Heuristiek en heuristieken

H. Freudenthal
OW & OC, RU Utrecht

Summary

Heuristics are a new fashion in research and development of mathematics education. In the Polya's footsteps one tries to teach certain tactics for problem solving. In the continental terminology heuristic instruction is a term of long standing.
Heuristic instruction as understood by Polya too is quite another thing than teaching heuristics. It is rather a process of subtle teacher-learner interaction. The author gives successful and less successful examples of such processes.

In de titel staan twee woorden, die ikzelf anders niet pleeg te gebruiken. Ze staan hier als objecten van een begripsanalyse, die mij nuttig lijkt als verheldering en om verwarring tegen te gaan.
Van Archimedes wordt verteld hoe hij opgetogen over een ontdekking (welke?) die hij in het bad had gedaan, naakt naar huis liep, terwijl hij luidkeels riep: "Heureka – ik heb 't gevonden".
Hoe is al die wiskunde waar we ons tegenwoordig op beroemen uitgevonden? We weten er het een en ander over uit de geschiedenis. Dat wil zeggen: wat we uit de geschiedenis weten is hoe iemand een bewijs van zijn voorganger vereenvoudigd, een oud begrip vernieuwd en gegeneraliseerd heeft, een onhandige definitie bijgeschaafd heeft, een heel hoofdstuk van de wiskunde op zijn kop heeft gezet en – ga zo maar door. Maar wat in die enkeling omging die iets uitvond of verbeterde, weten we niet. We kunnen er alleen maar naar gissen, en ook de uitvinder zou het ons misschien niet eens kunnen vertellen; wat hij ons heeft overgeleverd, is het schoonschrift van een vies kladje. Immers, zo benader je problemen: *heuristisch*, zoekende en vindende. En dat pleeg je – of placht je – heuristiek te noemen: het kladje, in tegenstelling tot het schoonschrift.
Maar aangezien we er niets van weten, laten we dan gissen hoe bijvoorbeeld Euclides (of een van zijn voorgangers) op het bewijs kwam dat er oneindig veel priemgetallen zijn. Op het bewijs? Neen, op het idee, want natuurlijk ging dat eraan vooraf. En aan dat idee ging – vermoed ik – iets anders vooraf: de vraag hoe kom je aan een lijst van al die priemgetallen?

Zeef van Eratosthenes

U hebt misschien eens van de zeef van Eratosthenes gehoord. Daar gaan we de priemgetallen mee "uitzeven". Laten we de natuurlijke getallen achter elkaar op een rijtje zetten (of gezet denken), te beginnen met 2 (want 1 is flauw). 2 is een priemgetal, het enige even priemgetal en alle andere even getallen gaan we dus schrappen. Overblijven er de oneven getallen, dus die van de vorm $2n + 1$. Het eerste ervan, 3, is weer een priemgetal en al zijn echte veelvouden mogen weer geschrapt. Wat blijft er dan over? De getallen van de vorm $2.3.n \pm 1$. Het eerste van de overgeblevenen is 5. Ik schrap er weer alle echte veelvouden van. Wat blijft er dan over? De getallen van de vorm $2.3.5.n \pm 1,7,11,13$ (waar dus achter het $\pm$-teken getallen staan die jegens 30 "relatief priem" zijn).
En zodoende kom je erachter hoe je bij een stel priemgetallen $p_1, \ldots, p_m$ een nieuw exemplaar vindt: je vermenigvuldigt ze met elkaar, telt 1 op bij het produkt en krijgt iets dat door geen van de oude priemgetallen deelbaar is, dus zelf een priemgetal of door een nieuw priemgetal deelbaar. Maar evenzo had je uitgaande van de verschillende priemgetallen $p_1, \ldots, p_m$ de uitdrukking $p_1 \ldots p_k + p_{k+1} \cdots p_m$ kunnen vormen om een nieuw priemgetal te bemachtigen.
Zijn ze er zó opgekomen? Ik weet het niet. Maar als het zo was dan zou het de heuristiek zijn geweest, het kladje dat ze weg hebben gemaakt, om je te verrassen, te overdonderen met het definitieve bewijs van "$p_1 \ldots p_m + 1$ enz."
In het onderwijs staat "heuristisch" tegenover "apodictisch". Niet: hier heb je het. Maar: zoek en vind het. Nu is

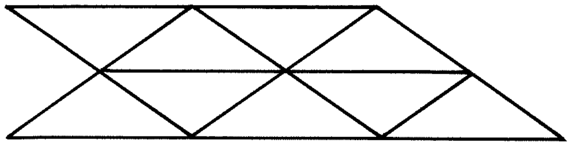
er behalve de leerling ook nog de leermeester. Hij gooit zijn leerling niet zo maar in het water en zegt "zwem", maar hij rekent het zich tot een eer zijn leerling te helpen: met een vraag die hij hem stelt, met een situatie waarin hij hem plaatst, met een duwtje hier en een hintje daar, en als hij het weet te organiseren zijn er ook nog de medeleerlingen die elkaar voortduwen (of ook voor de voeten lopen).
Het is wat je ook een gedachte-experiment noemt. De leermeester zweeft het "schoonschrift" voor ogen dat hij van zijn leerling straks verwacht en zeker ook een enigszins vage reeks van kladjes naar dit schoonschrift toe – een plan dat in het echte experiment tussendoor moet worden bijgesteld naar gelang hoe de leerling erop inspeelt. Dat is dan wat je van ouds heuristisch onderwijs noemt, in tegenstelling met het meer modieuze "problem solving" dat van alles kan betekenen, van de leerling laten modderen tot hem aan de leiband laten lopen.
Polya heeft er in een aantal boeken prachtvoorbeelden van gegeven, maar hij wist ook dat niet achter of naast elk van zijn lezers een Polya staat, om op het juiste ogenblik in het leerproces van de lezer in te grijpen. Een boekenschrijver laat als hij het goed doet (en dat doet Polya) zijn lezer meedenken, maar hij denkt niet met zijn lezer mee – immers dat kan niet.
Wat hij wel kan doen – en dat heeft Polya op onovertreffelijke wijze gedaan – is de wiskundige probleemoplosser met raadgevingen terzijde te staan, met collecties van adviezen waaruit die kan kiezen om een probleem aan te pakken – raadgevingen van het type: Ga eens een speciaal geval bekijken, tracht eens het probleem te generaliseren, stel dat je het gevraagde al had gevonden, maak er een tekening bij, kijk uit naar een probleem dat op dit lijkt, kijk wat er gegeven is – en ga zo maar door.
Dit soort adviezen noem je tegenwoordig "heuristieken" (u begrijpt dus nu het meervoud) terwijl Polya voorzover ik het kan overzien, onder heuristiek veeleer het zoek*proces* verstaat zoals ik het boven heb trachten te schetsen.(*).
Wat ze tegenwoordig met de modeterm "heuristieken" aanduiden, pleeg ik strategieën en tactieken te noemen – begrippen uit de krijgskunde die redelijk tegen elkaar af te grenzen zijn: *strategie*, die in het hoofdkwartier wordt uitgebroed, en *tactiek* die op het oorlogstoneel (tegenwoordig theater genoemd) te pas komt.
Bij het wiskundig bezig zijn is de grens minder makkelijk te trekken en het verloop ervan hangt ook van de situatie af. Voor de leerling die met ingeklede vergelijkingen begint is het advies "noem wat onbekend is x" een nieuwe strategie, maar als hij dit hele mechanisme door heeft, is zoiets tot een tactiek van min of meer automatisch handelen gedegradeerd.
Ons wiskunde-onderwijs is erop gericht, de leerlingen voor elk soort problemen het stel tactieken bij te brengen die erbij te pas komen. Maar dit zijn er bij elkaar nogal wat, voor elk soort toetssommen zeker vier of vijf. Bij het algoritmisch rekenen functioneert dit nog min of meer – soms min, soms meer. Maar daar staat dan ook duidelijk aangegeven welke bewerking je moet toepassen. Bij de redactiesommen vinden leerlingen veelal hun eigen tactieken uit, die niet altijd (of zelden) de goedkeuring van de beoordelaar wegdragen. In de algebra zijn er weer leerboekauteurs en leraren om je aan tactieken te helpen, die helaas niet zo automatisch functioneren als die van het algoritmisch rekenen. Hoe averechts deze tactieken worden toegepast – ik hoef er nauwelijks voorbeelden van aan te dragen. Uit de literatuur kun je een collectie bij elkaar vegen die qua amusement nauwelijks onderdoet voor een welgevulde moppentrommel. Het zijn tactieken die niet functioneren omdat ze in geen strategie ingelijfd zijn.
Maar de strategieën dan. Kun je die leren? Natuurlijk. Maar kun je ze ook onderwijzen? Het hangt ervan af wat je onderwijzen noemt. Een waslijst van strategieën die je, in een probleemsituatie geplaatst, doorloopt – doorhalen wat niet toepasselijk is – is uiteraard niet de bedoeling. Waar ik aan denk is de oplosser achteraf de strategie bewust te maken die hij gevolgd heeft – scherp genoeg om ze hem in te prenten en toch zo vaag dat hij er zich niet op vastlegt. Strategieën zijn alleen maar nuttig als je er niet aan vastzit, als je er flexibel mee kunt omgaan. Ze zouden niet apodictisch maar heuristisch moeten worden verworven. En daarmee ben ik terug bij het heuristisch leren zoals ik het volgens mijn terminologie in het begin heb geschetst. Bij het *probleem* van het heuristisch leren, zou ik zeggen – een probleem waar ik de oplossing niet van ken.
Moet je dan schrijven over een probleem waarvoor je geen oplossing hebt om mee voor de dag te komen? Waar je wel mee voor de dag kunt komen zijn je worstelingen met het probleem, met geslaagde en met mislukte pogingen. Ik durf het aan om een voorbeeld te stellen, want ik heb het gevoel dat zoiets veel meer zou kunnen gebeuren. Als meerderen de moed zouden opbrengen verslag te doen van hun – soms wanhopige – pogingen heuristisch onderwijs te geven, zouden we heel wat van elkaar kunnen leren ten profijte van heuristisch onderwijs.
En daar gaan we dan.

Een leerzame gebeurtenis

Laat ik het concreter doen om dat toe te lichten. Ik zit na een inspannende wandeling met een twaalfjarige in de trein, maar zijn geest is nog zo fris dat ik het mag wagen de tijd te korten met wat wiskunde.
Ik teken een driehoek en vraag de jongen hoeveel de hoeken wel samen zouden zijn. Uiteraard hebben we geen geodriehoek bij de hand, maar hij schijnt het gemis niet eens te voelen. Sinds enige tijd is hij erachter dat als er zo'n vraag in zo'n situatie wordt gesteld, het antwoord niet meer vereist dan nadenken. Ik beklemtoon dit want dit is een attitude die volwassenen soms na jaren wiskundeonderwijs nog niet hebben verworven: de situatie goed interpreteren – in casu, dat je in de trein zit, zonder geodriehoek en een vraag omtrent hoeken moet beantwoorden – dus niet een puur mathematische maar ook een menselijke situatie.
Misschien was mijn vraag al te scherp gesteld. Ik had misschien moeten vragen: "Zou er iets met de som van de hoeken aan het handje kunnen zijn?" Of misschien had ik verschillende driehoeken moeten tekenen en vragen wie de grootste hoekensom had. Of hem een driehoek met een vierkant qua hoekensom laten vergelijken.
Hoe dan ook, hij wist er niets op te antwoorden. Ik deed het met een duwtje. Stel je voor we zouden de driehoek uitknippen – we hadden geen schaar – en we maakten er nog meer van dit soort. Zouden we er het hele papier mee kunnen plaveien?

* Polya's boekje "How to solve it" draagt in het Nederlands de minder aan Polya's terminologie beantwoordende titel "Heuristiek en Wiskunde".

Na een eerste mislukking slaagt hij er spoedig in zo iets als



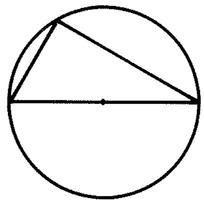
te produceren – ik moet eraan toevoegen dat hij iets dergelijks al eerder in ander verband was tegengekomen. Ik stel hem nog vragen naar doorlopende lijnen en hoeveel soorten er waren – vragen die ik met een liniaal ter plaatse anders zou hebben gesteld. Ik ging door met vragen naar gelijke hoeken en u begrijpt dat hij spoedig door had dat de hoekensom in de driehoek 180° was. De gelijkzijdige en de gelijkbenige rechthoekige driehoek kregen uiteraard ook een beurt.
Daarna kwam de (convexe) vierhoek en hij trok direct de vereiste diagonaal om tot de hoekensom 360° te geraken. Een zijsprong naar vierkant en rechthoek en dan de vijfhoek. Hier liep iets mis, d.w.z. het liep anders dan ik het uitgestippeld had. Hij trok maar één diagonaal, dus de vijfhoek in een vierhoek en een driehoek splitsend, en bij de zeshoek deed hij het navenant: één diagonaal, de zeshoek in vijfhoek en driehoek splitsend, en bij de zeshoek deed hij het navenant: één diagonaal, de zeshoek in vijfhoek en driehoek splitsend. Ik kon nu niet met goed fatsoen op de 1000-hoek overstappen, want wat wist hij dan omtrent de 999-hoek? Ik kon op zijn inductie niet inhaken en moest de mijne opzetten. U weet wel hoe zoiets gaat,

in de 3-hoek is het 1- keer 180°,
in de 4-hoek is het 2- keer 180°,
in de 5-hoek is het 3- keer 180°,
in de 6-hoek is het 4- keer 180°

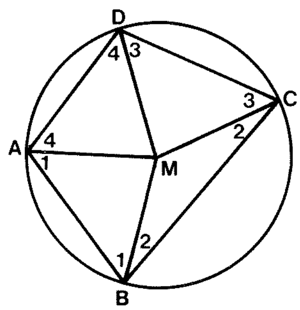
(met een zware klemtoon op de getallen 3,1; 4,2; 5,3; 6,4)

dus bijvoorbeeld in de 1000-hoek?

Geen kunst dat je het op die manier begrijpt. Ik had nog de euvele moed naar de n-hoek te vragen – een vraag die hij terecht niet begreep en ook toen hij er iets van begrepen had, niet goed kon plaatsen. Over het taalmiddel van (n-2).180° beschikte hij niet en ik had dat heus kunnen weten want ik heb zelf toetsen en onderzoek waar zulke wetenschap als vanzelfsprekend werd verondersteld wel eens gecritiseerd.
Met de hoekensom in de driehoek kan het ook anders. Je begint met een rechthoek waarvan de hoekensom evident is. Tussen twee haakjes: het *bestaan* van rechthoeken en het vlakplaveien zijn allebei equivalent met het parallellenpostulaat.
Van de rechthoek kun je door middel van een diagonaal naar de rechthoekige driehoek door, maar is dat wel de goede weg? Zou je niet beter met de rechthoekige driehoek beginnen en hopen dat de leerling die tot een rechthoek aanvult? Het zou een kans meer zijn, hem heuristisch bezig te zien. Mocht het mislukken, dan kun je altijd nog de rechthoek inschakelen om achteraf op de driehoek terug te komen.
Na een rechthoekige driehoek komt dan de algemene, waarvan je hoopt dat hij met een loodlijn in twee rechthoekige zal worden gesplitst. Ja maar, de mogelijk hiervoor vereiste duw zou veeleer op een schop kunnen lijken. Laten we dan met de wiskundeles in de trein doorgaan. Ik tekende een parallellogram met zijn diagonalen. Zie je daar dingen die gelijk zijn? Hij zag allereerst maar dingen die verschillend waren. Die trekken immers het sterkst de aandacht. Met duwtjes van "nog wat" kwam hij er achter dat de diagonalen elkaar middendoor delen. Hoe zie je dat? Ik moest appelleren aan iets wat hij al op school gehad had: "congruent" en "hoe vaak past zekere figuur in haar opening?". Het lukte. Het parallellogram werd in gedachten omgedraaid. Wat gebeurt er dan met de diagonalen en wat met hun snijpunt? Die vraag beantwoorden is het probleem oplossen.
Dat de gelijkbenige driehoek gelijkhoekig is werd daarna door hem spontaan op een dergelijke manier gemotiveerd.
Op het papier waar we op werkten stonden cirkels. Hij wist wat een middellijn is. Ik tekende een driehoek met als horziontale zijde een middellijn. Wat denk je dat die hoek daarboven is? Is het een wonder dat hij er een rechte in herkende? Weet je dat het precies een rechte hoek is? Ja, en tot mijn verbazing motiveerde hij het, door de driehoek aan te vullen tot een rechthoek en dan nog wel een "schuine".
Een leerzame gebeurtenis. Ik had immers ook, om de weg gladder te plaveien, met een ingeschreven rechthoek kunnen beginnen en er een diagonaal aan laten toevoegen om tot de driehoek op de middellijn te geraken. Het zou veiliger zijn geweest maar het had ook betekend dat ik een heuristische kans voorbij had laten gaan.



Ik vatte de moed op nog een stap verder te gaan. Ik tekende in een van de voorgedrukte cirkels een ingeschreven vierhoek – een koordenvierhoek, naar ik hem vertelde. Veiligheidshalve deed ik het zo dat het middelpunt M van de cirkel erbinnen lag. Ik liet hem M met alle vier hoekpunten verbinden en alle paarsgewijze gelijke hoeken aangeven. Wat denk je over hoek A en C? Direct zag hij dat ze samen 180° waren. En hoek B en D? Idem. Mijn volgende stap was, D door een D^1 op dezelfde boog AC te vervangen. Hij trok vrijwel spontaan uit $\angle B + \angle D = 180°$ en $\angle B + \angle D^1 = 180°$ de conclusie dat de hoeken D en D^1 "op dezelfde boog" gelijk waren. Een wel wat sterk voorgestructureerd stuk heuristiek.



Tenslotte

Met dit relaas heb ik het probleem van het heuristisch onderwijs niet opgelost, zelfs niet vergemakkelijkt. In tegendeel, ik heb het veeleer bemoeilijkt. Dat was ook de

bedoeling: de kern in de problematiek aan te wijzen. Eén leerling per leermeester – het kan een privilege zijn (voor de leerling èn de leermeester). Ik bedoel niet: privélessen. Die worden te duur betaald om kostbare minuten met hulpeloos zoeken te laten verspillen.
Meer realistisch lijkt: heuristisch onderwijs op het bord vóór de klas. De kans op slagen groeit zelfs met het aantal leerlingen. Het zou gek moeten lopen als er niet tenminste één inspeelde op je plannen, je toestond het gedachte-experiment in een echt experiment om te zetten.
Een variant hierop is de leerlingen afzonderlijk hun gang te laten gaan en ze na de vraag, wie erin geslaagd is de gelukkigen (of zich gelukkig wanenden) hun oplossing op het bord of op de overheadprojector te laten demonstreren.
Je kunt ze ook in groepen laten werken en je aandacht als leermeester op de groepen verdelen, instappen waar ze net aangekomen zijn als je dit punt maar telkens goed aanvoelt.
Je kunt je gedachte-experiment ook bij voorbaat organiseren met een stel werkbladen die de werkers naar hun doel moeten leiden. En dat stel kan strak georganiseerd zijn, met kleine stapjes, of losjes met in je achterhoofd genoteerd de plaatsen waar je je hebt voorgenomen in te grijpen als het leerproces stagneert.
Je kunt je gedachte-experiment ook aan een computer toevertrouwen – strikt geprogrammeerd of met af en toe een tussenopdracht die de leerlingen naar de leermeester verwijst.
Hoe moet het nu? Dit valt met geen middelen te zeggen en met geen middelen kun je ook de ene opzet met de andere vergelijken om de beste aan te wijzen. Ik heb verslagen van klassegesprekken gezien waar de leraar zich geheel tot de rol van gespreksleider beperkte en waar je op het eind zei: wat zonde van de tijd die daar verspild werd. En ik ken geprogrammeerd onderwijs dat de leerling geacht wordt als met oogkleppen te doorlopen. Ik houd het erop dat goed heuristisch onderwijs de kunst is van vrijheid en dwang wel te doseren. Hoe leer je die kunst? Wel, door hem te beoefenen.
In elk geval is heuristisch onderwijs totaal iets anders dan onderwijs van heuristieken.