

## Het effect van wiskundig onderzoek door leerlingen op de groei van hun probleemoplossend vermogen

Trudy van der Kolk-den Heijer  
Driestar Hogeschool

### Samenvatting

De groei van het probleemoplossend vermogen van Nederlandse leerlingen moet bevorderd worden. Ter ondersteuning van die groei is deelname aan wiskundige activiteiten vereist die zowel de uitbreiding van het repertoire aan bruikbare oplossingsstrategieën van leerlingen als een beter doordachte aanpak stimuleren. Wiskundig onderzoek lijkt hiervoor geschikt te zijn. Onderzoekende activiteiten zetten leerlingen aan om als expert na te denken over probleemsituaties en oplossingswijzen. Het effect van deelname aan enkele onderzoekende activiteiten is gemeten door in kaart te brengen welke strategieën tweedeklasleerlingen (vwo) toepassen en wat hun aanpak kenmerkt bij het oplossen van het Isis-probleem. De resultaten van twee groepen van twintig leerlingen, van welke alleen die uit de tweede groep eerder hebben deelgenomen aan enkele onderzoekende activiteiten, zijn vergeleken. Deelname aan slechts enkele onderzoekende activiteiten lijkt al tot het toepassen van meer strategieën en tot een meer doordachte aanpak te leiden. Daarom wordt ter aanmoediging van de groei van het probleemoplossend vermogen van leerlingen aanbevolen om onderzoekende activiteiten, zoals open opgaven met een reflectie achteraf op de gekozen aanpak, als onderdeel van de reguliere activiteiten op te nemen.

### 1. Inleiding

De PISA-score voor probleemoplossen van Nederlandse leerlingen, die als een graadmeter voor hun probleemoplossend vermogen kan worden beschouwd, blijft in zowel 2003 als 2006 achter.

Onder probleemoplossen wordt verstaan het oplossen van niet-standaardproblemen in een begrijpelijke, volgens Freudenthal (1973) mogelijk wiskundige, authentieke context. Probleemoplossen vereist een zekere aanpak, een vaardigheid in het kiezen en toepassen van een oplossingsstrategie terwijl niet meteen duidelijk is welke strategie tot een oplossing leidt (Doorman et al., 2007). Van Streun (2012) noemt veel oplossingsstrategieën, zoals het probleem herformuleren, een voorbeeld doorrekenen en reflecteren op de gevolgde aanpak. De voor leerlingen persoonlijk bruikbare strategieën zijn bepalend voor

hun keuze en voor de aanpak als geheel. Het probleemoplossend vermogen van leerlingen is dus afhankelijk van hun persoonlijke mogelijkheden om oplossingsstrategieën toe te passen (Polya, 1990).

De ontwikkeling van het probleemoplossend vermogen is van belang, omdat deze bijdraagt aan zowel het doorgroeien naar vervolgonderwijs en beroep als aan het gebruik van wiskunde in alledaagse situaties (Van Streun, 2012). Het behoort dan ook tot de doelen van het secundaire wiskundeonderwijs om de genoemde ontwikkeling te stimuleren. De aan de doelen gekoppelde reguliere wiskundige activiteiten echter, die uitleg van regels en procedures omvatten en het maken van specifieke soorten opgaven om het geleerde in te slijpen, zijn volgens Schoenfeld (2007) meer gericht op het beheersen van vaardigheden dan op werkelijk begrip. De reguliere activiteiten moedigen leerlingen te weinig aan om mogelijk bruikbare strategieën uit te proberen en te zoeken naar een geschikte aanpak. Er zijn ter bevordering van de ontwikkeling van hun probleemoplossend vermogen aanvullende of vervangende activiteiten nodig (Doorman et al., 2007).

Bij onderzoekend leren, ofwel wiskundig onderzoek, dat volgens Hmelo-Silver et al. (2006) veel overeenkomst met probleemoplossen vertoont en door Da Ponte (2007) zelfs een speciale vorm van probleemoplossen wordt genoemd, hebben leerlingen de rol van wiskundige. Net als bij wetenschappelijk onderzoek staat een niet noodzakelijk binnen vakmatige grenzen gestelde vraag centraal en moet bijvoorbeeld overlegd worden over de waarde van een gevonden oplossing. Van Streun (2012) merkt op dat deelname van leerlingen aan wiskundig onderzoek hun creatief denken stimuleert, wat gunstig is voor de uitbreiding van hun persoonlijke mogelijkheden om oplossingsstrategieën te kiezen en toe te passen (Gravemeijer, 2002). Ook Kuhn en Pease (2008) vinden dat de ontwikkeling van het probleemoplossend vermogen van leerlingen wordt bevorderd door regelmatig en gedurende langere tijd deel te nemen aan wiskundig onderzoek. Het is de moeite waard om na te gaan of deelname aan slechts enkele onderzoekende activiteiten de genoemde ontwikkeling al ondersteunt.

Het Europese Primas-project ([www.Primas-project.eu](http://www.Primas-project.eu)) stimuleert de invoering van onderzoekend leren voor wiskunde en de natuurwetenschappelijke vakken. Het richt zich op een meer verdiept inzicht in begrippen en methoden, op versterking van de gedachte dat de genoemde vakken vooral in situaties buiten school bruikbaar zijn en op de ontwikkeling van de persoonlijke mogelijkheden van leerlingen om het geleerde ook werkelijk toe te passen. Doorman et al. (2012) wijzen op de rol van de docent, die moet streven naar een klasklimaat waarin leerlingen optimaal kunnen leren. De invoering van zo'n klasklimaat is een pedagogische uitdaging voor docenten (Schoenfeld, 2007), wat de noodzaak van de bij het Primas-project behorende professionaliseringsactiviteiten onderstreept (Sherin, 2002). Deze professionaliseringsactiviteiten zijn bijvoorbeeld gericht op de lesindeling en de manier van vragen stellen (Doorman et al., 2012).

Het in dit artikel beschreven experiment heeft binnen de kaders van het Primas-project plaatsgevonden, maar richt zich vooral op de leerlingen. Er is nagegaan of hun deelname

aan slechts enkele onderzoekende activiteiten al gunstig zou kunnen zijn voor de uitbreiding van hun persoonlijk bruikbare oplossingsstrategieën en voor het beter doordenken van hun aanpak. Daartoe zijn de door leerlingen gebruikte strategieën en hun aanpak geanalyseerd bij deelname aan een onderzoekende activiteit.

Hieronder wordt eerst nader ingegaan op de kenmerken van probleemoplossen en wiskundig onderzoek, waarna de keuze van het bij dit experiment gebruikte oud-Egyptische Isis-probleem wordt toegelicht.

## **2. Theoretisch kader**

### **2.1 Probleemoplossen**

Probleemoplossen, van land tot land door de tijd heen nogal verschillend gedefinieerd (Törner et al., 2007), wordt tegenwoordig gerekend onder de denkactiviteiten (Drijvers, 2011). Doorman et al. (2007) omschrijven probleemoplossen als de kunst van het aanpakken van niet-triviale problemen waarvoor leerlingen nog geen bekende routinematige oplossing hebben maar die hen mogelijkheden biedt om een nieuwe oplossingsstrategie te ontwikkelen.

#### **Problemen aanpakken en oplossingsstrategieën ontwikkelen**

Voor het adequaat aanpakken en oplossen van problemen hebben leerlingen naast wiskundige basiskennis en een onderzoekende houding (Van Streun & Kop, 2012) volgens Polya (1990) vooral ook de keuze uit een repertoire aan persoonlijk bruikbare oplossingsstrategieën nodig. Oplossingsstrategieën die tijdens reguliere activiteiten (zoals bij het oefenen van vaardigheden) worden aangereikt, worden niet vanzelfsprekend toegevoegd aan dit repertoire (Doorman et al., 2007). Leerlingen zijn juist bij deelname aan activiteiten waarin speciaal de aanpak aandacht krijgt, door te redeneren, te communiceren en verbanden te leggen (Schoenfeld, 2007), in staat om de in hun repertoire aanwezige oplossingsstrategieën te versterken en nieuwe strategieën te ontwikkelen. De te kiezen strategieën moeten dan ook voortvloeien uit de gevolgde aanpak, waardoor de nadruk meer ligt op het leren van een handige strategie dan op het vinden van de oplossing van een probleem (Swan, 2005; Van Streun, 2012). Een strategie die leidt tot het vinden van een oplossing of tot verdiept inzicht, of ook tot een meer omvattende reflectie dan tevredenheid met alleen een antwoord, wordt persoonlijk bruikbaar ofwel succesvol toepasbaar genoemd (Gravemeijer, 2002; Polya, 1990; Van Streun, 2012). Hoewel een niet succesvol toepasbare strategie niet tot het repertoire van leerlingen behoort (Polya, 1990), leidt het bij het zoeken naar een geschikte aanpak toepassen van deze strategie volgens Doorman et al. (2007) mogelijk tot ontwikkeling van de genoemde strategie.

### **De aanpak doordenken**

Probleemoplossen kenmerkt zich volgens Van Streun (2012) door procesmatigheid, waarvoor Polya (1990) vier categorieën van oplossingsstrategieën onderscheidt. Hij noemt deze categorieën fasen, namelijk 'probleem begrijpen', 'plan maken', 'plan uitvoeren' en 'oplossing controleren', maar benadrukt dat deze niet noodzakelijk in de aangegeven volgorde doorlopen worden. Ook Da Ponte (2007) merkt op dat keuzevrijheid van belang is bij het inzetten van strategieën, het leren van wiskunde betreft immers meer dan een systeem van regels (Bishop et al., 2003). Oost en Markenhof (2011) bepleiten het goed voorbereiden, het doordenken van de aanpak, als waarborg voor het vinden van een logische en efficiënte route naar antwoorden.

Passend bij de definitie zijn zowel de uitbreiding van het repertoire aan succesvol toepasbare oplossingsstrategieën als een beter doordachte aanpak maatgevend voor de groei van het probleemoplossend vermogen van leerlingen. Beide manifesteren zich bij deelname aan wiskundig onderzoek.

### **2.2 Wiskundig onderzoek**

Wiskundig onderzoek heeft meestal betrekking op een authentieke situatie. Onderzoekende activiteiten bevatten volgens een geaccepteerde definitie de elementen 'vraag stellen', 'onderzoek ontwerpen', 'empirische data onderzoeken en analyseren' en ten slotte 'uitkomsten beoordelen en conclusies trekken' (Kuhn & Pease, 2008).

### **Onderzoeken en oplossingsstrategieën ontwikkelen**

Een vraag die bruikbaar is bij een onderzoekende activiteit wordt niet gesteld om het vak te leren, maar staat op zichzelf. Dit is kwaliteitsbevorderend (Spandaw & Zwaneveld, 2012), te meer vanwege de noodzakelijkheid te interpreteren uitkomsten omdat een eenduidig antwoord niet vanzelfsprekend is. Volgens Drijvers (2011) doet deze interpretatie van uitkomsten een beroep op de inventiviteit van leerlingen, door Van Streun (2012) het creatief ofwel divergent denken genoemd. Divergent denken stimuleert niet alleen de ontwikkeling van een onderzoekende houding (Van Streun & Kop, 2012), het blijkt ook gunstig te zijn voor de uitbreiding van het repertoire aan succesvol toepasbare oplossingsstrategieën van leerlingen (Gravemeijer, 2002). Strategieën die worden toegevoegd zijn bijvoorbeeld het idee dat iets uitgevonden moet worden, het vermogen om concrete situaties te beschrijven of te vergelijken en het inzicht dat controle nodig is bij het trekken van conclusies (Kuhn & Pease, 2008). Genoemde strategieën wijzen erop dat leerlingen bij deelname aan onderzoekende activiteiten wennen aan het doordenken van hun aanpak.

### **De aanpak doordenken**

Hmelo-Silver et al. (2006) merken op dat leerlingen die regelmatig aan wiskundig onderzoek deelnemen goed investeren in 'probleem begrijpen' en 'planning' (Polya, 1990). Dit ter voorbereiding goed doordenken van te kiezen strategieën kost volgens Oost en Mar-

kenhof (2011) dertig procent van de beschikbare tijd, maar wordt beloond met een efficiënte voortgang van het proces dat uitmondt in 'plan uitvoeren' en 'oplossing controleren' (Polya, 1990).

Het grootste leereffect wordt bereikt als individuele reflectie optreedt (Swan, 2008). Hiervoor biedt een afwisseling van groepswork en centrale momenten optimale mogelijkheden, indien passend ondersteund door de docent.

### **Docentsteun**

Sherin (2002) onderscheidt sociale en analytische docentsteun. Sociale steun beoogt motivatie en idee-ontwikkeling en moet tijdens groepswork worden toegepast, terwijl analytische steun, door Dekker en Elshout-Mohr (2004) processteun genoemd, de centrale momenten betreft met de bedoeling om de aandacht te vestigen op een deel van de geopenbare ideeën en om oplossingsprocessen te beïnvloeden. Aandacht voor vervolgvragen door de docent bevordert volgens Van Streun en Kop (2012) de groei van een onderzoekende houding. Swan (2008) benadrukt het belang van interactiviteit. Hij is van mening dat er pas sprake is van wiskunde leren als er woorden aan gegeven zijn. Beide vormen van docentsteun zijn er dan ook op gericht om de leerlingen zo duidelijk en overtuigend mogelijk te laten beschrijven, uitleggen, generaliseren, bewijzen en communiceren (Kuhn & Pease, 2008).

Doorman et al. (2012) doen verslag van een onderzoekende activiteit, uitgevoerd door een aan het Primas-project deelnemende docent. Het kenmerkende van wiskundig onderzoek is toegelicht aan de hand van een onderdeel van deze activiteit (zie bijlage 1).

Dit artikel beschrijft de resultaten van een experiment waarin is nagegaan of deelname van leerlingen aan slechts enkele onderzoekende activiteiten al ondersteunend zou kunnen zijn voor de uitbreiding van hun persoonlijk bruikbare oplossingsstrategieën en voor het beter doordenken van hun aanpak. Bij dit experiment is het Isis-probleem gebruikt.

### **2.3 Het Isis-probleem als onderzoekende activiteit**

Het Isis-probleem stamt al uit de oud-Egyptische beschaving. Het is genoemd naar de godin van de landbouw en is bekend als één van de problemen waarmee men elkaar in die tijd heeft uitgedaagd. Het luidt als volgt:

*Welke rechthoeken met gehele getallen als zijden (gemeten met een zekere eenheid) hebben de eigenschap dat hun oppervlakte en hun omtrek (als getal) gelijk zijn?*

Greer et al. (2009) hebben zes verschillende oplossingswijzen van dit probleem uitgewerkt ten behoeve van hun onderzoek naar de opvattingen over 'bewijzen' onder Vlaamse leraren-in-opleiding. De genoemde onderzoekers, die een voorkeur voor algebraïsche bewijzen vinden, bevelen het Isis-probleem aan in verder onderzoek met leerlingen. Het probleem is namelijk gemakkelijk te begrijpen, te tekenen en ook zonder specifieke technisch wiskundige kennis op meerdere manieren op te lossen, zoals met behulp van de

omtrek- en oppervlakteformules van de rechthoek of zelfs door proberen. Bovendien worden bij het oplossen van het Isis-probleem de gevolgde aanpak en de toegepaste strategieën goed zichtbaar (Greer et al., 2009). Freudenthal (1973), Da Ponte (2007) en Doorman et al. (2007) bevestigen dat een probleem als het Isis-probleem bruikbaar is bij wiskundig onderzoek vanwege de authenticiteit, de wiskundige context en de oplosbaarheid op verschillende niveaus van wiskundig denken.

### **3. Probleemstelling**

Het gedurende twee jaar wekelijks deelnemen aan wiskundig onderzoek bevordert de groei van het probleemoplossend vermogen van leerlingen (Kuhn & Pease, 2008). Het is de vraag of deelname van leerlingen aan slechts enkele onderzoekende activiteiten de groei van hun probleemoplossend vermogen al zou kunnen ondersteunen.

#### **Onderzoeksvraag**

Ondersteunt de deelname van leerlingen aan enkele onderzoekende activiteiten de uitbreiding van de voor hen succesvol toepasbare oplossingsstrategieën en het beter doordenken van hun aanpak?

Om deze vraag te beantwoorden zijn de toegepaste strategieën en de aanpak van twee groepen tweedeklasleerlingen (vwo) bij het oplossen van het Isis-probleem vergeleken. De ene groep heeft alleen aan reguliere onderwijsactiviteiten deelgenomen, terwijl de andere groep daarnaast enkele onderzoekende activiteiten heeft uitgevoerd.

Voor beide groepen leerlingen zijn de volgende deelvragen geformuleerd:

1. Welke oplossingsstrategieën passen de leerlingen succesvol toe bij het oplossen van het Isis-probleem, gelet op het vinden van een oplossing of het komen tot verdiept inzicht, of ook tot een meer omvattende reflectie dan tevredenheid met alleen een antwoord?
2. Welke strategieën passen de leerlingen als onderdeel van hun aanpak toe, maar zonder succes?
3. Wat kenmerkt de aanpak van de leerlingen, gelet op de verdeling van hun aandacht over de vier categorieën van strategieën (probleem begrijpen, plan maken, plan uitvoeren en oplossing controleren) gedurende het oplossingsproces?
4. Welk onderscheid bestaat er tussen de twee groepen leerlingen, gelet op het aantal (succesvol) toegepaste strategieën en op hun aanpak?

### **4. Methode**

#### **4.1 Context van het experiment**

Een aan het Primas-project deelnemende docent heeft tijdens het cursusjaar 2011-2012 in haar drie groepen van tweedeklasleerlingen (vwo, de groepen A, B en C) reguliere onderwijsactiviteiten uitgevoerd. Daarnaast heeft zij alleen in groep B in de periode van

september tot november 2011 haar leerlingen gedurende enkele lessen onderzoekende activiteiten laten doen. Zij heeft in januari 2012 de gelegenheid geboden om het hier beschreven experiment uit te voeren.

Vier leerlingen uit groep C hebben als testgroep opgetreden. De gegevens van hun oplossingsproces zijn gebruikt om te verifiëren of het door de auteur van dit artikel samengestelde instrument voldoende strategieën bevat om oplossingsprocessen nauwkeurig te kunnen coderen. De gegevens van de oplossingsprocessen van de leerlingen uit de groepen A en B zijn gebruikt om een antwoord te vinden op de bij het experiment gestelde vraag. Het vergelijken van hun werkwijzen is mogelijk gezien de vergelijkbare resultaten op grond van de reguliere toetsing en vanwege het feit dat dezelfde docent hun wiskundeonderwijs verzorgt. In de groepen A en B is het gemiddelde rapportcijfer in november 2011 namelijk vastgesteld op 7,3 respectievelijk 7,5 met een standaarddeviatie van 0,10 respectievelijk 0,15.

## **4.2 Het instrument**

Het instrument is bedoeld om oplossingsprocessen te coderen naar de toegepaste strategieën. Het bevat de strategieën die Greer et al. (2009) en Van Streun (2012) noemen. Deze strategieën, gerangschikt volgens de categorieën van Polya (1990), zijn alle voorzien van een code die zowel de strategie als de categorie waaronder deze valt toont. De code **PMc** bijvoorbeeld wil zeggen 'plan maken – concreet voorbeeld onderzoeken'.

### **Bruikbaarheid**

Het instrument is bruikbaar nadat de opmerkingen en handelingen van leerlingen tijdens het oplossingsproces als afzonderlijke waarnemingen schriftelijk zijn vastgelegd. Om dat te doen zijn bij het hier beschreven experiment video-opnamen van oplossingsprocessen getranscribeerd. Er is echter om praktische redenen ook gebruik gemaakt van data uit de reflectie achteraf van leerlingen op basis van hun aantekeningen (onder de kop 'datacollectie' zal worden uitgelegd dat deze data inderdaad bruikbaar zijn). Na codering van de waarnemingen vertegenwoordigt elke code een toegepaste strategie, terwijl een set van codes in een zekere periode van het oplossingsproces de verdeling van de aandacht over de categorieën toont.

### **Test**

De testgroep is het Isis-probleem voorgelegd. Tijdens het 17 minuten durende oplossingsproces zijn achtereenvolgens 338 waarnemingen gedaan die met behulp van het voorlopige instrument zijn gecodeerd. Binnen twee minuten na de start zijn al strategieën waargenomen die het instrument niet vermeldt. Tabel 1 geeft een verkorte weergave van het betreffende fragment. De eerste kolom bevat de waarnemingen, de tweede kolom de best passende strategieën en de laatste kolom de optredende strategieën die het instrument niet vermeldt.

Tabel 1. Fragment waarin aan het instrument toe te voegen strategieën voorkomen

| Waarneming   | In het instrument voorkomende strategie | Aan het instrument toe te voegen strategie                |
|--|---|---|
| Kijk, dus, oppervlakte en omtrek, en dan rechthoeken... met gehele getallen als zijden.  | Voorwaarden vaststellen                 |   |
| ... eigenschappen...   | ?                                       | <i>Betekenis van voorkomende wiskundetaal vaststellen</i> |
| Je denkt dan eerder $1 \times 1$ toch..., met, ehh...  | Proberen, trial and error               |   |
| Want je moet uitrekenen wat de oppervlakte is.   | Probleem herformuleren                  |   |
| Hoe reken je oppervlakte uit?<br>Lengte keer breedte toch?   | ?                                       | <i>Bewerkingen behorend bij begrippen vaststellen</i>     |
| Omtrek, dan bedoelen ze het dubbele, dus dit is zeg maar de omtrek.<br>Omtrek is alleen een lijn eromheen (wijst aan wat de omtrek van een rechthoek is door met de vinger een rechthoek op tafel te tekenen). | ?                                       | <i>Begrippen definiëren</i>                               |

Bij 88 van de 338 waarnemingen in de testgroep ontbreekt een passende strategie in het voorlopige instrument, waarvan bij 80 waarnemingen de strategie 'begrippen definiëren' past. Vier waarnemingen zijn te coderen door 'betekenis van voorkomende wiskundetaal vaststellen', de overige vier door 'bewerkingen behorend bij begrippen vaststellen'. De drie ontbrekende strategieën zijn aan het instrument toegevoegd als onderdeel van de categorie 'probleem begrijpen', waarmee het instrument is vastgesteld (zie bijlage 2).

### 4.3 Deelnemers

Er hebben in totaal 42 tweedeklasleerlingen (vwo) deelgenomen aan het experiment. Het zijn de vier leerlingen van de testgroep en 20 respectievelijk 18 leerlingen uit de groepen A en B, verdeeld over vijf subgroepen A<sub>1</sub> t/m A<sub>5</sub> en vijf subgroepen B<sub>1</sub> t/m B<sub>5</sub>.

### 4.4 Activiteit

Tijdens een wiskundeles zijn de leerlingen uitgedaagd om in subgroepen van vier het Isis-probleem op te lossen en aantekeningen te maken van hun oplossingsproces, met sociale steun van de docent (Sherin, 2002) die hen heeft aangemoedigd om te overleggen en hardop te denken zoals dat aanbevolen is bij onderzoekende activiteiten. Aansluitend is met elke subgroep gedurende tien minuten een mini-interview gehouden, waarin de leer-



lingen is gevraagd om aan de hand van hun aantekeningen verslag te doen van het proces van doorgronden van het probleem, het zoeken en vinden van oplossingen en het interpreteren van die oplossingen, ondertussen aangemoedigd om te reflecteren op hun aanpak als geheel.

Het verwoorden van het denken is behalve voor het leerproces (Swan, 2008) ook gunstig geweest voor het verkrijgen van data, zoals hieronder wordt toegelicht.

#### **4.5 Datacollectie**

De data, bestaande uit de toegepaste strategieën gedurende de oplossingsprocessen, zijn verkregen via video-opnamen van het groepswerk en de mini-interviews.

##### **Groepswerk**

Video-opnamen van het groepswerk leggen elke daadwerkelijke opmerking en handeling vast, waardoor ze geschikt zijn voor datacollectie. De kwaliteit van opnamen in het klaslokaal waar tegelijk vijf subgroepen aan het werk zijn laat echter door de ruis te wensen over. Alleen in de subgroepen  $A_1$  en  $B_1$  zijn op de genoemde wijze data verkregen. De L-vorm van het betreffende lokaal biedt namelijk voor één subgroep de mogelijkheid om apart te zitten, waardoor de opname van hun groepswerk kwalitatief voldoende is gebleken. Voor de andere subgroepen is gezocht naar een alternatief voor het verkrijgen van data. De met video vastgelegde mini-interviews blijken in dit opzicht te voldoen.

##### **Mini-interviews**

In de subgroepen  $A_1$  respectievelijk  $B_1$  zijn zowel via het groepswerk als via mini-interviews, waarin de leerlingen aan de hand van hun aantekeningen gereflecteerd hebben op hun oplossingsproces, data verkregen. De codering van deze dubbel verkregen data van het oplossingsproces van subgroep  $A_1$  is onderling vergeleken, en evenzo van subgroep  $B_1$ . Voor subgroep  $A_1$  geldt dat de codering via het groepswerk slechts één strategie meer zichtbaar maakt dan die via het mini-interview. Het betreft de strategie 'betekenis van voorkomende wiskundetaal vaststellen'. Deze strategie past echter maar bij één van de in totaal 162 waarnemingen, wat minder is dan 1%. De overeenkomst in de codering van de verschillende data van subgroep  $A_1$  is dus 99%, wat als groot wordt beschouwd. Voor subgroep  $B_1$  bedraagt de overeenkomst 92%. De codering via het groepswerk in subgroep  $B_1$  maakt drie strategieën meer zichtbaar dan die via het mini-interview. Tabel 2 toont een overzicht. Vanwege de grote overeenkomst in de codering van de op verschillende wijze verkregen data voor de beide subgroepen  $A_1$  en  $B_1$  worden behalve de data uit het groepswerk ook de data uit de mini-interviews als geschikt aangemerkt voor het in kaart brengen van de toegepaste oplossingsstrategieën. In de subgroepen  $A_2$  t/m  $A_5$  en  $B_2$  t/m  $B_5$  zijn dan ook data uit de mini-interviews verkregen.

Tabel 2. Strategieën die door data via het groepswerk wel zichtbaar worden, maar via de mini-interviews niet

| Subgroep       | Strategie, wel zichtbaar gemaakt door data via het groepswerk, niet door data via de mini-interviews  | Frequentie   | Aantal toegepaste strategieën | Percentage overeenkomst in data via het groepswerk en via de mini-interviews |
|----------------|---|--------------|-------------------------------|--|
| A <sub>1</sub> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Betekenis van voorkomende wiskundetaal vaststellen</li> </ul>  | 1            | 162                           | 99   |
| B <sub>1</sub> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Voorwaarden vaststellen</li> <li>Probleem herformuleren</li> <li>Gebruik van alle gegevens nagaan</li> </ul> | 11<br>3<br>2 | 195                           | 92   |

#### 4.6 Data-analyse

De codering van de data heeft plaatsgevonden met behulp van het hierboven besproken instrument. Voor elke toegekende code is volgens de besproken criteria nagegaan of het een al dan niet succesvol toegepaste strategie betreft. Hieronder zijn deze criteria met voorbeelden verduidelijkt. Vervolgens zijn de toegekende codes gebundeld tot vier sets die corresponderen met vier even lange perioden van het groepswerk. Om meer te weten te komen over de aanpak van de leerlingen is voor elke set van codes de verdeling over de categorieën (Polya, 1990) nagegaan.

#### Analyse van toegepaste strategieën

##### Toepassen leidt wel/niet tot het vinden van een oplossing

Voorbeeld 1

$$X \cdot B = (X + b) \cdot 2$$

$$6 \cdot 3 = (6 + 3) \cdot 2$$

$$4 \cdot 4 = (4 + 4) \cdot 2$$

Figuur 1.

De aantekeningen in figuur 1 tonen dat de strategieën 'notatiewijze invoeren' en 'variabelen gebruiken' hebben geleid tot het vinden van oplossingen. Deze strategieën zijn succesvol toegepast.

Voorbeeld 2

"... dan kun je kijken of de som van die twee getallen... de helft is van het product van die twee getallen."

Deze opmerking van een leerling is niet begrepen in de groep, er is niets mee gedaan. De strategieën 'variabelen gebruiken', 'omtrek- en oppervlakteformules van de rechthoek gebruiken' en 'generaliseren' zijn wel toegepast, maar zonder succes.

---

**Toepassen leidt wel/niet tot verdiept inzicht**


---

## Voorbeeld 1

“... en toen dachten we, hé, er zijn dus ook andere oplossingen.”

De reflectie van een subgroep tijdens een mini-interview laat zien dat de leerlingen bij het vinden van de tweede oplossing dankzij de strategie ‘eigen aandachtspunten vaststellen’ tot verdiept inzicht zijn gekomen. Deze strategie is succesvol toegepast.

## Voorbeeld 2



Figuur 2. Gestelde voorwaarden voor de afmetingen van de rechthoeken die mogelijk voldoen

De aantekeningen in figuur 2 tonen de strategie ‘voorwaarden stellen’. Uit het mini-interview met de betreffende subgroep blijkt echter dat geen verband gezien wordt tussen de gestelde voorwaarden en een beperkt aantal oplossingen. Veel voorbeelden zijn geprobeerd en toch wordt opgemerkt: “Ik denk dat er nog wel meer oplossingen zijn.” De strategie ‘voorwaarden stellen’ is zonder succes toegepast.

---

**Toepassen leidt wel/niet tot een meer omvattende reflectie dan tevredenheid met alleen een antwoord**


---

## Voorbeeld 1

“... dan gaan we hier proberen iets van een conclusie uit te bedenken.”

Deze opmerking van een leerling toont dat de strategie ‘verloop van proces nagaan’ tot een reflectie leidt die los staat van gevonden antwoorden. Deze strategie is succesvol toegepast.

## Voorbeeld 2

“... nou nee, niet echt tevreden. We snapten niet dat we dit niet voor elkaar konden krijgen... ik ben blij dat we ervan af zijn eigenlijk.”

De leerling die dit opmerkt wordt bijgevallen door haar groepsgenoten. Dit toont dat reflectie op grond van de strategie ‘verloop van proces nagaan’ alleen het vinden van oplossingen betreft. De strategie ‘verloop van proces nagaan’ is zonder succes toegepast.

---

**Analyse van de aanpak**

Het oplossingsproces wordt behalve door de toegepaste strategieën ook gekenmerkt door de aanpak als geheel. Om meer te weten te komen over de aanpak is voor vier in tijd gelijke perioden van het oplossingsproces, vertegenwoordigd door de bijbehorende sets van codes, de verdeling over elk van de categorieën (Polya, 1990) berekend. Voor elke periode is het aantal toegekende codes bij de categorieën ‘probleem begrijpen’, ‘plan maken’, ‘plan uitvoeren’ en ‘oplossing controleren’ uitgedrukt als percentage van het totaal van toegekende codes. De gevonden percentages zijn weergegeven in een grafiek

die binnen een periode, maar ook tussen de opeenvolgende perioden, zichtbaar maakt hoe de verdeling van de aandacht van de leerlingen over de categorieën is geweest.

De data via het mini-interview van subgroep B<sub>1</sub> zijn deels door een collega-onderzoeker gecodeerd. Haar codering bestaande uit 30 codes is vergeleken met die van de auteur van dit artikel, wat geleid heeft tot een interbeoordelaarsbetrouwbaarheid van 0,64 (Cohens Kappa). Een overeenkomst als deze wordt als voldoende beschouwd.

Voor het beantwoorden van de deelvragen 1 en 2 over de strategieën die al dan niet succesvol zijn toegepast, is voor de subgroepen A<sub>1</sub> en B<sub>1</sub> gebruik gemaakt van de data via het groepswerk, voor de subgroepen A<sub>2</sub> t/m A<sub>5</sub> en B<sub>2</sub> t/m B<sub>5</sub> van de data via de mini-interviews. Om deelvraag 3 over de aanpak te beantwoorden, zijn de data via het groepswerk in de subgroepen A<sub>1</sub> en B<sub>1</sub> gebruikt.

Om deelvraag 4 te beantwoorden zijn de antwoorden op de deelvragen 1, 2 en 3 van de groepen A en B vergeleken. Het antwoord op deze laatste deelvraag is bepalend bij het beantwoorden van de hoofdvraag in het hier beschreven experiment, namelijk of leerlingen die eerder aan slechts enkele onderzoekende activiteiten hebben deelgenomen meer strategieën succesvol toepassen en hun aanpak beter doordenken dan leerlingen die alleen aan reguliere activiteiten hebben deelgenomen.

## 5. Resultaten

### 5.1 Toegepaste oplossingsstrategieën

De toegepaste strategieën in de subgroepen van A respectievelijk B zijn gerubriceerd en weergegeven in de tabellen 3 en 4. Het aantal sterretjes in een cel correspondeert met het aantal subgroepen dat de betreffende strategie al dan niet succesvol toepast.

Uit tabel 3 blijkt dat slechts 16 van de 35 in het instrument opgenomen strategieën succesvol zijn toegepast. De subgroepen van A passen 8 verschillende strategieën succesvol toe, gemiddeld 5,6 strategieën per subgroep, terwijl de subgroepen van B 15 strategieën succesvol toepassen met een gemiddelde van 9,0 strategieën per subgroep.

Tabel 4 laat zien dat de subgroepen van A 5 strategieën niet succesvol toepassen, gemiddeld 3,9 strategieën per subgroep, terwijl de subgroepen van B 9 strategieën niet succesvol toepassen met een gemiddelde van 5,0 strategieën per subgroep.

### 5.2 De aanpak

De grafieken in figuur 3 en 4 maken voor de subgroepen A<sub>1</sub> respectievelijk B<sub>1</sub> per periode de verdeling van de codes over de categorieën zichtbaar, uitgedrukt als percentages van het totaal van toegekende codes gedurende het oplossingsproces.

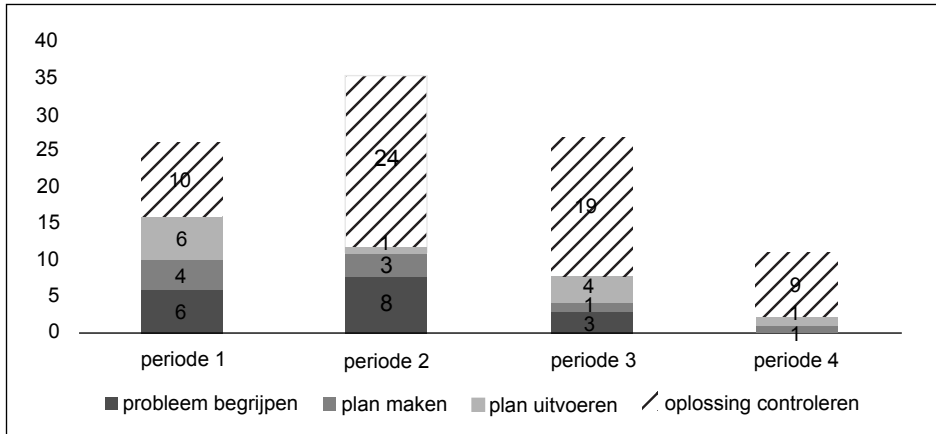
De codering van het groepswerk in A<sub>1</sub> betreft 245 codes. Gedurende de opvolgende perioden zijn respectievelijk 26, 36, 27 en 11 procent van de codes toegekend, op hun beurt volgens de in de grafiek vermelde percentages weer onderverdeeld naar de categorieën. Voor B<sub>1</sub> betreft het 210 codes, met per periode 25, 25, 30 en 20 procent van de codes.

Tabel 3. Succesvol toegepaste strategieën in de subgroepen van A en B

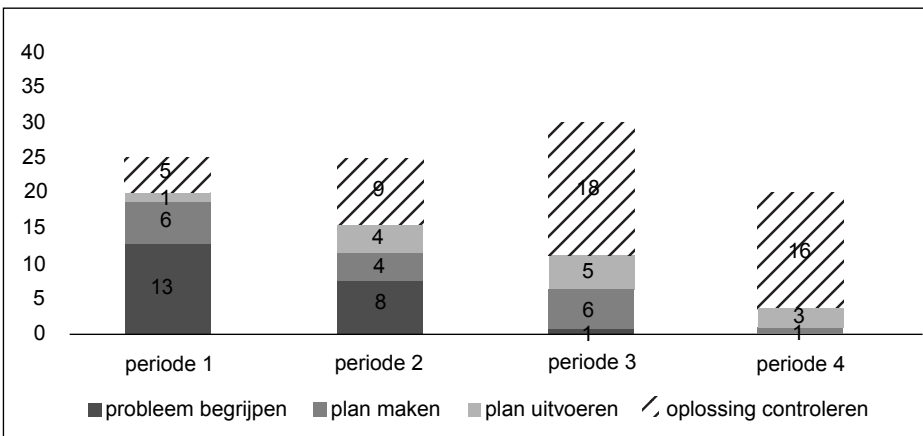
| <b>Strategie</b>                             | <b>A</b> | <b>B</b> |
|--|----------|----------|
| Gegevens vaststellen                         |          | ***      |
| Voorwaarden vaststellen                      | ***      | ***      |
| Tekening maken                               | *****    | *****    |
| Begrippen definiëren                         | ***      | ***      |
| Bewerkingen horend bij begrippen vaststellen | *        | ****     |
| Notatiewijze invoeren                        |          | *        |
| Variabelen gebruiken                         |          | *        |
| Vergelijkbaar bekend probleem herkennen      |          | *        |
| Concreet voorbeeld onderzoeken               | *****    | *****    |
| Bruikbare gegevens vaststellen               |          | *        |
| Proberen, trial and error                    | *****    | *****    |
| Generaliseren                                |          | *        |
| Voorbeeld doorrekenen                        | *****    | *****    |
| Na proberen gestructureerd afmetingen kiezen | *        |          |
| Verloop van proces nagaan                    |          | ***      |
| Eigen aandachtspunten vaststellen            |          | ****     |

Tabel 4. Niet succesvol toegepaste strategieën in de subgroepen van A en B

| <b>Strategie</b>  | <b>A</b> | <b>B</b> |
|---|----------|----------|
| Voorwaarden vaststellen   |          | **       |
| Notatiewijze invoeren   |          | *        |
| Variabelen gebruiken  |          | ***      |
| Bruikbare gegevens vaststellen  | **       |          |
| Te kiezen methode overwegen   |          | **       |
| Omtrek- en oppervlakteformules van de rechthoek gebruiken, $xy = 2x + 2y$ |          | *        |
| Generaliseren   | ****     | ***      |
| Na proberen gestructureerd afmetingen kiezen                              | ****     | ****     |
| Verloop van proces nagaan   | ****     | ****     |
| Eigen aandachtspunten vaststellen   | *****    | *****    |



Figuur 3. Relatieve aandacht voor de categorieën per periode van het oplossingsproces in subgroep A<sub>1</sub>



Figuur 4. Relatieve aandacht voor de categorieën per periode van het oplossingsproces in subgroep B1

De resultaten in subgroep A<sub>1</sub> tonen dat 18% van het totaal van toegekende codes onder de categorie 'probleem begrijpen' valt, waarvan 14% in de perioden 1 en 2 optreedt. 8% van de codes valt onder 'plan maken', waarvan 7% in de perioden 1 en 2. 12% van de codes valt onder 'plan uitvoeren' en 62% valt onder 'oplossing controleren'.

De resultaten in subgroep B<sub>1</sub> laten zien dat 22% van het totaal van toegekende codes onder de categorie 'probleem begrijpen' valt, waarvan 21% in de perioden 1 en 2 optreedt. 17% van de codes valt onder 'plan maken', waarvan 10% in de perioden 1 en 2. 13% van de codes valt onder 'plan uitvoeren' en 48% valt onder 'oplossing controleren', waarvan 34% in de perioden 3 en 4.

## 6. Conclusie

Het in dit artikel beschreven experiment is uitgevoerd om te meten of deelname van leerlingen aan slechts enkele onderzoekende activiteiten de groei van hun probleemoplossend vermogen al zou kunnen ondersteunen. Hierbij is het Isis-probleem gebruikt. Het experiment is echter te kleinschalig geweest en de gehanteerde criteria betreffende toegepaste oplossingsstrategieën en de aanpak niet genoeg verfijnd om op grond van de uitkomsten conclusies te kunnen trekken. De hieronder gegeven antwoorden op de deelvragen moeten dus worden gezien als niet meer dan een eerste, voorlopige indicatie.

### Deelvraag 1: Succesvol toegepaste oplossingsstrategieën

Alle leerlingen passen de strategieën 'voorwaarden vaststellen', 'tekening maken', 'begrippen definiëren', 'bewerkingen horend bij begrippen vaststellen', 'concreet voorbeeld onderzoeken', 'proberen', 'voorbeeld doorrekenen' en 'na proberen gestructureerd afmetingen kiezen' succesvol toe.

De leerlingen die eerder aan enkele onderzoekende activiteiten hebben deelgenomen passen daarnaast de strategieën 'gegevens vaststellen', 'notatiewijze invoeren', 'variabelen gebruiken', 'vergelijkbaar bekend probleem herkennen', 'bruikbare gegevens vaststellen', 'generaliseren', 'verloop van proces nagaan' en 'eigen aandachtspunten vaststellen' succesvol toe.

### Deelvraag 2: Niet succesvol toegepaste oplossingsstrategieën

Alle leerlingen passen de strategieën 'generaliseren', 'na proberen gestructureerd afmetingen kiezen', 'verloop van proces nagaan' en 'eigen aandachtspunten vaststellen' wel toe maar niet succesvol.

De leerlingen die eerder aan enkele onderzoekende activiteiten hebben deelgenomen passen ook de strategieën 'voorwaarden vaststellen', 'notatiewijze invoeren', 'variabelen gebruiken', 'te kiezen methode overwegen', en 'formules gebruiken' niet succesvol toe, terwijl de leerlingen die alleen aan reguliere activiteiten hebben deelgenomen daarnaast 'bruikbare gegevens vaststellen' niet succesvol toepassen.

### Deelvraag 3: De aanpak

De leerlingen die alleen aan reguliere activiteiten hebben deelgenomen, hebben in periode 1 niet een speciale voorkeur voor één van de categorieën. In de achtereenvolgende perioden neemt eerst de aandacht voor 'plan maken' af, dan die voor 'probleem begrijpen'

en later ook die voor 'plan uitvoeren', waardoor in de laatste periode vooral aandacht is voor 'oplossing controleren'.

De leerlingen die eerder aan enkele onderzoekende activiteiten hebben deelgenomen hebben in periode 1 een voorkeur voor strategieën uit de categorie 'probleem begrijpen'. In de achtereenvolgende perioden neemt eerst de aandacht voor 'probleem begrijpen' af, daarna die voor 'plan maken', terwijl aandacht voor 'plan uitvoeren' blijft en aandacht voor 'oplossing controleren' in de perioden 3 en 4 overheerst.

#### **Deelvraag 4: Onderscheid tussen de groepen**

De leerlingen die eerder aan enkele onderzoekende activiteiten hebben deelgenomen, passen meer strategieën succesvol toe dan de leerlingen die alleen aan reguliere activiteiten hebben deelgenomen. Dat is een aanwijzing voor een mogelijk groter repertoire van persoonlijk bruikbare oplossingsstrategieën van de eerstgenoemde leerlingen. Dezelfde leerlingen passen ook meer strategieën niet succesvol toe, wat volgens Doorman et al. (2007) mogelijk bijdraagt aan het leren van deze strategieën.

Voor de leerlingen die eerder aan enkele onderzoekende activiteiten hebben deelgenomen valt 62% van de gedurende de eerste helft van het proces toegekende codes onder de categorieën 'probleem begrijpen' en 'plan maken' tegen 34% voor de leerlingen die alleen aan reguliere activiteiten hebben deelgenomen. Dat is een aanwijzing voor een mogelijk grotere investering in strategieën uit de categorieën 'probleem begrijpen' en 'plan maken' (Hmelo-Silver et al., 2006), ofwel in het voorbereiden van het onderzoek (Oost & Markenhof, 2011) door de eerstgenoemde leerlingen. Het lijkt erop dat deze leerlingen hun aanpak beter doordenken dan de leerlingen die alleen aan reguliere activiteiten hebben deelgenomen.

De in het hier beschreven experiment gestelde vraag kan op basis van de antwoorden op de deelvragen voorlopig voorzichtig bevestigend beantwoord worden. Deelname van leerlingen aan enkele onderzoekende activiteiten lijkt de uitbreiding van de voor hen succesvol toepasbare oplossingsstrategieën en het beter doordenken van hun aanpak te ondersteunen.

### **7. Discussie en aanbevelingen**

Het toepassen van de strategieën 'generaliseren' en 'na proberen gestructureerd afmetingen kiezen' is voor bijna alle leerlingen niet succesvol geweest. Deelname aan enkele onderzoekende activiteiten is niet voldoende voor het toevoegen van genoemde strategieën aan het repertoire van de leerlingen, daartoe zijn meer activiteiten nodig waarin aandacht is voor het leren van een strategie (Swan, 2005).

Veel strategieën die het instrument bevat zijn niet toegepast, zoals 'tabel maken'. Het maken van een tabel is in een subgroep overwogen maar meteen weer verworpen omdat dit te veel werk zou zijn. Een mogelijke reden hiervoor is dat tabellen altijd voorgedrukt zijn als het gebruik wenselijk is. De strategie 'tabel maken' wordt aangereikt, waardoor



deze meestal niet tot het repertoire van leerlingen behoort (Doorman et al., 2007). Bovendien wordt met het voordrukken van een tabel de categorie 'plan maken' voor de leerlingen gedaan, wat de geringe aandacht voor deze categorie in het proces als geheel mogelijk verklaart.

De categorie 'oplossing controleren' (Polya, 1990) leidt wellicht ook tot het beter begrijpen van het probleem. De vier categorieën zijn wellicht niet zo strikt te scheiden als in het instrument wordt gesuggereerd. Mogelijk kunnen de categorieën cyclisch worden opgevat, vergelijkbaar met de reflectiecirkel van Korthagen (Korthagen et al., 2003). Deze reflectiecirkel, met als elementen de vier categorieën, zou dan gedurende het oplossingsproces meerdere malen doorlopen worden, terwijl de nadruk eerst op 'probleem begrijpen' ligt waarna deze via 'plan maken' en 'plan uitvoeren' bij 'oplossing controleren' uitkomt.

De hiervoor genoemde punten vormen een pleidooi voor het geven van meer open opdrachten waarin juist de aanpak van belang is voor het doorgronden en oplossen van een probleem, met achteraf tijd voor reflectie. Wiskundig onderzoek bevat deze elementen. Daarom wordt aanbevolen om de reguliere wiskundige activiteiten aan te vullen met onderzoekende activiteiten.

Er is onderzoek op grotere schaal nodig op basis van meer verfijnde criteria en een daarop afgestemd instrument om te kunnen nagaan welk effect de aanbevolen aanvulling met onderzoekende activiteiten op de groei van het probleemoplossend vermogen van leerlingen heeft.

### **English Summary**

The PISA score on problem solving of Dutch students leaves to be desired. To advance the development of their problem solving abilities, mathematical activities are needed that stimulate both the extension of their repertoire of usable problem-solving strategies and the reflection on their problem-solving approach. For this purpose, inquiry-based learning activities seem to be suitable. These activities boost students' thinking about problem situations and ways to solve these. The effect of taking part in some inquiry-based learning activities is measured by the registration of the strategies that students employ in solving the Isis problem. The results of two groups of twenty students, of which only the students of the second group participated in inquiry-based learning activities, have been compared. Taking part in some inquiry-based learning activities seems to have a positive effect on the number of successfully applied strategies and on the problem-solving approach of students. Therefore, adding inquiry-based learning activities, such as open questions combined with a reflection on the chosen problem-solving approach, as a part of the regular activities is recommended.

## Dankwoord

Met dank aan Michiel Doorman en Paul Drijvers voor hun begeleiding en feedback bij het uitvoeren van dit masteronderzoek en het schrijven van dit artikel, en aan Corine van den Boer voor het bieden van de mogelijkheid om data te verzamelen.

## Literatuur

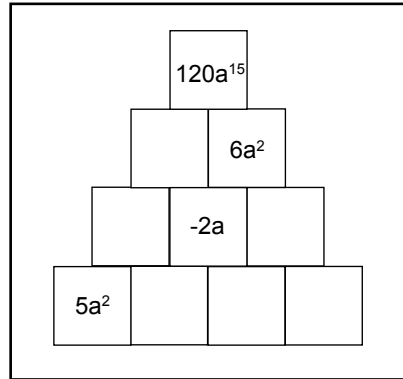
- Bishop, A.J., Seah, W.T. & Chin, C. (2003). Values in mathematics teaching – The hidden persuaders? *In Second International Handbook of Mathematics Education, part II* (pp. 717-765). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Da Ponte, J.P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *The International Journal on Mathematics Education* 39(5-6), 419-430.
- Dekker, R. & Elshout-Mohr, M. (2004). Teacher interventions aimed at mathematical level raising during collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics* 56(1), 39-65.
- Doorman, M., Drijvers, P., Dekker, T., Van den Heuvel-Panhuizen, M., De Lange, J. & Wijers, M. (2007). Problem solving as a challenge for mathematics education in the Netherlands. *The International Journal on Mathematics Education* 39(5-6), 405-418.
- Doorman, M., Van der Kooij, H. & Mooldijk, A. (2012). Denkactiviteiten, onderzoekend leren en de rol van de docent. *Nieuwe Wiskrant* 31(4), 9-11.
- Drijvers, P. (2011). Wat bedoelen ze toch met... denkactiviteiten? *Nieuwe Wiskrant* 31(2), 38-41.
- Freudenthal, H. (1973). Use and aim of mathematics instruction. In: H. Freudenthal, *Mathematics as an Educational Task* (pp. 64-98). Dordrecht/Boston/Lancaster: D. Reidel Publishing Company.
- Gravemeijer, K.P.E. (2002). Emergent modeling as the basis for an instructional sequence on data analysis. In: B. Phillips (Ed.), *ICOTS-6 Proceedings*, Cape Town.
- Greer, B., De Bock, D. & Van Dooren, W. (2009). Het Isis probleem: van het oude Egypte naar de eenentwintigste eeuw. *Nieuwe Wiskrant* 28(4), 32-38.
- Hmelo-Silver, C.E., Duncan, R.G. & Chinn, C.A. (2006). Scaffolding and achievement in problem-based and inquiry learning: A response to Kirschner, Sweller, and Clark. *Educational Psychologist* 42(2), 99-107.
- Korthagen, F.A.J., Koster, B., Melief, K. & Tigchelaar, A. (2003). *Docenten leren reflecteren* (tweede druk). Baarn: Nelissen.
- Kuhn, D. & Pease, M. (2008). What needs to develop in the development of inquiry skills? *Cognition and Instruction* 26(4), 512-559.
- Oost, H. & Markenhof, A. (2011). *Een onderzoek voorbereiden* (tweede druk). Amersfoort: ThiemeMeulenhof.
- Polya, G. (1990). *How to Solve It: The classic introduction to mathematical problem-solving – With a new preface by Ian Stewart* (2nd ed.). Penguin Books Ltd.

- Schoenfeld, A.L. (2007). Problem solving in the United States, 1970-2008 - Research and theory, practice and politics. *The International Journal on Mathematics Education* 39 (5-6), 537-551.
- Sherin, M.G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education* 5(3), 205-233.
- Spandaw, J. & Zwaneveld, B. (2012). Modelleren. In: P. Drijvers, A. van Streun & B. Zwaneveld, *Handboek vakdidactiek* (pp. 235-264). Utrecht: Epsilon Uitgaven.
- Swan, M. (2005). *Improving Learning in Mathematics: Challenges and Strategies*. Sheffield: Teaching and Learning Division, Department for Education and Skills Standards Unit.
- Swan, M. (2008). A designer speaks. *Educational Designer* 1, 1, article 3. Geraadpleegd op 17 november 2011 via <http://www.educationaldesigner.org/ed/volume1/issue1/article3>
- Törner, G., Schoenfeld, A.H. & Reiss, K.M. (2007). Problem solving around the world, summing up the state of art. *The International Journal on Mathematics Education* 39 (5-6), 353.
- Van Streun, A. (2012). Leren en onderwijzen van wiskunde. In: P. Drijvers, A. van Streun & B. Zwaneveld, *Handboek vakdidactiek* (pp. 3-52). Utrecht: Epsilon Uitgaven.
- Van Streun, A. & Kop, P. (2012). Wiskundige denkactiviteiten. In: P. Drijvers, A. van Streun & B. Zwaneveld, *Handboek vakdidactiek* (pp. 339-368). Utrecht: Epsilon Uitgaven.

## Bijlage 1

### Onderdeel van een onderzoekende activiteit in het Primas-project

Tijdens een onderzoekende activiteit, uitgevoerd door een aan het Primasproject deelnemende docent in een groep tweedeklassers (vwo) is een opdracht uit de methode *Getal en Ruimte* (2 vwo deel 1, 2009) het uitgangspunt (Doorman, Van der Kooij & Mooldijk, 2012). Lege vakjes in een zogeheten algebratoren (zie de figuur hiernaast) moeten zodanig worden ingevuld dat de expressie in een vakje het product is van die uit de twee onderliggende vakjes.



#### Vraag

De leerlingen vragen zich bij het ontwerpen van algebratoren voor hun klasgenoten af hoeveel vakjes minimaal ingevuld moeten zijn om alle andere vakjes eenduidig te kunnen afleiden. De docent moedigt de leerlingen aan om dit uit te zoeken.

#### Onderzoek ontwerpen

De leerlingen willen weten of het eenduidige afleiden van alle vakjes met minder dan vier tevoren ingevulde vakjes mogelijk is. Zij gaan onderzoeken of dit mogelijk is met drie tevoren ingevulde vakjes.

#### Empirische data onderzoeken en analyseren

Meerdere leerlingen presenteren een voorbeeld met drie tevoren ingevulde vakjes. Per voorbeeld wordt in onderling overleg geanalyseerd of de nog lege vakjes van de toren eenduidig bepaald zijn door de drie al ingevulde vakjes.

#### Uitkomsten beoordelen

De leerlingen zijn het erover eens dat de besproken voorbeelden niet voldoen.

#### Conclusies trekken

In dit stadium van hun onderzoek raadplegen de leerlingen de docent, die in het midden laat of aan de hand van het besprokene conclusies te trekken zijn. Zij stelt zich niet op als de 'alles-weter', zoals uit onderstaand gespreksfragment blijkt:

- Leerling 1* Weet u of het met drie bekende vakjes kan?  
*Docent* Ik heb geen mogelijkheid gevonden.  
*Leerling 1* Oké.  
*Leerling 2* Tjonge, dan hebben we dit allemaal voor niets gedaan!  
*Docent* Nou ja, ik heb ook niet alles ontdekt.

Met deze houding van de docent wordt één van de kenmerken van wiskundig onderzoek onderstreept, namelijk dat een oplossing geïnterpreteerd moet worden voordat deze als oplossing kan worden beschouwd.

## Bijlage 2

### Instrument voor het coderen van waarnemingen tijdens een probleemoplossende of onderzoekende activiteit

#### Probleem begrijpen

- PBw** betekenis van voorkomende wiskundetaal vaststellen
- PBo** onbekenden vaststellen
- PBg** gegevens vaststellen
- PBc** voorwaarden vaststellen
- PBt** tekening maken
- PBb** begrippen definiëren
- PBs** bewerkingen behorend bij begrippen vaststellen
- PBn** notatiewijze invoeren
- PBv** variabelen gebruiken

#### Plan maken

- PMb** vergelijkbaar bekend probleem herkennen
- PMz** vergelijkbaar probleem zoeken en dat oplossen
- PMh** probleem herformuleren
- PMc** concreet voorbeeld onderzoeken
- PMd** deelprobleem oplossen
- PMg** bruikbare gegevens vaststellen
- PMn** gebruik van alle gegevens nagaan
- PMv** gebruik van alle voorwaarden nagaan

#### Plan uitvoeren

- PUo** te kiezen methode overwegen
- PUm** methode kiezen
  - PUm(p)** proberen, trial and error
  - PUm(v)** vergelijken, aantal randhokjes is vier minder dan totaal aantal hokjes
  - PUm(fr)** omtrek- en oppervlakteformules van de rechthoek gebruiken,  
 $xy = 2x + 2y$
  - PUm(fd)** oppervlakteformule van de driehoek gebruiken, al puzzelend
- PUg** generaliseren
- PUc** elke stap controleren

#### Oplossing controleren

- OCv** voorbeeld doorrekenen
- OCs** na proberen gestructureerd afmetingen kiezen

- OCn** wiskundige notatie  $\frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  of  $y = 2 + \frac{4}{x-2}$  gebruiken
- OCo** na puzzelen met driehoeken, rechthoek verdelen in delen met gelijke oppervlakte en randlengte
- OCt** tabel maken
- OCg** grafische voorstelling maken
- OCr** op eigen aanpak reflecteren
  - OCr(p)** verloop van proces nagaan
  - OCr(a)** eigen aandachtspunten vaststellen
  - OCr(g)** aan te raden aanpak per geval vaststellen
  - OCr(r)** eigen repertoire uitbreiden
  - OCr(v)** interessante variant van het probleem vaststellen

