

# Wiskundig discussiëren in het vo: de rol van de docent

Rijkje Dekker, Monique Pijls, Universiteit van Amsterdam (Instituut voor de Lerarenopleiding)

## Inhoud

“Waarom doe je dat?”

“Nou, eh... kubieke, dus je doet keer 1000.”

“Waarom?”

“Je doet een stap naar meter.”

“Weet je het zeker?”

“Ik zal het je uitleggen.”

“Kijk, het is een stap van cm naar dm, en dan nog een van dm naar m.”

“Klinkt goed.”

“... is 504.”

Twee leerlingen die met elkaar in discussie zijn over datgene wat ze opschrijven in de wiskundeles. De een stelt voortdurend vragen, “Waarom doe je dat?” en “Weet je het zeker?” en geeft op die manier de ander de gelegenheid om het werk te tonen, en er uitleg over te geven. Laten zien en uitleggen van je eigen werk zijn twee van de vier kernactiviteiten bij samenwerkend leren waar wij ons op baseren in ons onderzoek. Na jarenlang onderzoek te hebben gedaan waarbij wij lesmateriaal en de bijbehorende manier van begeleiden ontwierpen, hebben we in ons ELWIER-onderzoek de vraag eens bij de docenten gelegd.

## Achtergrond

Naar aanleiding van het onderzoek naar de rol van de docent bij het op gang brengen van wiskundige discussies tussen leerlingen, kwamen we op tegenstrijdige bevindingen. Bij leerlingen in 5 vwo B was de docent die leerlingen uitsluitend begeleidde bij het discussiëren zelf (procesrol) effectiever voor het op gang brengen van wiskundige discussies en niveauverhoging dan de docent die zich alleen wiskundig inhoudelijk met de discussies bemoeide (productrol) (Dekker & Elshout-Mohr, 2004). Bij leerlingen in 4 HAVO A maakte het niet uit en kwamen de wiskundige discussies bij beide docenten minder goed op gang (Pijls, Dekker & Van Hout-Wolters, 2007). In ons onderzoek vervulden de docenten rollen die wij voor hen ontworpen hadden. Met name de procesrol, en dan vooral het niet-geven van wiskundige hulp, was voor de docenten tegennatuurlijk. In ons vervolgonderzoek willen we uitdrukkelijk de docent zelf als deskundige betrekken bij het ontwerpen van onderwijs waarin leerlingen met elkaar wiskundig gaan discussiëren. We hopen zo meer inzicht te krijgen op welke verschillende manieren wiskundige discussies tussen leerlingen op gang gebracht kunnen worden. We gaan uit van de veronderstelling dat het wiskundig discussiëren van leerlingen tot een beter wiskundig begrip en tot niveauverhoging leidt. Die veronderstelling willen we in vervolgonderzoek wederom toetsen.

## Onderzoeksvraag

Hoe kunnen wiskundige discussies tussen leerlingen op gang worden gebracht?

Met wiskundige discussies bedoelen we discussies waarbij de leerlingen elkaar hun wiskundig (denk)werk vertellen of tonen, uitleggen, verantwoorden en hun wiskundig (denk)werk reconstrueren, zoals beschreven in het procesmodel van Dekker & Elshout-Mohr (1998).

## Opzet van het onderzoek

Het onderzoek bestaat uit een aantal case-studies met wisselende docenten, klassen en leerinhouden. Er zal in eerste instantie gewerkt worden met twee leraren in opleiding (LIO's) met een verschillende wiskundige vooropleiding, en hun vakdidacticus van de opleiding die tevens wiskundedocent is. In deze case-studies wordt allereerst beschreven hoe de docenten de wiskundige discussies tussen leerlingen op gang brengen. Het zwaartepunt ligt bij het gedrag van de docent, daarnaast wordt er aandacht besteed aan de andere factoren die van belang zijn, zoals het lesmateriaal en de samenstelling van de groepjes. Bij de observatie van het docentgedrag wordt gelet op de introductie van de les, de manier van hulp bieden aan leerlingen en het invoegen van klassikale momenten. Vervolgens wordt in een nagesprek gereflecteerd op de mate waarin de kernactiviteiten tussen leerlingen zijn opgetreden. Ook worden er plannen gemaakt voor een volgende les. De onderzoeker zal de docent zoveel mogelijk aansporen met eigen ideeën te komen voor het op gang brengen van kernactiviteiten bij leerlingen. Deze cyclus wordt een aantal maal doorlopen. Tussentijds overleggen de onderzoekers met elkaar over de ervaringen in de beide experimenten. De resultaten beschrijven we in 'portretten', waarvan we hieronder een voorbeeld geven.

## Een voorbeeld: de twijfels van Linda

Linda is een ervaren wiskundedocent die openstaat voor didactische vernieuwing van haar onderwijs. Ze weet dat ik (Rijkje) verstand heb van samenwerkend wiskunde leren, dus toen ik haar benaderde om bij haar in de les te kijken in hoeverre zij uit zichzelf vorm geeft aan overleg tussen leerlingen, stemde ze daar onmiddellijk mee in. Ik zou eerst 'gewoon' een les bij haar bekijken en dan zouden we die nabespreken om erachter te komen in hoeverre het overleg tussen leerlingen en in het bijzonder het wiskundig discussiëren bij haar vorm krijgt of vorm kan krijgen.

### Eerste les

We zitten in een ruim, licht lokaal met wiskundeaffiches aan de muren. De tafels zijn groot en log, de 27 leerlingen van deze 5 vwo-klas zitten naast elkaar in rijtjes van 2, 3 of 4. Ze hebben wiskunde B. Linda vertelt hoe ze in het weekend het hek is gaan schilderen, en met een kwast zat die ze aan het eind schoon wilde maken. Maar ze had nog maar weinig terpentijn. "Moet je in het vriesvak leggen!" suggereert een jongen vooraan. Linda lacht om de tip, maar stuurt aan op verdunnen, en ze vraagt de klas of het handiger is om de kleine hoeveelheid terpentijn in één keer te gebruiken of over twee potjes te verdelen. Dit praktische probleem vormt de inleiding op het onderwerp limieten waarbij e als limiet de hoofdrol speelt.

"Maak de opdrachten zelf of met je buurman," zegt Linda. Ik hoor veel uitleg. Linda is ook druk aan het helpen en het valt me op dat zodra ze in de buurt van bepaalde leerlingen komt, die haar vragen gaan stellen. Ik hoor niet dat ze vragen terugspeelt naar andere leerlingen. In dat opzicht spreekt ze leerlingen die samenwerken niet als zodanig aan. Haar uitleg is wel subtiel. Ze probeert door vragen de leerling op gang te brengen.

"Heb je je antwoord wel gecheckt bij je burenlid?" hoor ik Linda zeggen, of ze mijn gedachten geraden heeft! Ze rondt de les af met een klassikale bespreking die ze stevig in eigen hand houdt en waarbij ze aan het eind Euler te voorschijn weet te toveren. Boven het bord hangt een tijdbalk met belangrijke wiskundigen. Ze wijst Euler aan en sluit de les af. Ik vind het een prachtige les, maar heb wel wat te vragen.

### Nabespreking

Ik leg Linda mijn observaties voor. Ze is gevoelig voor de gemiste kansen wat betreft het stimuleren van overleg. Ook de observatie dat leerlingen haar 'gebruiken' zodra ze in de buurt is, raakt haar. We bespreken hoe ze de leerlingen zich zelf meer bewust kan laten worden van wat ze bij overleg te

winnen hebben. Ik geef haar de Gouden regels door die we in een eerder onderzoek ontwikkeld hebben:

Laat elkaar je (denk)werk zien!  
want anders valt er niets te discussiëren

Leg elkaar je werk uit!  
want daar leer je van

Geef elkaar kritiek!  
want daar wordt het werk beter van

## **Tweede les**

Linda heeft zelfgebakken appeltaarten meegenomen, en zegt dat ze deze les het hoofdstuk over exponentiële en logaritmische functies moeten afronden en dat ik er weer ben en speciaal let op hoe ze overleggen. Vervolgens concentreert ze zich op het verdelen van de taarten en gaan de leerlingen aan het werk. Ze gaat dus niet in op de aangereikte Gouden regels, maar het is wel een geraffineerde manier om het overleg op gang te krijgen en mij als bewaker in te schakelen! Het ruikt heerlijk in de klas. Ze is er nu duidelijk niet om hulp te geven. De leerlingen komen op gang en ik hoor hier en daar overleg. Een groepje van drie meisjes voor me is druk aan de slag, en een groepje meisjes achter me praat over van allerlei andere zaken. Linda deelt taart uit.

“Kijk dan naar de voorbeeldjes in het boek,” reageert Linda op een vraag.

“Vraag het aan Martin,” hoor ik haar zeggen. “Het is voor Martin ook niet verkeerd om...”

“Barbara, heb je al iets gedaan?” vraagt Linda.

“Niet veel,” zegt Barbara.

“Je hebt twee leraren naast je zitten,” reageert Linda.

“Heb je de formulekaart bij je? Ga eens met z’n drietjes speuren.”

Linda gaat kijken bij twee jongens achterin die heel druk aan het overleggen zijn. Ze geven aan geen hulp van haar te willen.

Verschillende groepjes zijn druk aan het overleggen. Ik zie ook heel wat leerlingen voor zichzelf werken. Aan het eind vraagt Linda de leerlingen of het overleggen ze is bevallen. Er klinken positieve geluiden en de twee jongens achterin zijn duidelijk opgetogen dat ze er samen helemaal uit zijn gekomen.

Linda zegt me aan het eind van de les: “Ik vond het wel héél moeilijk.”

## **Nabespreking**

“Je zei aan het eind van de les dat je het moeilijk vond.”

“Ja, omdat ik graag uit wil leggen, dan zie je van die ogen van hoe zit dat dan precies. Ze zitten gewoon vast en ze willen van jou weten hoe ze de volgende stap moeten doen en ik wil ze dat gewoon heel graag uitleggen. Ik vind die wiskunde heel leuk en wil kijken hoe ze dan reageren. Ik wil ze wel heel geleidelijk er doorheen helpen. Dat wordt toch steeds geleidelijker en steeds minder voorzeggend, maar ik wil er wel graag even bij zijn om te kijken hoe ze dat proces doorlopen, zeg maar. Ik moest nu dus echt zeggen van vraag het even aan je buurman en dan zo snel mogelijk weglopen, want anders vragen ze het evengoed nog aan mij. Voor mijn gevoel doe ik mijn taak niet goed, zeg maar.”

“Je had het gevoel dat je niet mócht uitleggen.”

“Ik wilde er nu vanaf blijven en dat is dus heel moeilijk. Er zijn leerlingen die zijn gewoon echt heel goed. Tamar is echt heel goed. Toen zei ik, nou misschien kan Rica je daar verder mee helpen. Rica is niet zo sterk en die was nog lang niet zo ver als Tamar, want Tamar werkt wel door. Die legt altijd álles uit aan die andere twee, Iris en Rica. En nou had ze gewoon een keer een vraag aan mij. Maar ik weet dus niet hoe dat afgelopen is. Dat vind ik ook een naar gevoel, dat ik niet weet of ze nou op het eind erdoor is of dat ze het niet weet.”

“Zag je effect van je andere rol?”

“Nou, dat vond ik wel grappig. Ik vond het zelf heel lastig, maar uiteindelijk zag je dus mensen wel degelijk intensiever met elkaar aan de slag en soms hielp dat héél erg goed, gingen ze echt aan elkaar vragen hoe zit dat dan en hebben ze elkaar geholpen. Zoals op het eind, toen ik hun mening vroeg, toen was er een tweetal, twee jongens die hadden echt heel veel aan elkaar gehad, maar die waren ook met hetzelfde sommetje bezig. Dat is misschien wel essentieel. Als de een veel verder is dan de ander, kun je natuurlijk ook wel helpen, maar je bent met je eigen sommetje bezig, moet je uit je eigen sommetje en moet je weer iemand anders gaan helpen, terwijl ik de expertise in huis heb om al die sommetjes tegelijkertijd aan te pakken.”

Later speur ik de bandopname af naar het fragment waar Linda een vraag van Tamar terugspeelde naar Rica. Kijken of haar twijfel terecht is.

## Tamar, Rica en Iris

Tamar: Hoe kan je hier ooit een primitieve van nemen? Dat staat niet echt uitgelegd.

Linda: Helemaal niet?

Tamar: Nee, er staat alleen over eh één gedeeld door x, maar niet echt over iets met een min erbij.

Linda: Waar ben jij?

Rica: ...

Linda: Is wel leuk als Rica eventjes kijkt zometeen waar jij vastloopt. Jij bent hartstikke goed, als Rica dan gaat kijken naar jou zo van eh volgens mij loop je daarop vast. Rica kijkt naar andere dingen dan jij. Waarom is dit sommetje lastiger dan dat sommetje? Misschien dat Rica dat kan zeggen waarom d lastiger is dan c. Zomaar plompverloren staat d er achteraan. Blijkbaar is het iets heel kleins wat jij over het hoofd ziet en misschien Rica wel ziet.

Linda gaat weg.

Iris: Dus nu mag jij het uitleggen, wat aardig.

Gelach.

Rica: Wat is een primitieve?

Tamar kijkt in het antwoordenboekje.

Tamar: Het moet één zesde, het moet dit worden.

Iris: Is één zesde twee keer... dus misschien als je dan... dat snap ik wel, dat het dat is en die, dan heb je die...

Tamar: Dat die een min is, snap ik ook nog wel. Waarom het nou een zesde is...

Rica: Oh, misschien wordt het een half, omdat je daar deelt door drie dat het dan...

Iris: Maar de afgeleide van min twee is... als je hier de afgeleide van doet, dan is dat toch gewoon min twee, en als die min twee dan keer één gedeeld door 3, dat is wel... een zesde en als je die dan heb je twee.

Tamar: Ja, weet je hoe je ook een zesde krijgt? Eén gedeeld door 6.

Iris: Jaaaa, maar hier zit een drie in, als je dat... net als net, toen deed je die honderdste ook niet, maar je zet het er wel bij.

Tamar: Zal ik het er gewoon bijzetten?

Iris: Doe je gewoon net of je het snapt.

... ..

Tamar: Nou, ik snap er geen bal van. Ik kom er bij de volgende al niet meer uit. Wat is de primitieve hiervan?

Iris: Van alleen dat stukkie? De primitieve of de afgeleide?

Tamar: Primitieve, plus één.

Iris: Oh, als je weet wat de primitieve is...

Tamar: (onv.)

Iris: Nee, maar kijk...

Rica is misschien niet echt op gang gekomen, maar Iris wel, en zij ontpopt zich als uitlegster. Wel wennen voor Tamar, maar een hele doorbraak in dit groepje en dat allemaal door een klein, slim terugspeelballetje van Linda!

## Afsluiting

Het bovenstaande voorbeeld laat mooi zien dat een kleine ingreep groot effect kan hebben. Dat hebben we in meer van onze pilot-studies teruggezien. De dialoog aan het begin van dit artikel komt uit een les waarin een wiskundedocent haar leerlingen een toets in groepjes van drie liet maken. Niet zozeer als nieuwe manier van toetsen, maar als setting om leerlingen met elkaar te laten praten over wat ze wel en niet snappen. Het bleek een effectieve manier om leerlingen intensief te laten samenwerken. De meesten van hen hadden zich goed voorbereid, dus er was iets om over te praten. Daarnaast motiveerde het groepscijfer hen om ervoor te zorgen dat het goede antwoord op papier kwam. En, niet onbelangrijk, groepjes accepteerden het als de docent hen niet hielp en het denkwerk voornamelijk bij de leerlingen liet.

## Literatuur

- Dekker, R. & Elshout-Mohr, M. (1998). A process model for interaction and mathematical level raising. *Educational Studies in Mathematics*, 35(3), 303-314.
- Dekker, R. & Elshout-Mohr, M. (1999). Soms moet je ervan afblijven. *Nieuwe Wiskrant*, 18(3), 9-13.
- Dekker, R. & Elshout-Mohr, M. (2004). Teacher interventions aimed at mathematical level raising during collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics*, 56(1), 39-65.
- Pijls, M., Dekker, R. & Van Hout-Wolters, B. (2007). Reconstruction of a collaborative mathematical learning process. *Educational Studies in Mathematics*, 65(3), 309-329.
- Pijls, M. (2007). *Collaborative mathematical investigations with the computer: learning materials and teacher help*. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam, Graduate School of Teaching and Learning.
- Pijls, M., Dekker, R. & Van Hout-Wolters, B. (2007). Teacher help for collaborative mathematical level raising. *Learning Environments Research*, 10, 223-240.