan we de belangrijkste aan de lezers van dit tijdschrift willen voorleggen. U wordt uitgenodigd mee te denken over deze vragen:

- *Wat is in dit domein wiskundige niveauverhoging?*
- *In hoeverre is het roostermodel een goed didactisch model in dit domein?*

- *Wat zet leerlingen aan om zelf wiskundige ideeën te gaan ontwikkelen?*
- *Wat weten we al over een optimaal leertraject met contexten, problemen, onderzoeksopdrachten?*

Wat is in dit domein wiskundige niveauverhoging?

Voortbouwend op een variant van 'de' niveautheorie van Van Hiele definieert Pijls de overgang van het 'perceptual level' naar het 'conceptual level' als een verhoging van het wiskundige niveau. Concreet is dat bijvoorbeeld de overgang van het tellen in een rooster naar het kunnen oplossen van een contextprobleem met behulp van een rooster. In een studie die duidelijk beoogt een bijdrage te leveren aan de ontwikkeling van de wetenschappelijke kennis op het terrein van de wiskundendidactiek is die definitie mager. Het leren van het concept 'kans' heeft veel verschillende aspecten die niet tot hun recht komen met een beperking tot twee niveaus. Bij dit concept zijn ook heel wat misconcepties, die niet geëxpliciteerd worden in het theoretisch kader van het proefschrift. Daarnaast is er in het domein van de kansrekening, meer dan in andere subdomeinen van de schoolwiskunde, sprake van een vertaalslag waarin het al dan niet gebruiken van een systematische probleemaanpak veelal beslissend is voor het kunnen mobiliseren van relevante wiskundige kennis. Een goede probleemaanpak bij die vertaalslag zouden wij, hoe onmisbaar ook, geen wiskundige niveauverhoging willen noemen.

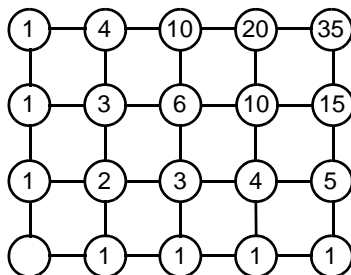
In hoeverre is het roostermodel een goed didactisch model in dit domein?

Een vakdidactische studie zal in de eerste plaats het bestudeerde leerdomein, hier het begin van de kansrekening, met de gebruikelijke leertrajecten en didactische modellen moeten analyseren. Dat geldt te meer als dit domein voor de doelgroep extreem moeilijk is, zoals Pijls bij de aanvang van het onderzoek al meedeelt. Waar liggen de leerproblemen? Hoe goed/slecht werken de didactische modellen? Voor ons is het verbazingwekkend dat het didactische model uit het leerboek als gegeven geaccepteerd wordt. Dit betreft een model dat bij de invoering van wiskunde A in de havo is geïntroduceerd in de leerstofpakketten van het ontwikkelteam van het Freudenthal Instituut en vervolgens is overgenomen in een aantal schoolboeken. Om mee te kunnen denken heeft de lezer enige uitleg nodig over dat gevolgde didactische traject.

Voorbeeld van pagina 25

Je hebt een doos met drie rode en vier witte ballen. Hoeveel verschillende kleurpatronen kun je maken als je deze zeven ballen op een rij legt?

Het didactische traject gaat er nu vanuit dat leerlingen deze opgave gaan vertalen naar een 3 bij 4 rooster en alle routes gaan tellen vanaf het startpunt linksonder naar het eindpunt rechtsboven.



Figuur 1. het tellen van routes in een rooster

In alle uitgevoerde experimenten blijken de leerlingen heel snel te leren hoe ze kunnen tellen in een rooster, al dan niet via het 'heruitvinden'. Het optellen van routes van roosterpunt naar roosterpunt blijft vaak een 'truc', zoals ook blijkt bij de leerlingen van 4 havo A. Met het tellen in het rooster zijn ze er niet. In de veldexperimenten blijkt dat de benodigde vertaalslag van een kans- of telprobleem naar het roostermodel en weer terug veel moeilijkheden oplevert en kennelijk anti-intuïtief is. In termen van Skemp en Van Dormolen behoort het roostermodel tot een ander cognitief schema dan de tel- en kansproblemen, en het ligt voor leerlingen dus niet voor de hand om het te gaan toepassen.

Pijls negeert didactische alternatieven zoals de telregel uit het eerste Nederlandse schoolboek over de statistiek van Bunt (1956). Met de telregel probeer je systematisch het aantal posities te koppelen aan de ballen. Onze eigen onderwijservaring in havo-vwo en volwassenonderwijs is dat het weergegeven probleem zonder voorkennis een uitstekend startprobleem is om leerlingen zelf in groepjes telstrategieën en telregels te laten ontwikkelen, zonder enige voorkennis. Het leent zich ook heel goed voor een heuristische aanpak, bijvoorbeeld kleiner maken, eerst maar eens zeven verschillende kleuren, hoeveel rijtjes met rode ballen heb ik en hoe zit het met dertig rode en veertig blauwe ballen. De telregels (eerst met $7 \times 6 \times 5$ delen door $1 \times 2 \times 3$ en uiteindelijk met $7!$ en delen door $3!$ en $4!$) lijken abstracter dan een rooster, maar zijn volgens ons beter wendbaar om te kunnen gebruiken in verschillende situaties. Wie onderzoekt deze veronderstellingen?

Wat zet leerlingen aan om zelf wiskundige ideeën te gaan ontwikkelen?

In de vakdidactieken wordt het van belang geacht dat leerlingen zelf ideeën gaan ontwikkelen, en Freudenthal heeft voor de conceptuele opbouw in een domein het zogenaamde 'heruitvinden' gepropageerd. Na feedback van enkele didactische experts op het materiaal van het eerste veldexperiment, paste Pijls het materiaal aan zodat leerlingen de telregel in een rooster zelf konden ontdekken en formuleren. In het tweede veldexperiment lukte het de leerlingen echter wederom niet goed om de vertaalslag te maken. Voorzover wij het terug

kunnen vinden in het onderzoeksverslag heeft deze hindernis te maken met het gekozen didactische traject en dus ook met de aard van de voorgelegde problemen. Dat zijn geen problemen waar leerlingen met hun wiskundige gereedschap (het roostermodel) frank en vrij mee aan de slag kunnen gaan. Het worden niet hún problemen en het wiskundige gereedschap staat in hun denken niet klaar om dat probleem aan te pakken.

Naast de conceptuele opbouw stelt Pijls de vraag of een procesgerichte houding van de docent leerlingen aanzet tot ideeënontwikkeling. Ten behoeve van het onderzoek wordt een kunstmatige situatie gecreëerd waarin docenten zich in een rol wringen en ofwel uitsluitend producthulp ofwel uitsluitend proceshulp geven. Wij konden ons goed voorstellen dat leerlingen in de proceshulpconditie boos werden toen zij om uitleg vroegen en deze niet kregen. In deze frustrerende situatie gingen zij natuurlijk niet zelfstandig ideeën ontwikkelen. In een vergelijkbaar opgezet experiment van Dekker en Elshout-Mohr (2004) gingen de leerlingen in deze conditie wel beter presteren dan de controlegroep, maar toen geloofde de proceshulpdocent ook sterk in de rol die haar toebedeeld was en paste deze rol in het *contract didactique*. In het tweede veldexperiment van Pijls is dat niet zo en de resultaten zijn ernaar.

Wat weten we al over een optimaal leertraject met contexten, problemen, onderzoeksopdrachten?

Er valt langzamerhand een dik boek te schrijven met een overzicht van onderzoeksliteratuur over deze vraag. In de Nederlandse onderwijscontext heeft een van ons (AvS) al een driedeling gemaakt en voor 4 vwo de verschillen onderzocht tussen WEDT (Wiskunde Eerst Dan Toepassingen), HEWET (volledige integratie wiskunde en contexten) en HWO (fasegewijs afwisselen van instaproblemen, van sorteren naar expliciteren, toepassingen), aldus Van Streun (1989). We waarderen het dat Pijls ook geprobeerd heeft om leerlingen onder verschillende condities met elkaar te vergelijken. Op zorgvuldige wijze verzamelde ze zowel kwalitatieve als kwantitatieve data. De wetenschappelijke methode blijkt zodanig robuust, dat ze haar eigen verwachtingen niet kan bevestigen. Het is echter jammer dat de gebruikte steekproeven klein zijn waardoor alleen grote verschillen als significant gemeten kunnen worden.

We weten dat je met een vergelijkende studie moeilijk recht kunt doen aan de complexiteit van het onderwijs, zoals met de vergelijking tussen eerst theorie dan contexten/onderzoeksopdrachten, of eerst contexten/onderzoeksopdrachten dan theorie of contexten/onderzoeksopdrachten integreren in theorie. Achter de tijdens-conditie uit het voorliggende onderzoek ligt nog een wereld van didactische keuzes en verschillende mogelijkheden met mogelijk verschillende effecten. We weten echter ook dat ergens in een dergelijk leertraject leerlingen tot een vorm van abstractie van het onderliggende begrip of de onderliggende strategie moeten komen, omdat anders de wendbaarheid van het geleerde uitsluitend beperkt blijft tot de sommen die ze al hebben gemaakt.

Literatuur

- Bunt, L.N.H. (1956). *Statistiek voor het vmo*. [In 1972 heruitgegeven als 'Statistiek voor het vwo']. Groningen: Wolters.
- Dekker, R. & Elshout-Mohr, M. (1998). A Process Model for Interaction and Mathematical Level Raising. *Educational Studies in Mathematics* 35(3), 303-314.
- Dekker, R. & Elshout-Mohr, M. (2004). Teacher Interventions Aimed at Mathematical Level Raising During Collaborative Learning. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 39-65.
- Streun, A. van (1985). *Heuristisch wiskunde-onderwijs*. Academisch proefschrift Rijksuniversiteit Groningen.