Koeno Gravemeijer en
Jo Nelissen

Hoezo concreet?

Op zoek naar concretiseringen die het kinderlijke denken ondersteunen

Concrete materialen kunnen het wiskundig denken ondersteunen. De grote vraag daarbij is wel of de concretiseringen werkelijk aansluiten bij redeneringen en ontdekkingen van kinderen of dat het materialen zijn die het volwassen denken concreet maken. In het laatste geval schieten de mooie spullen hun doel voorbij.

Inleiding

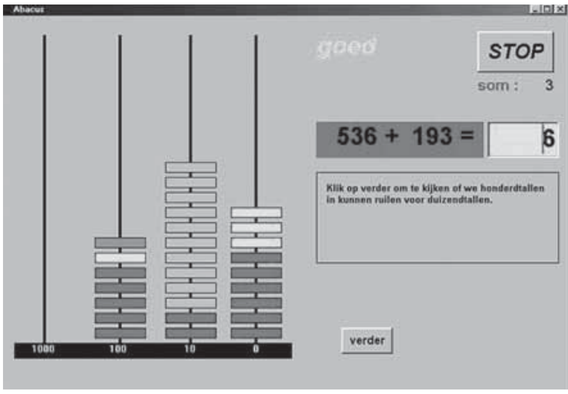
De behoefte om de leerlingen door middel van *concretiseringen* meer begrip bij te brengen van wat ze in de rekenles leren, is al erg oud. Bestond het rekenonderwijs in de Middeleeuwen voornamelijk uit het laten memoriseren van de tafels en nuttige regels, vanaf ongeveer de zestiende eeuw poogde men de leerlingen in didactische zin wat meer tegemoet te komen. Dat gebeurde door middel van bijvoorbeeld 'exempelen ende lustige vragen' en door het laten oplossen van praktische vraagstukken zoals het laten berekenen van het aantal stenen dat nodig was om 'eenen kelder te pavayen' (Kool, 1999). Moeilijke onderwerpen, zoals breuken, werden vaak van uitleggende teksten, voorbeelden of illustraties voorzien. Dit is een vorm van 'concreet maken'. Later kwam het gebruik van concreet materiaal en concrete modellen meer in zwang.
Deze concretiseringen zouden ervoor moeten zorgen dat de leerlingen zouden gaan begrijpen wat de meester onderwees en voorkomen dat het leren uitsluitend zou bestaan uit mechanisch geheugenwerk.

Concreet denken

Rekenen-wiskunde was (en is) voor een deel van de leerlingen geen gemakkelijk vak hoe zeer de methodenschrijvers ook hun best deden en nog doen. Tot in de 20e eeuw bestonden de rekenboekjes uit regels, formules en voorschriften die van buiten geleerd en nagevolgd moesten worden. Van het rigide en mechanistische karakter van dit didactisch format was men zich echter wel bewust, zoals blijkt uit de pogingen de formele en abstracte leerstof aan de hand van concretiseringen (blokjes, schema's, breukendozen, tekeningen, enzovoort) te verduidelijken. Het idee hierachter was eenvoudig: rekenen-wiskunde is een abstract vak. Kinderen tot 12 jaar, zo dacht men, kunnen niet abstract denken. Dit uitgangspunt danken we aan de invloedrijke psycholoog Piaget.[1] Als dat zo is, kunnen kinderen dus geen rekenen-wiskunde leren. Deze paradox meende men te kunnen oplossen door de wiskunde te concretiseren, want concreet en praktisch denken kunnen kinderen wél. Als je kinderen niet bij de wiskunde kunt krijgen, moet je de wiskunde maar bij de kinderen brengen, zo leek de redenering te luiden. En dat doel kun je bereiken door de wiskunde op het niveau van kinderen te concretiseren. So far so good. Maar schuilt er niet een adder onder het gras?

De adder onder het gras

Er schuilt inderdaad een adder onder het gras en dat betreft het volgende probleem. Indien de abstracte wereld van rekenen-wiskunde van volwassenen botst met de belevingswereld van kinderen, dan zullen de uit die eerste wereld vertaalde concretiseringen *evenzeer* botsen met de belevingswereld van kinderen. Ook al vertaal je het volwassen wiskundig denken in concreet materiaal, nog steeds staat de wereld van volwassenen tegenover de wereld van kinderen. Onze opdracht moet zijn: Zoek niet naar het wiskundig denken van volwassenen,



Concretiseringen kunnen een belangrijke rol spelen bij het leren rekenen, mits het gaat om concretiseringen van het wiskundig denken van kinderen en niet dat van volwassenen.

maar naar het wiskundig denken van kinderen. Zoek wiskunde die in de wereld van *kinderen* betekenis heeft. Dit lijkt in strijd met de eerdere opmerking dat wiskundig denken te abstract is voor kinderen. Maar dan hebben we het over het volwassen wiskundig denken en redeneren, dus over de wijze waarop volwassenen met hun wiskundige kennis naar de wereld kijken. Als dát wiskundig denken wordt geconcretiseerd, blijven we in feite in de wereld van de volwassenen steken en die heeft inderdaad weinig betekenis voor de kinderen.
In het kinderleven hebben wiskundige activiteiten wel degelijk betekenis, denk maar aan bouwen, construeren, tellen, meten, ruimtelijk oriënteren, enzovoort. De vraag is dus niet zozeer of een volwassen wiskundige activiteit of werkwijze voor kinderen *concreet* gemaakt kan worden. De vraag is eerder of en hoe we kunnen aansluiten bij *betekenisvolle* wiskundige activiteiten die voorkomen in het handelen en spelen van kinderen
Een kerngedachte is eigenlijk de volgende. *Wat voor kinderen betekenis heeft, kan wel concreet zijn, maar wat geconcretiseerd is, hoeft niet altijd betekenis voor hen te hebben.* We zullen dit aan de hand van enkele voorbeelden verduidelijken.

Voorbeeld 1: Rekenrek en vingerbeelden

Bij het rekenen in het getallengebied van 1-20 wordt vaak het rekenrek in gezet. Het rekenrek is gebaseerd op onderzoek naar het rekenen van kinderen. Daaruit blijkt dat de leerlingen die goed uit de voeten kunnen in het getallengebied tot 20 handig gebruik maken van de rekenfeiten die ze paraat hebben. Tot de kennis die veel leerlingen paraat hebben behoren bijvoorbeeld de dubbelen, zoals 3 + 3 = 6, 4 + 4 = 8, enzovoort. Ook zijn leerlingen vaak handig met de vijf- en tienstructuur. Acht wordt bijvoorbeeld spontaan geassocieerd met 5 + 3 en 10 - 2.

Dit laatste heeft te maken met het gebruik van de vingers. Van jongs af aan gebruiken kinderen hun vingers bijvoorbeeld om aan te geven hoe oud ze zijn. Ze leren, al zijn ze zich er niet direct van bewust, dat één hand altijd 5 vingers heeft en twee handen 10 vingers. Vijf en tien kunnen daardoor gaan functioneren als steunpunten voor het herkennen van andere vingerbeelden. Zoals bijvoorbeeld: negen is één minder dan tien, of zeven is twee meer dan vijf. Dat zijn betekenisvolle redeneringen voor de kinderen, waar in het onderwijs op voortgebouwd kan worden. Het rekenrek biedt de leerlingen de mogelijkheid dezelfde getalrelaties te gebruiken.

De leerlingen ontwikkelen dus eerst getalkennis, waardoor ze op een gegeven moment wéten dat 5 plus 5 10 is en 4 plus 4 gelijk is aan 8. Dit kunnen ze weergeven op het rekenrek. Het rekenrek wordt, met andere woorden, ingezet als een middel om kennis te *representeren.* Het wordt gebruikt als notatiemiddel en is eigenlijk een soort kladblaadje.

De kennis wordt met behulp van het rekenrek ook *uitgebreid.* Het rekenrek ondersteunt wat rekenvaardige kinderen spontaan doen, het afleiden van lastigere rekenfeiten uit al gekende eenvoudige rekenfeiten. De leerlingen weten bijvoorbeeld dat 6 = 5 + 1 en 7 = 5 + 2. Nu kunnen ze ook 6 + 7 uitrekenen door 6 op te zetten als 5 + 1 en 7 als 5 + 2. Dat is samen 13. Of, – op een andere manier, uitgaande van 7 = 6 + 1 – door het dubbelbeeld '6 onder, 6 boven' op te zetten en daar één kraal aan toe te voegen. Dus 7 + 6 = 12 + 1 = 13. Op die manier wordt met behulp van het rekenrek het getallengebied tot 20 verkend.

FRANK ROOSENDAAL

Concretiseringen uit de eigen belevingswereld kunnen een fundament bieden voor de wiskundige ontwikkeling.

Het concrete als basis voor kennis?

Nu is er bij dit voorbeeld van het rekenrek onmiskenbaar sprake van het gebruik van concreet materiaal, maar het doel is hier niet het concretiseren van volwassen wiskundige kennis. Het rekenrek kan uiteraard gebruikt worden om tellend te rekenen en om kralenpatronen te leren herkennen, maar de hierboven bedoelde inzet van het rekenrek is anders. Het centrale idee is wat in het Engels, 'derived facts', wordt genoemd, afgeleide (reken)feiten. Het is de bedoeling dat de leerlingen al redenerend getalrelaties afleiden, dat ze het rekenrek gebruiken om dit redeneren te ondersteunen. Ze gebruiken dus wel concreet materiaal, maar niet als concretisering van de wiskundige kennis van volwassenen. Het gaat niet om de concreetheid van de kralen, of van de getalbeelden. Wat hier concreet is voor de leerlingen is de kennis van elementaire rekenfeiten. 'Acht is vier plus vier' en 'zeven is vijf plus twee' en 'zeven is zes plus een'.
Het rekenrek biedt de leerlingen de mogelijkheid deze rekenkennis te 'noteren' en om daarmee te redeneren.

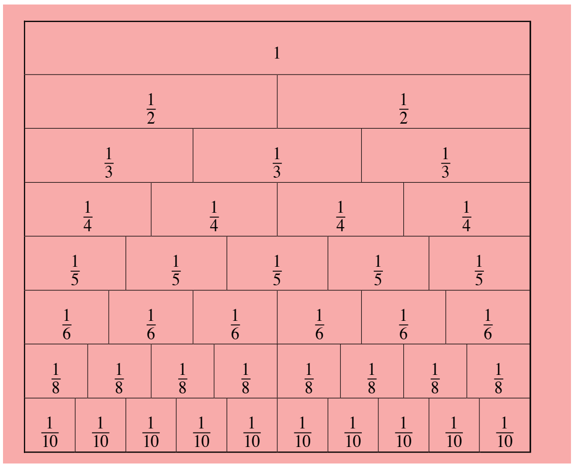
FRANK ROOSENDAAL

Het rekenrek biedt leerlingen de mogelijkheid om hun rekenkennis te 'noteren' en daarmee te redeneren.

Voorbeeld 2: breuken

Een vergelijkbaar verhaal geldt voor het leren van breuken. Volgens ons moet het leerproces niet starten met de (vroeger veel gebruikte) breukenstroken en vergelijkbare materialen. Zonder zelf na te denken kunnen kinderen immers op deze stroken aflezen dat bijvoorbeeld $\frac{1}{4}$ even groot is als $\frac{2}{8}$. (zie afbeelding 1)

Afbeelding 1



Breukenstroken laten leerlingen passief gelijkwaardige breuken aflezen in plaats van dat ze uitgedaagd worden om actief zelf op zoek te gaan naar gelijkwaardige breuken.

De leerlingen moeten uitzoeken wanneer ze zelf in hun eigen ervaringswereld met breuken worden geconfronteerd en leren om zelf breuken te maken.
De beperkte betekenis van breukenstroken en vergelijkbaar concreet materiaal kan geïllustreerd worden met de volgende anekdote. Leerlingen uit de middenbouw moesten een aantal stroken van dezelfde lengte op verschillende manieren verdelen. De stroken stelde een banketstaaf voor die in drieën, respectievelijk in zessen verdeeld moest worden. Daarna werd de leerlingen gevraagd de zesden en de derden onderling te vergelijken. De leerlingen kwamen toen tot de conclusie dat $\frac{1}{3}$ niet gelijk was aan $\frac{2}{6}$. Ze gingen af op de grootte van de stukjes, en die klopten niet omdat ze niet nauwkeurig genoeg geknipt hadden. Wanneer de leerlingen met een breukendoos of een breukenkast gewerkt zouden hebben zouden ze tot de conclusie zijn gekomen dat $\frac{1}{3}$ wel gelijk is aan $\frac{2}{6}$. Dat lijkt een pleidooi voor de breukendoos, maar in het licht van het voorgaande mogen we ons afvragen wat dit 'inzicht' waard is, als het afhangt van de 'toevallige' grootte van de stukjes. Sterker nog, er is helemaal geen sprake van inzicht, als de leerlingen zich beperken tot kritiekloos aflezen, of zonder

Een kind dat een strook in zes stukjes verdeeld ontdekt niet vanzelf dat $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Tot die redenering moet het uitgedaagd worden.

nadenken vergelijken. Het wordt wel interessant als je leerlingen vraagt wat een handige manier is om één strook (banketstaaf) in zes gelijke stukjes te verdelen. Want mogelijk komen ze dan op het idee om de strook eerst in drieën te verdelen en vervolgens de stukjes in tweeën. Dan staat de deur open om te beredeneren dat $\frac{1}{3}$ wel gelijk aan $\frac{2}{6}$ *moet* zijn. Niet omdat we zo precies geknipt hebben en je dus de stukjes kunt afpassen, maar omdat je weet dat het zo is omdat je elke derde in twee zesden verdeeld hebt.

Concretiseringen van kinderen versus volwassenen

Het probleem met concretiseringen die door volwassenen zijn bedacht, bestaat hieruit dat die volwassenen al weten hoe de vork in de steel zit. De wiskunde die zij in concrete materialen zien, projecteren zij er zelf (meestal spontaan) op. Zij zien in de abacus bijvoorbeeld direct hoe getallen zijn opgebouwd en op de abacus kunnen worden gerepresenteerd, veel leerlingen echter zien in een abacus slechts zoiets als een plankje met lussen met daarop losse kralen.
Het lijkt wel of er een onoverbrugbare kloof bestaat tussen de denkwereld van volwassenen en de ervaringswereld van kinderen. Inderdaad is er in zekere zin sprake van een kloof, maar onoverbrugbaar hoeft die niet te zijn, mits de leerlingen de ruimte krijgen om op basis van hun eigen kennis en ervaringen zélf wiskunde te ontwikkelen. De leraar heeft daarbij echter een belangrijke taak en die bestaat onder meer hieruit discussies te organiseren, ruimte voor exploratie te geven, reflectie uit te lokken en verschillende inzichten met elkaar te laten vergelijken.

Common sense concreet

Een term die in dit artikel centraal staat, is de term *concreet*. Wat betekent nu eigenlijk concreet? Deze term kan op twee manieren worden opgevat. Ten eerste als het concrete dat gekoppeld is aan aanschouwelijkheid. Dat kan in de vorm van materiaal waarmee gehandeld wordt of tekeningen, afbeeldingen enzovoort die een begrip of procedure representeren. Deze didactische concretiseringen zijn doorgaans rechtstreeks uit de wiskunde van volwassenen afgeleid en we noemen ze *materieel concreet*. Ten tweede is het begrip concreet gerelateerd aan noties en intuïties voortkomend uit de ervaringswereld van kinderen. We noemen dit *common sense concreet*. Het gebruiken van het feit dat 7 gelijk is aan 5 + 2 is voor de leerlingen op een gegeven moment een kwestie van gezond verstand. Op vergelijkbare wijze kan het idee dat je zes stukjes kunt maken door eerst in drieën en daarna in tweeën te delen (of andersom) op een wat later moment ook een kwestie van gezond verstand zijn. Gezond verstand zien we als iets dynamisch. Wat gezond verstand is voor de expert is niet hetzelfde als wat gezond verstand is voor de leek. Het is een kwestie van kennis en ervaring. Dat geldt ook voor wiskundig gezond verstand. Wat een gezond-verstand-redenering is voor de jonge leerling is niet hetzelfde als wat een gezond-verstand-redenering inhoudt voor een oudere leering. Wiskundig gezond verstand groeit op basis van ervaring en redeneren, gebruik makend van wat al tot het gezond verstand behoort. Tenminste als we het onderwijs daarop inrichten.[2] Er wacht ons dus een mooie taak: We moeten op zoek gaan naar wat voor de leerlingen op een bepaald moment common sense concreet is en daarop aansluiten. En we moeten vermijden dat we onze eigen volwassen wiskundige kennis materieel concreet maken.

De auteurs zijn werkzaam op het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht

Noten

1. Van Oers (2006) heeft overigens laten zien dat jonge kinderen wel degelijk met abstracties kunnen werken.
2. Volgens Freudenthal (1991) moet het gezond verstand (common sense) het startpunt zijn en op elk hoger niveau steeds de motor blijven van het reken-wiskundeonderwijs.

Literatuur

*Freudenthal, H. (1991) **Revisiting Mathematics Education**. China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.*
*Kool, M. (1999) **Die conste vanden getale.** Hilversum, Verloren (dissertatie).*
*Oers, B. van (2006) 'Kunnen jonge kinderen abstract denken?' In: **De Wereld van het Jonge Kind.** Februari, p.162-166.*