

Proefschrift Kees Buijs

Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen

Bespreking door:

Jacob Perrenet

Eindhoven School of Education

Technische Universiteit Eindhoven

Op 19 mei 2008 promoveerde Kees Buijs aan de Universiteit Utrecht op een onderzoek naar het onderwijzen van het vermenigvuldigen van getallen met twee cijfers of meer. Promotor was Koeno Gravemeijer, copromotor Meindert Beishuizen.

De aanleiding voor het onderzoek ligt in het feit, dat de ontwikkelde leertrajecten op de basisschool – de promovendus spreekt hier onder meer als leerboekauteur – binnen de huidige methoden als minder geslaagd mogen worden beschouwd, en bovendien in de bevindingen van het PPOON-onderzoek van het CITO, dat de resultaten bij het meercijferig vermenigvuldigen achteruit gaan. De hoofdvragen voor het onderzoek zijn de volgende:

1. Hoe kan een onderwijsleertraject rond het vermenigvuldigen van meercijferige getallen worden vormgegeven dat aansluit bij de eigen, informele strategieën van leerlingen op dit gebied en waarin deze strategieën gaandeweg worden uitgebouwd tot efficiënte, notatie-ondersteunde hoofdreenstrategieën in de sfeer van het gestileerd hoofdreenen?
2. Hoe ontwikkelt zich binnen zo'n leergang het aanpakgedrag en het notatiegedrag van de leerlingen? En in hoeverre biedt deze leergang ook zwakkere leerlingen voldoende houvast om tot de met het onderwijs beoogde efficiënte strategieën te komen?
3. Wat zijn de voornaamste elementen van een lokale onderwijstheorie die de grondslag van zo'n leergang vormt?

Gestileerd hoofdreenen moet men daarbij zien als het op systematische wijze komen tot een correcte uitkomst van een vermenigvuldiging met gebruik van een kladblaadje zonder dat het standaardalgoritme van vermenigvuldiging beheerst wordt. Buijs – en hij is niet de enige – vindt het voldoende dat de leerling het eerste getal splitst in tientallen en eenheden, de tussenresultaten noteert en optelt, de zogenaamde S1-strategie. Het berekenen van de prijs van 24 repen chocola van 68 cent per stuk gaat dan via 10×68 , nog eens 10×68 en 4×68 . Een gebruikelijke notatie daarbij is dat de tien en de vier omcirkeld worden. Mede gezien de rol van de rekenmachine in het vervolgonderwijs hoeft niet iedereen meer het standaardalgoritme te kennen.

Een lokale onderwijstheorie is in dit geval een uitwerking van de theorie van het realistisch reken-wiskundeonderwijs (RME volgens de Engelstalige afkorting) op het deeldo-

mein vermenigvuldigen, want het onderzoek van Buijs valt binnen deze traditie en de bijbehorende methode van ontwikkelingsonderzoek. Buijs schetst die onderwijs traditie en geeft als kenmerken onder meer het gebruik van betekenisvolle contexten als uitgangspunt voor wiskundige activiteiten, het gebruik van modellen als middel voor niveauverhoging en de interactiviteit van het onderwijs, waarbij eigen bijdragen van de leerlingen belangrijk zijn. Dat laatste aspect past in de socio-constructivistische benadering.

Buijs laat gedetailleerd zien wat er bij het leren vermenigvuldigen schort aan de opbouw binnen de huidige methoden: de overgang van de laag-niveaustrategie van herhaald optellen naar het gebruik van de zogenaamde nulregel ($10 \times$ een getal krijg je door er een nul achter te zetten) is gekunsteld. Buijs bespreekt vervolgens internationaal onderzoek waarbij allerlei strategieën van leerlingen zichtbaar werden en de wijze van ontwikkeling naar hogere niveaus, en ook nationaal onderzoek waaruit onder meer bleek dat relatief veel leerlingen vergeefs proberen geheel uit het hoofd te werken of de verkeerde strategie van splitsen gebruiken, waarbij 24×68 uitgerekend wordt als $20 \times 60 + 4 \times 8$ (de VS-strategie).

Buijs legt uit hoe ontwikkelingsonderzoek plaatsvindt: in drie fases van preparatie, experimentatie en retrospectie, en met als basiskennmerken de rol van gedachte-experimenten, het cyclisch karakter van het ontwerpproces, het systematisch en gedetailleerd documenteren van het ontwerpproces en theorieontwikkeling als uitkomst van het onderzoek en zodanige rapportage dat (virtuele) replicatie mogelijk is. De methode is overigens nog niet uitgekristalliseerd. In zijn eigen onderzoek reflecteert Buijs eerst op eigen ontwerpervaringen, wat resulteert in een schets voor een experimenteel leertraject. Hierop geïnspireerd krijgen enkele leerlingen een aantal vermenigvuldigingsopgaven voorgelegd. Op basis van hun reacties wordt de eigenlijke leergang ontwikkeld, die bestaat uit 15 lesactiviteiten, werkbladen, een docentenhandleiding en parallelle criteriumtoetsen voor afname aan het begin, halverwege en op het eind. De leergang wordt gekenmerkt door het starten met verhoudingssituaties (hoeveel kosten 18 schapen van 350 euro samen?) en groepssituaties (hoeveel blikken totaal in 26 dozen met 65 blikken?). Deze opgaven worden visueel gepresenteerd en nodigen uit tot informele strategieën met gebruik van kladpapier. Eerst zijn alle objecten te zien, later bedekt (bijvoorbeeld alleen de vrachtwagen die de blikken vervoert). Hieruit moet de S1-strategie als centrale strategie ontstaan. Er wordt gewerkt aan verkorting van notaties en inzicht in de nulregel en de distributieve regel, bijvoorbeeld $26 \times 65 = (20 + 6) \times 65 = 20 \times 65 + 6 \times 65$. Het laatste inzicht moet ook de VS-strategie tegen gaan.

De experimentele leergang wordt uitgevoerd binnen een vijftal scholen van verschillend niveau met 112 proefpersonen gedurende de eerste maanden van groep 7 (incidenteel wordt een les door de onderzoeker zelf gegeven). Voor en tijdens het traject vinden nog gedachte-experimenten plaats die tot ontwikkeling/bijstelling van de leergang leiden. Het onderwijsproces wordt nauwkeurig gevolgd met behulp van de criteriumtoetsen, interviews met leerlingen vlak na die toetsen, lesobservaties, schriftelijke producten van leer-

lingen en gesprekken met leerkrachten. Vooraf worden de volgende verwachtingen over niveauverhoging uitgesproken:

1. Het groeperend rekenen wordt een elementaire basisstrategie
2. De nulregel wordt doordacht ingezet
3. Het aanvankelijk individueel notatiegedrag zal picturaal-schematisch zijn en op den duur meer overzichtelijk en begrijpelijk worden en zich door communicatie uniformeren
4. Het later notatiegedrag zal meer symbolisch zijn
5. Er ontstaat inzicht in het distributief redeneren; de VS-strategie verdwijnt
6. Er zal standaardisering van strategiegebruik ontstaan: vooral de S1-strategie.

De dataverzameling leidt tot een aantal zogeheten cruciale leermomenten (zaken die binnen een school opvallen en relevant lijken, worden nader geanalyseerd in breder verband). Dit zijn:

- De introductie van het groeperend rekenen: Vrij veel leerlingen proberen de opgaven formeel aan te pakken en stranden dan. Het kost moeite hen van de mogelijkheden van meer elementaire strategieën bewust te maken.
- Het overzicht leren houden: Vrij veel leerlingen verliezen in het begin het overzicht en vergeten dan stappen. Gebruik van de tekeningen blijkt te helpen.
- De basale rekendraadigheid als voorwaardelijke kennis: Het vereiste niveau van elementaire rekendraadigheden blijkt voldoende.
- Het leren werken met groepjes van 10; de nulregel: De nulregel wordt door heel wat leerlingen niet meteen begrepen en vraagt extra aandacht om tot de S1-strategie te komen.
- De ontwikkeling van adequate hulponotaties; het pictureel-schematisch aspect: Intensieve sessies met veel interactie beïnvloeden de ontwikkeling van ondersteunende notaties in positieve zin.
- Het inzichtelijk distributief redeneren: De VS-strategie blijkt hardnekkig en komt nog halverwege het traject voor. De distributieve eigenschap is ingewikkelder voor veel leerlingen dan verwacht.
- De ontwikkeling van adequate hulponotaties; voortgaande schematisering: homogenisering van ondersteunende notaties treedt inderdaad op. Individuele varianten van de S1-strategie blijven echter bestaan.

Na deze kwalitatieve analyse van het proces in de klas volgt een meer kwantitatieve analyse van de toetsresultaten. Uit het werk van de leerlingen komen maar liefst twaalf strategieën tevoorschijn. Belangrijkste resultaten zijn dat gedurende het traject het percentage goede oplossingen aanzienlijk toeneemt (van 47% naar 84%), dat de incorrecte VS-strategie verdwijnt (van 19% naar 0%) en dat de nagestreefde S1-strategie toeneemt (van 29% naar 69%). Tussen scholen en tussen meisjes en jongens zijn er weinig verschillen. Zowel het kwart zwakste leerlingen als het kwart sterkste leerlingen gaat vooruit.

Opnieuw kwantitatief wordt het notatiegedrag geanalyseerd. Overzichtelijkheid en compactheid worden door twee beoordelaars qua niveau gescoord op een driepuntschaal. De scoring blijkt betrouwbaar en op beide aspecten blijkt er over de scholen heen een significante toename te zijn gedurende het leertraject. Tussen de scholen zijn er wel verschillen, met soms een niveaupercentage halverwege het traject. De toename treedt op bij zowel jongens als meisjes en bij het bovenste en onderste kwart.

Een algemene constatering is nog dat interactieve processen bij dit onderwijs goed mogelijk zijn, ook in heterogene groepen (qua niveau), wanneer vooral zwakke leerlingen over hun oplossingswijzen aan het woord worden gelaten. Discussie over door leerlingen gebruikte en op bord of posters weergegeven notaties is belangrijk.

Terugblikkend op de zes hiervoor weergegeven verwachtingen omtrent niveaupercentage constateert Buijs dat de derde, vierde en zesde uitkomen, maar de eerste, tweede en vijfde deels niet. Dit leidt tot een voorstel voor een leergang die daarmee rekening houdt. Deze leergang en de bijbehorende onderwijstheorie komen in grote lijnen nog wel overeen met de experimentele situatie. De volgende vier bevindingen van het onderzoek zijn voor Buijs de belangrijkste:

1. Voor voortschrijdend inzicht van de leerlingen in de distributieve eigenschap is het nodig in het leerproces daar herhaaldelijk aandacht aan te besteden.
2. De S1-strategie functioneert goed als elementaire basisstrategie en volgt op natuurlijke wijze uit informele strategieën die leerlingen hanteren.
3. Het gebruik van de nulregel moet in het onderwijs, ook bij grotere getallen, herhaaldelijk aan de orde worden gesteld, mede als basis voor inzicht in het positiestelsel.
4. Progressieve schematisering van leerlingnotaties in de zin van de ontwikkeling van kringen om getekende groepjes naar kringen om getallen, met behoud van enige individuele variatie en discussie daarover, levert houvast en leidt tot verkorting en niveaupercentage.

Buijs sluit af met enkele discussiepunten: de plaats van het meercijferig vermenigvuldigen in het curriculum van de toekomst, de haalbaarheid van het realistisch reken-wiskunde-onderwijs vanwege de hoge eisen aan de leerkracht, de voor- en nadelen van het gehanteerde groepjesmodel voor vermenigvuldigen tegenover het zogeheten rechthoekmodel en de kwaliteit van de gehanteerde methode van ontwikkelingsonderzoek.

Ik vind dit een mooi proefschrift: het is goed geschreven, het geeft een boeiend beeld van enerzijds realistisch reken-wiskunde-onderwijs en anderzijds van ontwikkelingsonderzoek, beide toegespitst op het domein van het vermenigvuldigen van meercijferige getallen. Het onderwerp is actueel en er worden dingen gevonden die de praktijk daadwerkelijk kunnen versterken. Methodologisch sterk vind ik ook de combinatie van kwalitatieve en kwantitatieve methoden. Als bespreker moet je echter ook kritiek leveren en daarom heb ik dus de volgende opmerkingen bij het proefschrift.

De theoretische basis is het realistisch reken-wiskundeonderwijs en het gerelateerd constructivisme. Een dominant deel van de referenties verwijst ook naar de 'Utrechtse' school. Persoonlijk vind ik de theoretische beschouwing wat naar binnen gekeerd. Ik had het mooi gevonden als ook enkele andere perspectieven aan bod waren gekomen. Bijvoorbeeld Cognitive Load Theory (Van Merriënboer & Sweller, 2005), op grond waarvan vast ook aanbevelingen over het leren vermenigvuldigen kunnen worden gedaan, die met de adviezen vanuit de realistische benadering vergeleken zouden kunnen worden. Of de resultaten van Application Research, onderzoek naar het functioneren van basisvaardigheden in meer complexe vaardigheden (Lin & Kubina, 2005). Dit naar binnen gekeerde blijkt ook uit het feit dat wel genoemd wordt dat het reken-wiskundeonderwijs in discussie is en dat er een stroming is, die alle cijferalgoritmen graag direct onderwezen zou willen zien, maar dat er geen aandacht wordt besteed aan de argumenten van die stroming. Ik had het mooier gevonden, wanneer alle perspectieven grondig behandeld waren.

Elke experimentele leergangontwikkelaar heeft te maken met leerkrachten die de leergang volgens de bedoelingen moeten implementeren. Dat lukt niet altijd. Buijs geeft aan, dat de bedoelde inscholings- en begeleidingsactiviteiten uiteindelijk wat geringer waren dan bedoeld (het zou te veel tijd kosten) en dat de leerkrachten niet altijd volgens de bedoelingen te werk gingen. Misschien hadden de docenten al in de voorbereidende fase betrokken moeten worden met een grotere kans op getrouwe implementatie (maar dat zou hen natuurlijk ook de nodige tijd kosten). Zie ook Taconis (2006) voor een bespreking van dit probleem.

Er is een beoordelingsinstrument ontwikkeld om het niveau van het notatiegedrag te meten (compactheid en overzichtelijkheid). Goed dat de betrouwbaarheid van beoordelingsinstrument is onderzocht: de copromotor scoorde ook al het werk van de leerlingen. Dit leverde een hoge overeenkomst. Enerzijds lijkt me dat scoring van een steekproef door een tweede beoordelaar wel afdoende is; anderzijds wordt in een dergelijk geval meestal als maat Cohens Kappa gebruikt, waarbij rekening wordt gehouden met de kans dat scoringen toevallig overeenkomen, afhankelijk van het aantal scoringscategorieën (wanneer we die maat uitrekenen, blijkt de overeenkomst gelukkig ook ruim voldoende).

Bij het aangeven van het niveau van het aanpakgedrag (de gekozen strategie) en van het notatiegedrag kan ik de redenering achter de indelingsmethode op een vergelijkbaar aspect niet goed volgen. Bij aanpakgedrag gaat het om abstractieniveau. Buijs geeft aan dat dan 'cijferen' in principe bij het hoogste niveau zou moeten worden ingedeeld, maar hij doet dit niet, omdat leerlingen – vooral in het begin – ook quasi-cijfergedrag vertonen dat niet tot juiste oplossingen leidt. Hij kiest dan voor de categorisering 'anders'. Bij het notatiegedrag gaat het bij het niveau om overzichtelijkheid en compactheid. Het komt nu voor dat een leerling bij een uitwerking wel compact en overzichtelijk werkt, maar volgens een verkeerde methode. In een dergelijke situatie neemt Buijs de betreffende opgave niet mee in de beoordeling. In beide gevallen probeert Buijs mijns inziens ten onrechte de

dimensie goed-fout onder te brengen bij die van het niveau. Alsof hoog abstract of compact en overzichtelijk niet met fout kunnen samengaan.

Bij ontwikkelingsonderzoek wordt meestal niet met een controlegroep gewerkt; de resultaten van een experimenteel leertraject worden meestal niet vergeleken met die van een standaardtraject om te laten zien dat iets beter kan. Men construeert iets moois dat voor zich moet spreken, na herhaalde gedachte-experimenten, gedetailleerde procesbeschrijving, bijstelling en theoretische reflectie. Echter, bij het besproken onderzoek was er wel een vergelijking mogelijk. De lage PPOON-scores op vermenigvuldigen vormden een reden voor het onderzoek; er werden zelfs vergelijkbare opgaven in de criteriumtoets opgenomen. Ik vind het wat vreemd dat de lezer zelf moet uitzoeken hoe deze vergelijking gemaakt kan worden, terwijl het resultaat dat de goedscores bij de experimentele leergang beduidend hoger zijn, toch – met de nodige kanttekeningen – een mooi resultaat is.

Sterk vond ik dat Buijs voorafgaand aan de uitvoering van de experimentele leergang toetsbare verwachtingen uitspreekt over wat er hopelijk in het leerproces zal gebeuren. Een deel van die verwachtingen komt niet uit en leidt tot (voorgestelde) bijstelling. Ik vroeg me daarbij af welk deel van de uitgesproken verwachtingen in ontwikkelingsonderzoek eigenlijk moet uitkomen om door te gaan ofwel welk deel van de verwachtingen niet moet uitkomen, opdat men op zijn schreden terugkeert. Mijn indruk was er een van een bijna onwankelbaar geloof in de gekozen richting: de kracht en de zwakte van het eerder genoemde naar binnen gekeerde.

Maar nogmaals, ondanks deze kritische opmerkingen kan ik het lezen van dit boek aan eenieder die begaan is met het reken-wiskundeonderwijs – van BON'er tot RME'er – van harte aanbevelen.

Bij wijze van uitsmijter kan ik het niet nalaten even in te gaan op nummer acht van de bij het proefschrift gevoegde stellingen, die luidt: 'Voor een weidevogel of huiskat van gemiddelde intelligentie is het betrekkelijk eenvoudig om op contextgebonden niveau het tellen van hoeveelheden tot vijf of zes onder de knie te krijgen.' Ik stel mij amateurbioloog Buijs voor die stiekem een jong dier (of ei) uit het nest haalt bij afwezigheid van de moeder en constateert dat het dier daar bij terugkomst niet blij mee is. Maar of we hieruit kunnen afleiden dat het beest binnen deze context het verschil tussen vijf en zes kent, is nog maar de vraag. Een alternatieve verklaring luidt, dat de moeder de jongen (respectievelijk eieren) al als aparte wezens (objecten) kent en zich met schrik realiseert: Vlekje is weg!

Literatuur

- Buijs, K. (2008). *Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen*. Proefschrift Universiteit Utrecht.
- Lin, F. & Kubina, R. M. (2005). A Preliminary Investigation of the Relationship Between Fluency and Application for Multiplication. *Journal of Behavioral Education*, 14(2), 73-87.

-
- Merriënboer, J.J.G. van & Sweller, J. (2005). Cognitive Load Theory and Complex Learning: Recent Developments and Future Directions. *Educational Psychology Review*, 17(2), 147-177.
- Taconis, R. (2006). Bespreking proefschrift A. Westra: A new approach to teaching and learning mechanics. *Tijdschrift voor de Didactiek der β -wetenschappen*, 23(1&2), 60-64.

