

# Handboek Vakdidactiek Wiskunde

Anne van Streun, Rijksuniversiteit Groningen

## Samenvatting

Binnen de groep van universitaire wiskundededidactici bestaat al enige jaren de behoefte om de bestaande wetenschappelijke kennis over het leren en onderwijzen van wiskunde te ordenen en samen te vatten in een handboek voor leraren en leraren in opleiding. Het boek *Wiskundededidactiek* van Joop van Dormolen (1974) is daarbij vaak als voorbeeld genoemd. Op dit moment is de bedoelde wetenschappelijke kennis her en der verspreid over tal van artikelen en slecht toegankelijk voor leraren. De discussie over de mogelijke inhoud convergeerde uiteindelijk naar een opzet, die tot doel heeft om de wiskundeleraar voldoende gereedschap en kennis mee te geven om adequaat een *ontwerp* voor het eigen onderwijs te maken. Adequaat, gegeven de eigen doelen, de leerlingenpopulatie en het leerstofgebied. Deze keuze voor het ondersteunen van het ontwerpen van het eigen onderwijs, dus baas boven boek, houdt in dat wiskundeleraren (in opleiding) daaraan overzicht, inspiratie en argumentatie kunnen ontleen.

Het *Handboek Vakdidactiek Wiskunde* is een gemeenschappelijke productie van alle universitaire wiskundededidactici en enkele anderen. In eerste instantie is het bestemd voor wiskundeleraren die les geven in HAVO- vwo (onderbouw en bovenbouw), terwijl de meer algemene katernen (over leren en onderwijzen, ICT, toetsing) een breder bereik hebben. Niet iedereen schrijft mee, maar iedereen doet wel mee aan de besprekingen van teksten en aan het becommentariëren van het voorliggende materiaal. Elk katern kent één of twee hoofdauteurs.

## Inhoud

Het Handboek is opgebouwd uit katernen (hoofdstukken, onderwerpen) die vanuit verschillende invalshoeken een leergebied belichten, zodat wiskundeleraren (i.o.) daar het nodige aan kunnen ontleen voor hun professionalisering. De verschillende katernen worden onafhankelijk van elkaar geproduceerd en kunnen los van elkaar worden gebruikt. Op dit moment zijn de volgende katernen in een eerste versie gebruiksklaar en terug te vinden op de website van ELWIER. Het accent ligt voor de meer specifieke leerstofkaternen op de leerlijnen in HAVO- vwo.

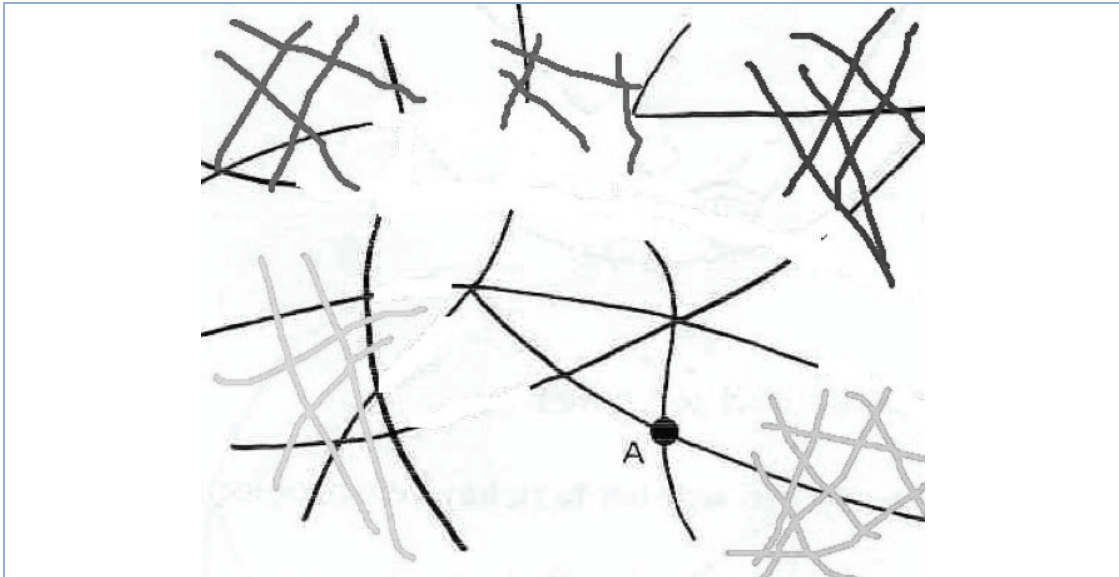
Het zijn: *Leren en Onderwijzen van Wiskunde*, *Vergelijkingen vergelijken*, *Afgeleide in breed perspectief*, *Van knoppen naar kennis*, *Statistiek*, *Modelleren*, terwijl de katernen *Meetkunde*, *Verbanden en Functies*, *Toetsing* in ontwikkeling zijn. In 2008-2009 wordt in de lerarenopleidingen en workshops voor leraren ervaring opgedaan met het gebruik van deze teksten, waarna een revisie plaats vindt op basis van een gerichte evaluatie.

## Leren en Onderwijzen van Wiskunde

Het katern 0: *Leren en onderwijzen van wiskunde* (auteur Anne van Streun) vormt het gemeenschappelijke fundament van de reeks. In de meer toegespitste katernen wordt voor de algemene theoretische onderbouwing terugverwezen naar katern 0, terwijl omgekeerd in katern 0 voor een uitwerking van de theorie op een bepaald deelgebied wordt doorverwezen naar een ander katern. Een centraal thema is de relatie tussen de theorie (in het Handboek samengevat in katern 0) en de consequenties van die theorie voor het praktisch handelen, zoals uitgewerkt in de verschillende katernen. Als voorbeeld nemen we de manier waarop onze kennis in het langetermijngeheugen is opgeslagen en beschikbaar is. In onderzoeken waarin kennis van experts en nieuwelingen wordt vergeleken, blijkt steeds weer dat experts een beter *overzicht* hebben over het geheel van concepten en aanpakken die voor een probleem relevant zijn. Experts in een vakgebied beschikken over een *cognitief schema* met een sterke *samenhang* tussen concepten, onderlinge

relaties, representaties en procedures om deze informatie te gebruiken bij het oplossen van problemen. Ze zijn daardoor sneller in staat problemen in hun vakgebied of daaraan gerelateerde problemen te herkennen en op te lossen.

In het onderwijs komen we vaak een contraproductieve strategie tegen, namelijk het opsplitsen van leerstof in hapklare brokken. Dat heeft wel succes op korte termijn, de eerstvolgende toets, maar leidt tot het opslaan in het langetermijngeheugen van onsamenhangende schema's.



Wat is het alternatief? Uit de verschillende katernen komen in deze bijdrage wat mogelijke antwoorden op die vraag naar voren. Wegens ruimtegebrek laten we de talloze voorbeelden uit de katernen weg en beperken we ons tot in woorden omschreven constatering en conclusies. In elk katern wordt ingegaan op de vraag hoe de verschillende soorten doelen: *Weten dat*, *Weten hoe*, *Weten waarom*, *Weten over weten*, *Houding* kunnen worden bereikt.

## Vergelijkingen vergelijken

De vraag die in dit katern (auteurs Peter Kop en Paul Drijvers) centraal staat, luidt: Wat is een effectieve en efficiënte didactiek voor het leren en onderhouden van algebraïsche vaardigheden? Wat kunnen we, terugkijkend, als antwoorden formuleren? Allereerst is gesteld dat algebra belangrijk is en blijft. De gestelde vraag is dus zeker relevant. Vervolgens is aan de hand van fouten die leerlingen maken een aantal didactische aandachtspunten voor het algebraonderwijs in het algemeen gedestilleerd:

- de dualiteit proces – object
- visuele kenmerken van expressies en explicitering van rekenregels
- basisvaardigheid en symbol sense
- de betekenis van algebraïsche expressies
- het oefenen van vaardigheden
- de ontwikkeling van schema's.

Als docent kan het dus nuttig zijn om bij de voorbereiding van onderwijs in de algebra na te gaan of en op welke manier deze punten van belang zijn. Hoe zie je het proces- en objectkarakter terug, en wat wordt van leerlingen op dit punt verwacht? Welke cues of afleiders springen in het oog bij de expressies of formules die aan de orde komen? Om welke vaardigheden, maar ook om welke inzichten en beelden gaat het? Hoe kunnen de algebraïsche objecten en procedures betekenis hebben voor de leerlingen, wat kunnen leerlingen er zich bij voorstellen? Hoe gaan we de

vaardigheden onderhouden en wat zijn daarvoor geschikte oefeningen? Welke schema's zijn vruchtbaar voor de leerling om te ontwikkelen en hoe bouwen we deze op?

Bij wijze van voorbeeld zijn deze vragen in dit katern uitgewerkt voor het onderwerp vergelijkingen. Aangegeven is op welke manier de vragen kunnen worden beantwoord en tot welk didactisch ontwerp dit kan leiden. Bij het ontwerpen hebben we vooral gebruik gemaakt van het besef dat het ontwikkelen van cognitieve schema's expliciet doel van het onderwijs is. Om deze ontwikkeling te ondersteunen, kan het in samenspraak met leerlingen structuren van het domein zinvol zijn. Het idee is dat een dergelijke structurering leerlingen helpt van hoger standpunt naar vergelijkingen te kijken, zodat sprake is van verticaal mathematiseren: het oplossen van vergelijkingen is op een hoger niveau object van studie geworden. Als het idee van het structureren een statisch beeld van de beoogde mentale schema's oproept, is dat niet terecht. Algebraïsche schema's kenmerken zich ook door wendbaarheid, door het vermogen flexibel te switchen tussen concrete betekenis en abstract manipuleren, tussen globaal en lokaal kijken, tussen proces en object, tussen impliciete en expliciete regels, en tussen verschillende strategieën.

Behalve aan het ontwikkelen van schema's rond het onderwerp vergelijkingen is ook gewezen op het belang van variatie in oefeningen, die aanleiding zijn voor de ontwikkeling van zowel routine in basistechnieken als betekenisvolle beelden en strategieën die deel uitmaken van symbol sense. Het zou niet goed zijn het één ten opzichte van het andere te verwaarlozen. Dat neemt niet weg dat er in de praktijk een didactische spanning bestaat tussen het uitvoeren van algebraïsche bewerkingen 'op de automatische piloot' en het inzichtelijk werken. Freudenthal beschrijft het gevaar van te grote nadruk op automatiseren als volgt:

I have observed, not only with other people but also with myself (...) that sources of insight can be clogged by automatism. One finally masters an activity so perfectly that the question of how and why is not asked any more, cannot be asked any more, and is not even understood any more as a meaningful and relevant question.

Daar staat tegenover dat een gebrek aan routine ervoor zorgt dat eenvoudige bewerkingen het werkgeheugen overmatig belasten, waardoor er te weinig ruimte overblijft om grotere problemen aan te pakken. Te veel nadruk op routine leidt echter tot een 'automatische piloot' die wendbaarheid of zicht op alternatieve methoden in de weg staat; het eigen denken stopt en wordt niet meer gebruikt in nieuwe situaties.

Het is onze overtuiging dat de zes genoemde aandachtspunten niet alleen van belang zijn bij onderwijs in het oplossen van vergelijkingen, maar ook bij andere onderwerpen uit de algebra. Ook dan kan expliciete structurering de mentale schemaontwikkeling ondersteunen. Zo kan bijvoorbeeld bij het ontwikkelen van een schema voor het werken met functies en hun representaties een structuur met overgangen tussen verbale representatie, tabel, grafiek en formule een papieren weerslag zijn waaraan veel aspecten van het mentale schema kunnen worden opgehangen. Ook bij andere onderwerpen uit het algebraïsche curriculum is de balans tussen vaardigheden en inzicht delicaat. De voornaamste conclusie van dit katern is dan ook dat inzicht in de zes genoemde factoren de docent kan helpen bij de ontwikkeling van een effectieve en efficiënte didactiek voor het leren en onderhouden van algebraïsche vaardigheden. Misschien is het nog wel sterker: een didactiek die deze factoren verwaarloost, zal minder effectief en efficiënt zijn.

## De afgeleide in breed perspectief

Centraal in dit katern (auteurs Joke Daemen en Gerrit Roorda) staan de vragen:

1. Wat moet de leerling leren over de afgeleide? Om welke feiten, procedures en concepten gaat het ons in het wiskundeonderwijs over de afgeleide?
2. Wat is er moeilijk aan het onderwerp?
3. Hoe kun je dit onderwerp het beste onderwijzen?

Onze reactie op deze probleemstelling is:

1. Het concept afgeleide is erg breed, met verschillende representaties, met verschillende niveaus, wiskundig en in toepassingen, notaties die erbij horen, algebraïsche vaardigheid in het berekenen van afgeleides en de taal die gebezigd wordt. Al deze facetten zijn in één schema weergegeven. Hoewel het per doelgroep verschilt wat een leerling van dit schema moet leren, gebruiken we dit schema als uitgangspunt. Daarbij vinden wij (de auteurs) het belangrijk dat er altijd vanuit het brede perspectief beredeneerd wordt wat een leerling moet leren, dus niet op basis van een smalle interpretatie van het concept afgeleide. Vooral de stap van niveau 2 naar niveau 3 is van een hoog abstractieniveau. De strengheid van het behandelen van de limietovergang, van het differentiequotiënt naar het differentiaalquotiënt, is afhankelijk van de doelgroep. Voor leerlingen waar de nadruk ligt op het kunnen toepassen van het concept afgeleide, zal er veel nadruk liggen op de grafische benadering. Voor leerlingen uit de exacte profielen zal het uiteindelijk toch gaan om de beheersing van de analytische representatie, maar daarbij moet er toch overzicht blijven over het gehele concept, met de verschillende representaties en niveaus en in verschillende contexten.

2. Leerlingen zien in eerste instantie stukjes van een groot geheel van het concept afgeleide. De meeste studenten zien wel de stukjes, maar niet het geheel. Michelle Zandieh beschrijft dat leerlingen die hetzelfde onderwijs genieten, toch verschillende routes volgen om uiteindelijk tot begrip te komen, waarbij er wel verschil is in het uiteindelijke overzicht over het concept. Maar langzamerhand moet het overzicht over het geheel groeien. Daarbij zijn heel wat hobbels te nemen. Objecten leren hanteren, maar ook de onderliggende processen kennen, overgangen tussen representaties, de relaties tussen de theorie van wiskunde en de toepassingen in andere vakken. Daarnaast moet er aandacht zijn voor de vele verschijningsvormen in woorden en taal die gebezigd worden binnen de diverse toepassingen van aan de afgeleide verbonden concepten.

3. In dit katern vinden we een aantal aanwijzingen voor het onderwijs over de afgeleide. Er bestaat natuurlijk geen eenduidig antwoord op de vraag hoe je differentiaalrekening moet onderwijzen. Wat wel duidelijk wordt, is dat eenzijdige nadruk op bepaalde aspecten van het concept (bijvoorbeeld de rekenregels, of de limietdefinitie) tot gevolg heeft dat het overzicht over het gehele concept verloren kan gaan.

## Modelleren

In de probleemstelling hebben we (auteurs van dit katern: Jeroen Spandaw en Bert Zwaneveld) de volgende drie vragen geformuleerd:

1. Waarom moet modelleren door de leerlingen geleerd worden?
2. Wat is er moeilijk aan modelleren?
3. Welke kennis, vaardigheden en attitudes van leerlingen en docenten zijn noodzakelijk om modelleeronderwijs in te richten?

Op basis van het voorafgaande komen we tot de volgende antwoorden.

1. Modelleren moet leiden tot enerzijds een beter inzicht in de (on)mogelijkheden van wiskunde, hetgeen de opvattingen van leerlingen over wiskunde alleen maar ten goede kan komen, en anderzijds tot beter verankerde wiskundige kennis die flexibeler ingezet kan worden.
2. Docenten en leerlingen zijn niet gewend zelf wiskundige beschrijvingen bij probleemsituaties te maken. Als je aan modelleren begint, moet je je ervan bewust zijn dat dit een zeer complexe zaak is waarin niet-wiskundige aspecten een essentiële rol spelen. Ondanks de in dit katern genoemde praktijktips, zullen toetsing en begeleiding van open modelleeropdrachten door de docent lastig en tijdrovend blijven.
3. Opvattingen over de relatie tussen wiskunde en de werkelijkheid moeten eventueel worden bijgesteld. Leerlingen en docenten kunnen echter houvast ontnemen aan de besproken modelleercyclus. Om de modelleercyclus voor de leerlingen hanteerbaar te maken, zal de docent zelf over voldoende modelleerervaring moeten beschikken. Dat betekent dat hij of zij zelf een goed inzicht in de (on)mogelijkheden van het modelleren moet hebben.

Bij het ontwerpen van modelleeronderwijs zal hij naast de kortetermijndoelen (de modelleercyclus en het hanteren daarvan bij het aanpakken van problemen) ook de lange termijn niet uit het oog mogen verliezen. We denken hierbij in het bijzonder aan het begrip van de doelen en beperkingen van modelleren en de rol van wiskunde hierbij.

Om deze doelen te bereiken, is het noodzakelijk om leerlingen gedurende hun gehele schoolloopbaan met enige regelmaat modelleerproblemen voor te leggen en zo alle stappen van de modelleercyclus de revue te laten passeren. De docent moet hierbij geschikte problemen kiezen, de verschillende activiteiten van de modelleercyclus aan de orde stellen, de benodigde domeinkennis verschaffen, de leerlingen het proces laten monitoren, de inzet van ict en de toetsing goed plannen en voor de leerlingen expliciteren.

## Van knoppen naar kennis

Net als katern 0 heeft dit katern over ict en wiskunde (auteurs Paul Drijvers en Bert Zwaneveld) sterke verbindingen met andere katernen. De vraag die in dit katern centraal staat, luidt:

*Wat kan ict-gebruik toevoegen aan het wiskundeonderwijs en hoe kan de docent dit potentieel benutten?*

De conclusies ten aanzien van het *Wat* zijn dat ict een aantal relevante wiskundige functionaliteiten biedt, die kunnen worden ingezet als gereedschap, voor oefening en voor begripsvorming. Bij dat laatste kunnen belangrijke troeven zoals visualisatie, exploratie en dynamiek worden uitgespeeld. Onderzoeksresultaten met betrekking tot het gebruik van ict in de wiskundeles suggereren dat het 'use to learn' en het 'learn to use' in praktijk moeilijk te scheiden zijn, omdat de ontwikkeling van de technieken voor het gebruik van ict bij wiskunde veelal gelijk op gaat met die van de mentale schema's die leerlingen daarbij nodig hebben. Mits aan de transfer voldoende aandacht wordt besteed, zullen ook pen-en-papier vaardigheden hierdoor toenemen.

De belangrijkste conclusie ten aanzien van het *hoe* is dat de inzet van ict een goede didactische doordenking vooraf vraagt en een zorgvuldige begeleiding in de les. De docent moet zich de doelen en kansen van het ict-gebruik goed bewust zijn, want elk ict-middel heeft eigen mogelijkheden en beperkingen:

*Tools matter: they stand between the user and the phenomenon to be modelled, and shape activity structures.*

Via individuele en klassikale interacties kan de docent de rol van ict in het leren orkestreren.

Afwisseling van werkvormen en van ict met bord of pen-en-papier wordt aangeraden. Notaties en technieken kunnen worden vergeleken. De kracht en de zwakte van ict kan onderwerp van reflectie zijn. Op dergelijke didactisch verantwoorde manier kan de inpassing van ict een motiverende en eigentijdse bijdragen leveren aan het leren van de leerlingen.

In de andere katernen wordt op dit katern aangehaakt. Zo staat in het katern over differentiëren bijvoorbeeld de volgende opdracht:

In het ict-katern *Van knoppen naar kennis* wordt een onderscheid gemaakt in een drietal didactische functies van ict in het wiskundeonderwijs: die van uitvoerder, die van oefenomgeving, en die van leermiddel bij begripsontwikkeling.

Op het internet (bijv. de site van de digitale school) staan diverse mogelijkheden voor het gebruik van ict ter ondersteuning van het leren van de afgeleide. Ga na bij elk van deze toepassingen wat de didactische functie van de ict-toepassing kan zijn en hoe je deze dan uitwerkt op klassenniveau.

## Statistiek: Rekenen aan en redeneren met data

Om een indruk te geven van de indeling van alle katernen volgt hier de inhoudsopgave van het katern Statistiek (auteurs Lidy Wesker en Anne van Streun).

- 1 Oriëntatie
  - 1.1 Statistiek in dit katern
  - 1.2 Statistiek, een vak apart
  - 1.3 Statistiekonderwijs
2. Probleemstelling
3. Probleemverkenning
  - 3.1 Misvattingen en misleidende conclusies
  - 3.2 Beschrijvende statistiek
  - 3.3 Datasets gebruiken
  - 3.4 Mathematische statistiek
4. Wat we al weten over statistiekonderwijs
  - 4.1 Beschrijvende statistiek
  - 4.2 Mathematische statistiek
  - 4.3 Uitvoeren 'statistisch' onderzoek
5. Ontwerpen

De Oriëntatie en Probleemverkenning zijn veelal breed opgezet om het gehele gebied kort te schetsen aan de hand van voorbeelden. Daarna concentreert de tekst van het katern zich op een deelgebied om aan de hand daarvan de bredere problematiek te illustreren. Het uiteindelijke doel is dat de leraar (in opleiding) voldoende aanknopingspunten en argumenten heeft ontmoet om het eigen onderwijs op kwalitatief goed niveau te ontwerpen.

## Meetkunde: Vanouds tot de dag van vandaag

Een meetkundekatern (auteurs Nellie Verhoef en Anne van Streun; katern nog in ontwikkeling) kan natuurlijk niet zonder een historisch overzicht met de discussie over de plaats van meetkundeonderwijs:

1. De oorsprong van de Euclidische meetkunde.
2. De discussies in de 19<sup>e</sup> en 20<sup>e</sup> eeuw over het meetkundeonderwijs.
3. 'Weg met Euclides. De New Math.'
4. De meetkunde in de tweede fase HAVO- vwo.

Didactisch staat de ontwikkeling van meetkundige concepten centraal. Van Hiele legt de nadruk op niveaus in het redeneren en argumenten over meetkundige objecten. Karakteristiek voor de geleidelijke ontwikkeling (abstractieverhoging) is het afleiden van steeds weer nieuwe relaties en verbanden, het uitbreiden van het relatienet. Freudenthal benadrukt de kracht van slechts één paradigmatisch voorbeeld. Enerzijds is er sprake van een geleidelijk ontwikkelingsproces uitgaande van een rijke schakering aan contexten en oplossingsstrategieën, anderzijds zijn er ook situaties denkbaar waarbij de abstracties als vertrekpunt worden gekozen waarna aan de hand van paradigmatische, exemplarisch en gestileerd, voorbeelden het abstractieproces op gang komt. Freudenthal duidt dit verschil aan met de begrippen *comprehension (samenvoegen)* en *apprehension (oppakken)*.

Een ander belangrijk didactisch aspect is het leren oplossen van meetkundige problemen:

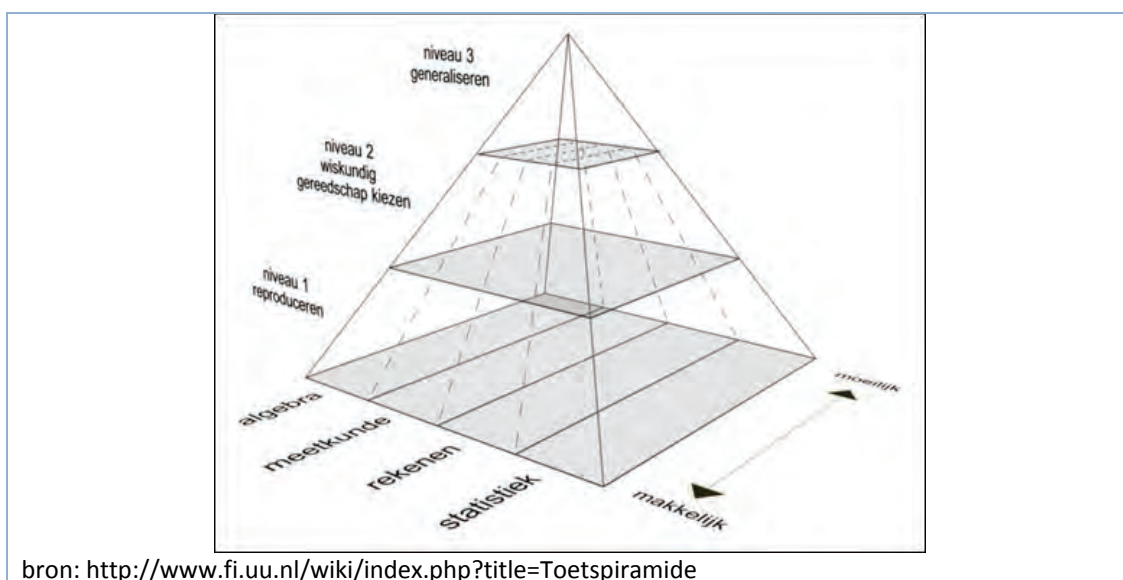
- Het exploreren van meetkundige relaties met behulp van software
- Bewijzen als denkmethode
- Een passende didactiek
- Verschillende bewijsmethoden.

In een speciale bijlage krijgt de lezer de gelegenheid om de eigen meetkundige kennis en vaardigheden te testen en op een goed beheersingsniveau te brengen.

## Toetsing

De bedoeling van dit katern (auteur Truus Dekker; katern nog in ontwikkeling) is om de aspecten van toetsing die in de andere katernen zijdelings aan de orde komen in een breed kader te plaatsen, zodat leraren (in opleiding) een goed gefundeerd kader in handen krijgen om toetsen te beoordelen en zelf toetsen te maken.

Een bespreking van verschillende vormen van toetsen, passend bij *Weten dat*, *Weten hoe*, *Weten waarom*, is op zijn plaats, evenals een schets van de grote internationale onderzoeken als TIMSS en PISA. Een nadere uitwerking van de bekende toetspiramide staat centraal.



## Verbanden en functies

De totale leerlijn wordt in dit katern (auteurs Peter Kop en Willem Hoekstra) geanalyseerd vanaf de verbanden tussen twee grootheden in de onderbouw via het gebruik van formules en functies bij andere vakken tot de geavanceerde wiskundige functies in de bovenbouw HAVO-VWO. Speciale aandacht is er voor de (onderliggende) leerproblemen zoals

- Procept
- Variabelen
- Notaties o.a. '='-teken
- Representaties koppelen
- Conventies
- Symbolische representatie, symbol sense
- Functies van meerdere variabelen en de representaties.

## Reflectie

De voortgaande professionalisering van eerstegraads leraren, waar dit project een bijdrage aan wil leveren, heeft als eerste opbrengst de voortgaande professionalisering van de betrokkenen, de universitaire wiskundendidactici. Anders dan bij het maken van een gewone bundel waarin iedere auteur het eigen ei legt, ging en gaat het hier om inhouden waar alle deelnemers mee aan de slag willen. Het streven naar consensus heeft geleid tot stevige discussies op hoog niveau, die door alle betrokkenen als waardevol en verrijkend zijn ervaren.

Dankzij ELWIER is de productie van de katernen in een versnelling gekomen, omdat de auteurs nu wat extra tijd tot hun beschikking kregen om te studeren en te schrijven. Zonder deze katalysator was

het gehele project waarschijnlijk niet eens van de grond gekomen. In 2008-2009 wordt ervaring met de voltooide katernen opgedaan en wordt op basis van de evaluaties de 'eindtekst' vastgesteld. Inmiddels is er belangstelling voor de inhoud van de katernen in een bredere kring. Niet alleen op verschillende deeltijd lerarenopleidingen voor de eerstegraads bevoegdheid gaat er met sommige katernen worden gewerkt, maar ook in het curriculum van tweedegraads lerarenopleidingen worden delen van katernen ingezet. Nu de basisteksten er liggen, is het goed voorstelbaar dat hiervan afgeleide versies komen voor andere doelgroepen.

Het gehele gebied van het wiskundeonderwijs overziend, is het voor mij duidelijk dat er een aantal katernen zou moeten komen over de didactische implicaties van het onderwijs in de wiskunde, als dat is ingebed in competentiegericht leren, bredere leergebieden en dergelijke. De relatie tussen het ontwikkelen en beheersen van wiskundige concepten/methoden en het benutten van die concepten/methoden in praktijksituaties is problematisch en vraagt nieuwe didactische strategieën. Een mooi project voor het vervolg van ELWIER, als dat er komt.

## Literatuur

Van Dormolen, J. (1974). *Didactiek van de wiskunde*. Utrecht: Oosthoek's Uitgeversmaatschappij.