

Algebra met applets

Paul Drijvers, Michiel Doorman, Peter Boon, Sjef van Gisbergen, Koeno Gravemeijer
Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen
Universiteit Utrecht, Nederland
Email: p.drijvers@fi.uu.nl

Algebra is een van de fundamenteën van het wiskundecurriculum in het secundair onderwijs. Het leren van algebra is echter niet eenvoudig. De vraag van dit artikel is in hoeverre ICT een bijdrage kan leveren aan algebraïsch inzicht en vaardigheid, en in het bijzonder of de inzet van applets ingebed in een digitale leeromgeving het functiebegrip van leerlingen van 13-14 jaar kan bevorderen. Het applet en het leerarrangement worden beschreven. Uitgaande van de instrumentele benadering worden de gegevens uit het pilot-experiment als positief beschouwd.

1 Inleiding

Algebra is een van de fundamenteën van het wiskundecurriculum in het secundair onderwijs. Centrale concepten zijn variabele, expressie, functie, formule en vergelijking; belangrijke vaardigheden zijn het omvormen van expressies en het oplossen van vergelijkingen. Deze vaardigheden worden in het algemeen met pen-en-papier geleerd en de vraag is of dit onder invloed van beschikbare ICT-middelen kan veranderen. Enerzijds kan men zich op het standpunt stellen dat algebraïsche vaardigheden en inzichten met pen-en-papier verworven moeten worden en dat leerlingen ICT pas daarna mogen gebruiken. Anderzijds is het mogelijk om ICT reeds in te zetten voor het verwerven van algebraïsche inzichten en vaardigheden. Deze laatste insteek vormt het uitgangspunt van deze bijdrage. Er wordt beschreven hoe applets – kleine Java-programmaatjes die via Internet kunnen draaien – kunnen worden ingezet opdat leerlingen algebraïsche inzichten en vaardigheden ontwikkelen. Websites zoals www.wisweb.nl bevatten een groot aantal van dergelijke applets, die verschillende onderwerpen uit de schoolalgebra betreffen.

We illustreren de mogelijkheden van de inzet van applets aan de hand van één specifiek applet, AlgebraPijlen, dat zich richt op functies als invoer-uitvoer machientjes. Het applet is ingebed in een eenvoudige leeromgeving die het de docent mogelijk maakt de vorderingen van de leerlingen te volgen en te beoordelen. In de werkgroep waarvoor dit artikel het achtergrondmateriaal vormt, kunt u kennismaken met de functionaliteiten van deze omgeving. In het artikel zelf beschrijven we de achtergronden van het ontwerp en de eerste onderzoeksresultaten van een pilot-experiment in een Nederlandse klas van leerlingen van 13-14 jaar. Het experiment vond plaats in het kader van een onderzoek getiteld ‘Het gebruik van tools in een innovatief leerarrangement voor wiskunde’¹.

2 Onderzoeksthema en vraag

De meer algemene vraag naar de mogelijkheden van ICT-gebruik voor het leren van wiskunde is in het genoemde onderzoek toegespitst op het leren van het functiebegrip met

¹ Dit artikel is een bewerking van Drijvers et al., in druk. Het onderzoek is mogelijk gemaakt door de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek, projectnummer 411-04-123

behulp van applets. Waarom het *functiebegrip*? In de onderbouw van het secundair onderwijs in Nederland komen functies op een vrij impliciete manier naar voren. Het gaat dan vooral over verbanden, die kunnen worden weergegeven als tabellen of grafieken. Het invoer-uitvoer karakter van een functie, de functie als afhankelijkheidsrelatie en de functie als wiskundig object komen weinig aan de orde. In de bovenbouw daarentegen wordt er vanuit gegaan dat leerlingen over een vrij compleet functiebegrip beschikken, en in staat zijn functies als objecten te beschouwen die deel uitmaken van een familie, of die onderworpen kunnen worden aan bijvoorbeeld een differentieeroperator. Het uitgangspunt van deze studie is dat de onderbouw beter kan voorbereiden op het functiebegrip dat in de bovenbouw wordt verondersteld. Of men het functiebegrip als onderdeel van de algebra beschouwd, is overigens discutabel: enerzijds is het functiebegrip verbonden aan de formules of het functievoorschrift, waarmee algebraïsche bewerkingen worden uitgevoerd. Anderzijds is het functiebegrip de basis voor de differentiaalrekening, een onderwerp dat eerder een analytisch karakter heeft. Waarom *applets*? Zoals gezegd zijn applets kleine, handzame interactieve omgevingen die via Internet kunnen worden verspreid en gebruikt. Applets zijn flexibel in de zin dat ze relatief eenvoudig aan te passen zijn aan nieuwe wensen en inzichten, zeker wanneer het, zoals in ons geval, gaat om applets waarvan we het ontwerp in eigen hand hebben.

Om meer greep te krijgen op de samenhang tussen het gebruik van het applet en de beoogde wiskundig-inhoudelijke leerdoelen is gebruik gemaakt van het theoretisch kader van de *instrumentele benadering van ICT-gebruik*. In deze instrumentele benadering staat het onderscheid tussen het artefact en het instrument centraal. Het artefact is het object, het 'ding' dat wordt gebruikt, in ons geval het applet ingebed in een eenvoudige digitale leeromgeving. Het instrument omvat behalve het artefact tevens de mentale instrumentatieschema's die de gebruiker (in ons geval de leerling) ontwikkelt om een bepaalde klasse van taken uit te voeren. Deze taken betreffen hier opgaven rond het functiebegrip. Dat instrument is er niet vanzelf, maar ontstaat in een leerproces van zogeheten instrumentele genese. Tijdens dat proces ontwikkelt de leerling zowel technieken om het applet te gebruiken als wiskundige inzichten en vaardigheden. Deze verwevenheid van gebruik van het artefact en ontwikkeling van het denken is kenmerkend voor de instrumentele benadering. Het doel van het onderzoek is dan ook om expliciet aan te geven hoe deze verwevenheid eruit ziet en hoe ze kan worden benut voor het beoogde leerproces. Dat is dan ook wat we in dit artikel zullen proberen. Voor meer informatie over de instrumentele benadering volstaan we hier met verwijzingen naar originele Franstalige bronnen (Lagrange, 2005; Rabardel, 2002; Trouche, 2004) en afgeleide Nederlandstalige publicaties (Drijvers & Gravemeijer, 2004; Drijvers, in druk).

Omdat het proces van instrumentele genese niet automatisch plaatsvindt, maar in goede banen geleid moet worden door de docent, kent het onderzoek twee onderzoeksvragen, één gericht op het leren van de leerling en één gericht op de rol van de docent:

1. Hoe kunnen applets worden geïntegreerd in een leergang over het functiebegrip, zo dat het gebruik het leren bevordert?
2. Hoe kunnen docenten het gebruik van het applet in de klassengemeenschap orkestreren?

3 Onderzoeksopzet

De onderzoeksopzet omvat drie cycli van ontwikkelingsonderzoek. Elke onderzoekscyclus kent een ontwerpfase, een onderwijsexperiment en een analysefase. Met elke cyclus groeit het aantal leerlingen dat bij het onderwijsexperiment is betrokken. De data zijn oorspronkelijk overwegend kwalitatief, maar in de derde cyclus meer kwantitatief. Op dit moment is de eerste cyclus afgesloten; dit artikel heeft dan ook alleen daarop betrekking.

Ontworpen wordt een leerarrangement, dat enerzijds het design van de digitale tools omvat, en anderzijds lesmateriaal en opdrachten voor de leerlingen, die gedeeltelijk op papier en gedeeltelijk digitaal worden aangeboden. Omdat de rol van de docent cruciaal is in het leerproces en in de instrumentele genese, is ook een docentenhandleiding ontworpen. Daarnaast zijn de verwachtingen omtrent het leertraject vastgelegd in een document voor de onderzoekers, dat hun observatie en analyse richt.

Tijdens het pilot onderwijsexperiment zijn verschillende typen gegevens verzameld. Van alle leerlingen zijn de papieren en digitale uitwerkingen verzameld. Een aantal leerlingen is gefilmd tijdens het werken. Klassikale delen van de lessen zijn gefilmd en de docent is gevolgd in haar interacties met leerlingen als ze in tweetallen of in groepjes aan het werk zijn. Deze gegevens zijn geanalyseerd met een softwarepakket voor kwalitatieve data-analyse, Atlas-ti. In dit pakket kunnen videofragmenten en scans van leerlingenwerk worden geordend, gecodeerd en geanalyseerd.

4 Het functiebegrip

Het doel van het onderzoek is dat leerlingen een veelzijdig en rijk functiebegrip ontwikkelen. Dat is niet eenvoudig. Vinner en Dreyfus hebben laten zien dat er veelal een kloof bestaat tussen de formele functie definitie en de manier waarop leerlingen tegen functies aankijken (Vinner, 1983; Vinner & Dreyfus, 1989). Malle (2000) beschrijft twee kanten van dat functiebeeld: de invoer – uitvoer toekenning en de co-variatie, waarbij de verandering van de onafhankelijke variabele die van de afhankelijke variabele aanstuurt. De ideeën van co-variatie en afhankelijkheid vinden we ook terug bij Freudenthal:

The function is a special kind of dependence, that is, between variables which are distinguished as dependent and independent. (...) This - oldfashioned - definition stresses the phenomenologically important element: the directedness from something that varies freely to something that varies under constraint. (Freudenthal, 1983, p. 496).

Uitgaande van gegevens van interviews met leerlingen verwachten we dat het aanvankelijke beeld dat leerlingen van functies hebben vooral een locale rekenprocedure behelst, die slechts op één invoergetal tegelijk wordt toegepast en dan één uitvoergetal oplevert. Het doel van het onderwijs is dat dit functiebeeld wordt uitgebreid met de volgende facetten, die natuurlijk niet los van elkaar staan.

1. Een invoer – uitvoer toekenning

De functie is een invoer – uitvoer toekenning die rekenprocessen helpt organiseren en uitvoeren. Deze ietwat vage notie krijgt geleidelijk aan meer nuances: *hoe* hangt de uitvoer af van de invoer? *Hoe* bepaalt de invoer de uitvoer?

Het oorspronkelijk locale karakter wordt meer globaal: de functie is niet alleen een relatie tussen invoer- en uitvoergetallen, maar ook een tussen domein en bereik.

Functies kunnen worden vergeleken op globale kenmerken, zoals stijgen, dalen en asymptotisch gedrag. Dit vormt een opening naar het facet van co-variatie.

2. Een dynamisch proces van co-variatie

Hier gaat het om het besef dat de onafhankelijke variabele het domein doorloopt, en daarmee de afhankelijke variabele het co-domein of bereik laat doorlopen. De afhankelijke variabele co-varieert met de onafhankelijke. In eerste instantie wordt deze gekoppelde verandering op een fenomenologisch niveau waargenomen. In tweede

instantie wordt de vraag naar het hoe en waarom van dit gezamenlijke dynamische proces opgeroepen: wat gebeurt met de afhankelijke variabele als de onafhankelijke toeneemt, bijvoorbeeld met 1 eenheid? Hoe kun je dat zien in de tabel en in de grafiek, of verklaren uit de formule? De aandacht voor de verschillende representaties nodigt uit tot de kijk op de functie als wiskundig object.

3. Een wiskundig object

Een functie is een wiskundig object dat op verschillende manieren kan worden voorgesteld: als pijlenketting, als tabel, als grafiek, als formule. Met elke voorstelling kijk je als het ware vanuit een ander perspectief naar hetzelfde object. Het gaat om een geïntegreerd functiebeeld, dat redeneren op een globaal niveau mogelijk maakt: hoe zie je een bepaalde eigenschap van de grafiek terug in de tabel of in de formule, hoe kun je beslissen of twee functies tot een zelfde ‘familie’ behoren?

5 Het gereedschap

In het onderwijsexperiment wordt zowel materieel als digitaal gereedschap gebruikt. Het materiaal omvat een flexibel parallellogram (Fig. 1 links), posters voor presentaties, kaarten met bewerkingssymbolen om ‘levende pijlenkettingen’ te maken (Fig. 1 rechts), en kaarten met functierepresentaties die aan elkaar gekoppeld moeten worden. Het doel is om duidelijk verband te leggen tussen de materiële en de digitale tools door ze een vergelijkbare aanblik te geven. In dit artikel beperken we ons tot het digitale gereedschap, dat bestaat uit het applet ingebed in een eenvoudige digitale leeromgeving.

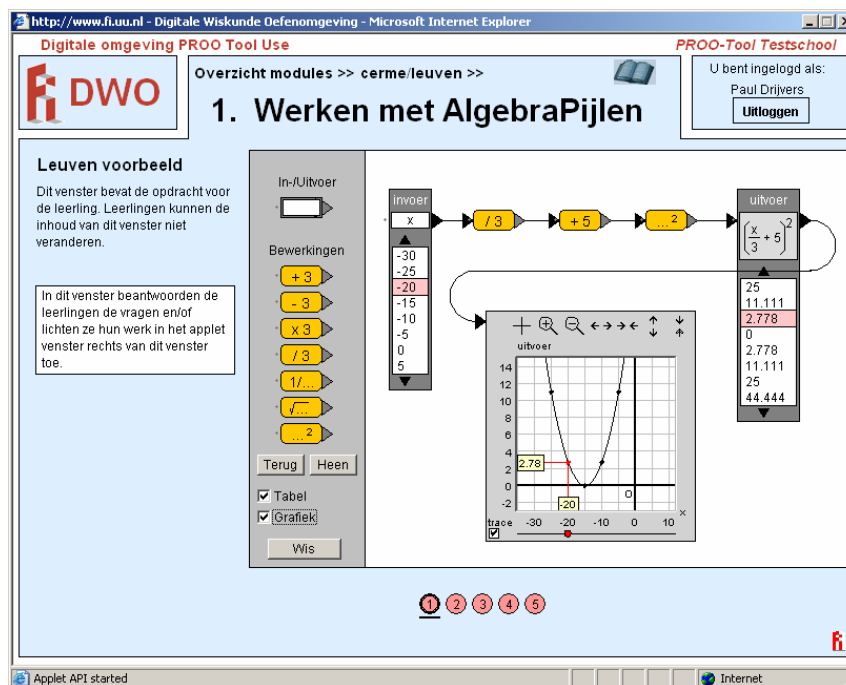


Figuur 1 Het flexibele parallellogram en de ‘levende pijlenketting’

Het belangrijkste digitale gereedschap is een applet dat AlgebraPijlen heet. Het is ontwikkeld door Peter Boon en maakt het mogelijk om invoer-uitvoer kettingen van bewerkingen te maken. Deze kettingen kunnen worden toegepast op getallen, maar ook op variabelen. In het laatste geval kunnen tabellen, formules en (punt)grafieken worden gemaakt. Kettingen kunnen worden uitgebreid, verbonden, vergeleken en gecomprimeerd. Fig. 2 geeft een indruk van de belangrijkste mogelijkheden van het applet.

Het applet is ingebed in een eenvoudige digitale leeromgeving, de Digitale Wiskunde Omgeving (DWO). De DWO is het antwoord op het vluchtige karakter dat het werken met applets kan hebben. In de DWO wordt al het werk van de leerlingen opgeslagen op een centrale server. Daardoor kunnen de leerlingen hun werk later terugzien, verbeteren en ermee doorgaan op een ander tijdstip en op een andere plaats, in het bijzonder thuis. Voor de docent betekent de DWO dat de voortgang van de leerlingen eenvoudig kan worden nagegaan, dat de resultaten van de hele klas eenvoudig in beeld komen en dat het werk van de leerlingen kan worden beoordeeld.

De DWO biedt ook de mogelijkheid om opdrachten en vragen op te nemen, die de leerlingen buiten het venster van het eigenlijke applet kunnen beantwoorden. Op die manier ontstaat als het ware een digitaal werkboek. In het venster linksboven in Fig. 2 staat de opdracht. De leerlingen werken in het applet venster rechts, en formuleren hun antwoord in het venster linksonder.



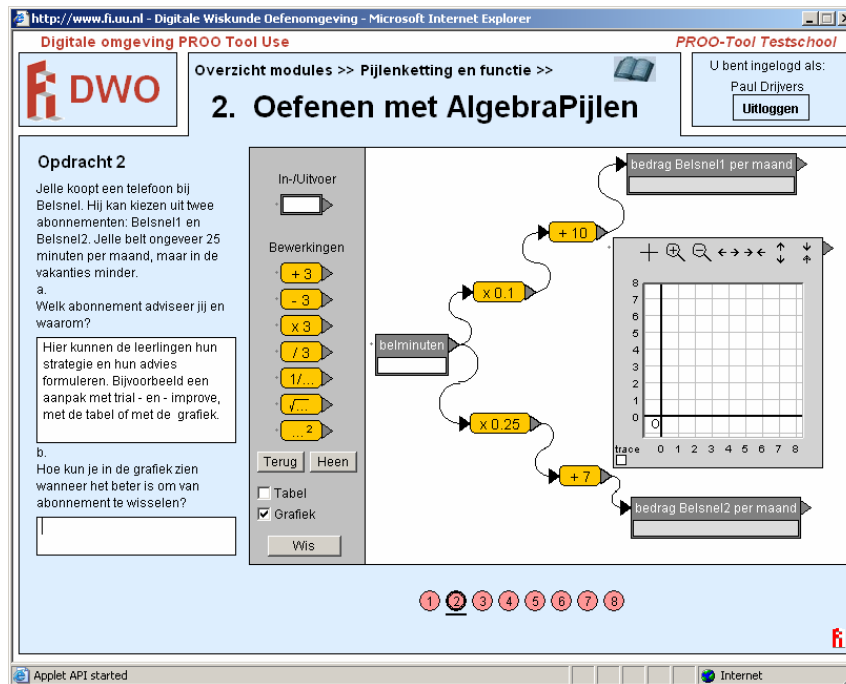
Figuur 2 Het applet AlgebraPijlen ingebed in de DWO

6 Gereedschap en inzicht

De instrumentele benadering van het gebruik van ICT-gereedschap benadrukt de relatie tussen de begripsontwikkeling, het gebruik van een techniek met het gereedschap, en de uitvoering van een opdracht (Kieran & Drijvers, 2006). Hoe kunnen de drie facetten van het beoogde functiebegrip in verband worden gebracht met opdrachten en met de mogelijkheden van het gereedschap, in dit geval het applet en de leeromgeving? We lopen de drie facetten langs.

1. Een invoer – uitvoer toekenning

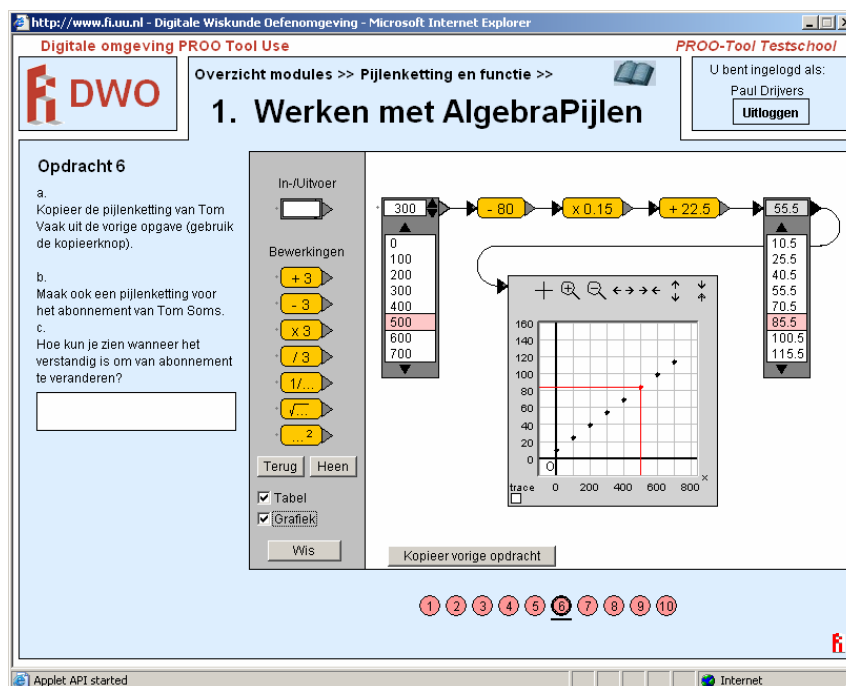
Als de pijlenketting in AlgebraPijlen wordt toegepast op een getal, geeft dat de functie als invoer – uitvoer toekenning weer. De twee pijlenkettingen in Fig. 3 stellen bijvoorbeeld de kosten voor van twee aanbieders van mobiele telefonie. De vraag naar het voordeligste aanbod nodigt ertoe uit de globale eigenschappen van de kettingen te onderzoeken. De techniek van het invoeren van numerieke waarden maakt het vergelijken van uitvoer mogelijk. Een variabele invoer leidt tot een meer globale vergelijking, waarin grafieken, tabellen en formules kunnen worden betrokken.



Figuur 3 Een invoer – uitvoer toekenning in het applet

2. Een dynamisch proces van co-variantie

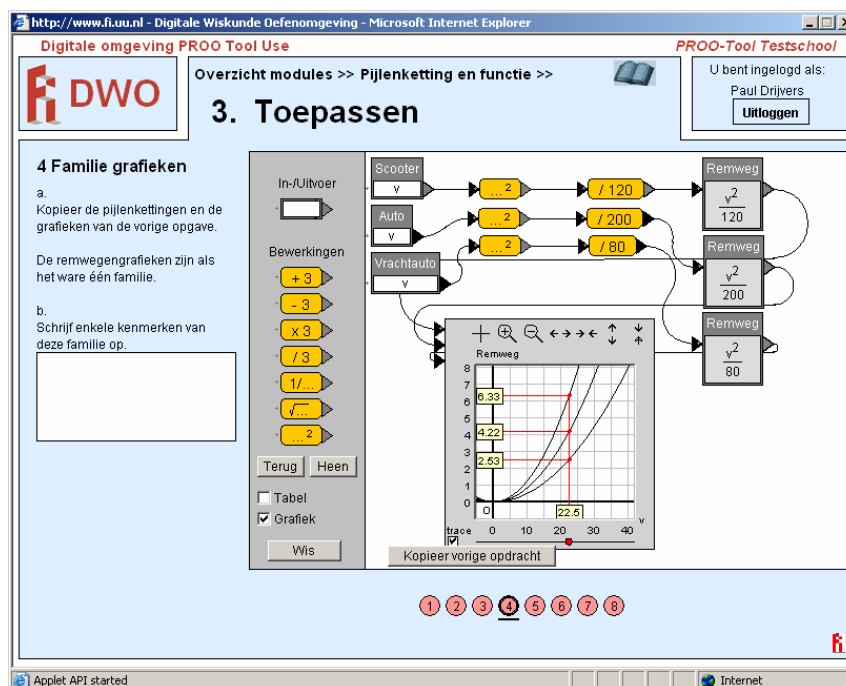
In het applet kunnen niet alleen de invoerwaarden worden veranderd, maar kan de co-variantie ook worden onderzocht. De ketting in Fig. 4 stelt bijvoorbeeld de kosten van een bepaald mobiel telefoon abonnement voor. De dynamiek van de co-variantie kan worden onderzocht door verschillende numerieke waarden te substitueren, met het scrollknopje naast het invoergetal, door te scrollen in de tabel of over de grafiek te lopen, en door de formule te onderzoeken. De opdracht voor de leerlingen is om de verandering van de kosten per minuut verandering van de invoerwaarde te bepalen.



Figuur 4 Co-variantie

3. Een wiskundig object

De verschillende representaties die in het applet beschikbaar zijn, in combinatie met geschikte opdrachten die gericht zijn op de verbanden tussen die representaties, leiden tot een meer holistische kijk op de functie als wiskundig object. Een manier om het objectkarakter van de functie te benadrukken is om families van functies te onderzoeken. In Fig. 5 staan de kettingen en de grafieken van de remweg als functie van de snelheid voor een scooter, een auto en een vrachtwagen. De techniek om de laatste bewerking in de ketting te veranderen draagt bij aan het ontdekken van algemene kenmerken van de grafieken en aan het bepalen van eigenschappen van de familie van functies, waarvan drie leden zijn weergegeven.



Figuur 5 Een familie van wiskundige objecten

7 Ervaringen uit de klas

Het hierboven beschreven leerarrangement is in een pilot-experiment uitgetest. De test vond plaats in een 2^{de} klas havo/vwo van een school in Utrecht. Voor de ervaringen in het begin van de lessenserie verwijzen we naar Doorman et al. (2007); hier beperken we ons tot enkele indicatieve bevindingen rond het werken met het applet.

Laten we eerst citeren uit het werk van leerlingen, zoals ze dat intypen in het antwoordvenster van de DWO.

- Bij de opgave van Fig. 3 schreef een paar leerlingen:
 “Hij belt ONGEVEER 25 minuten. Bij 20 minuten betalen ze hetzelfde. Belsnel1 kan hij beter gebruiken als hij 25 minuten per maand belt maar als hij minder dan 20 minuten belt kan hij beter voor Belsnel2 kiezen.”
 Veel leerlingen concentreerden zich op het snijpunt van de twee grafieken als het omslagpunt.
- Bij de opgave van Fig. 4 schreef een duo leerlingen:
 “Er komt steeds 15 cent bij p. min. In de tabel komt er steeds 0.15 bij en in de grafiek gaat de lijn steeds 0.15 omhoog.”

Een ander paar was wat vager:

“Het punt in de grafiek gaat steeds een beetje hoger. De minuten en de kosten gaan allebei omhoog.”

De meeste leerlingen merkten de co-variantie op, maar hadden moeite om hun waarneming duidelijk en gedetailleerd uit te drukken.

- Bij de opdracht in Fig. 5 letten de meeste leerlingen op de eigenschappen van de grafieken:

“Ze gaan allemaal in een soort bocht omhoog.”

In sommige gevallen werd de pijlenketting erbij betrokken:

“Het wordt bij alle 3 gekwadraterd en gedeeld. Alleen door een ander getal gedeeld.”

Net als in de vorige opgave merkten de leerlingen overeenkomsten op, maar vonden ze het moeilijk om die duidelijk te omschrijven.

Over het geheel genomen bleek de DWO een krachtige combinatie te bieden van mogelijkheden van het applet en mogelijkheden van een ‘werkboek’ waarin de opdrachten staan en waarin leerlingen antwoorden noteren. Toch geven de citaten hierboven aan dat het voor leerlingen niet eenvoudig is om op hun werk met het applet te reflecteren en de wiskundige conclusies daaruit nauwkeurig te omschrijven. Verder had de vormgeving met een sterke koppeling tussen het papieren lesmateriaal en het digitale werk praktische complicaties. Zodra de leerlingen op het scherm aan het werk waren, lazen ze nauwelijks meer wat op papier stond. Voor de volgende experimenteercyclus is dan ook besloten om het digitale materiaal meer onafhankelijk van het papier te maken door online helpfaciliteiten in te bouwen en digitale kopieën van het papieren materiaal op te nemen in de DWO. Op die manier wordt het gelijktijdig omgaan met papier en scherm vermeden.

Het globale leertraject functioneerde naar behoren, al is wel opgemerkt dat het te veel bepaald is door de wiskundige analyse van het functiebegrip en niet genoeg door de problemen die leerlingen kunnen aanpakken met het applet. Verder waren de moeilijkheden onderschat die leerlingen hadden met het kiezen en benoemen van variabelen in toepassingsituaties.

Uit de observaties kwam de relatie tussen de technieken met het applet en het wiskundig denken duidelijk naar voren. Het was echter niet altijd duidelijk of de instrumentele genese tijdens de opeenvolgende activiteiten gestuurd werd door het redeneren van de leerlingen, of dat ze meer door ‘trial-and-improve’ tot stand kwam. In de leerlingactiviteiten kwam de dynamische kijk op het functiebegrip nog te weinig aan de orde, iets dat we in de volgende ronde van het onderzoek proberen te verbeteren.

In een interview na afloop van het experiment gaf de docente aan dat het applet ingebed in de DWO een krachtig middel was om te ervaren “dat formules, tabellen, grafieken en al die dingen met elkaar te maken hebben”. Ze stelde ook dat de leerlingen aan het einde van het experiment “veel beter redeneerden dan bij het begin”. Ze merkte echter ook op dat het klassenmanagement technisch gecompliceerder was dan in een gewone les, vanwege het geïntegreerde gebruik van de verschillende media en de vrij ingewikkelde onderwijsscenario’s.

8 Conclusie

Zoals gezegd diende het pilot onderwijsexperiment vooral als een eerste veldtest voor het ontworpen leerarrangement. De conclusies hebben dan ook vooral een informerend karakter voor de volgende onderzoekscyclus en zijn geen eindconclusies.

Ten aanzien van de eerste onderzoeksvraag over het verband tussen het gebruik van het applet en het leren concluderen we dat het applet interessante mogelijkheden biedt voor activiteiten

die de begripsontwikkeling bevorderen. De nauwe relatie tussen applet techniek en het werken met papier-en-pen zorgt voor een geïntegreerde ontwikkeling van het denken en voor transfer tussen notaties in het applet en op papier. In die zin pakte de ‘mixed media’ benadering goed uit, wat in overeenstemming is met bevindingen van Kieran & Drijvers (2006). Toch is een meer gedetailleerde observatie van het proces van instrumentele genese nodig. Een fijnere beschrijving van het beoogde leerproces zal worden ontwikkeld, waarin wordt aangegeven hoe de verschillende technieken elkaar opvolgen, elkaar ondersteunen en gezamenlijk een leerlijn vormen. Zo’n leerlijn zou het ook mogelijk maken te onderzoeken in hoeverre de instrumentele genese gepaard gaat met een leertraject van de leerling dan wel het resultaat is van een proces van ‘trial-and-improve’ (Gravemeijer et al., 2003; Doorman, 2005).

Ten aanzien van de tweede onderzoeksvraag over de orkestratie door de docent concluderen we dat het onderwijsarrangement veel vraagt van de leerkracht, die veel van haar tijd besteedde aan organisatorische zaken. De mogelijkheden voor de docent om het leerlingenwerk in de DWO in te zien komen van pas bij het peilen van de voortgang en bij het aanpassen van de lesvoorbereidingen daaraan. De interacties tussen docent en leerling tijdens het werken in tweetallen met het applet lijken vooral vruchtbaar te zijn als de docent in de uitleg zowel technische als conceptuele elementen betreft. Tot besluit concluderen we dat het werk in tweetallen met het applet niet voldoende is voor collectieve instrumentele genese; klassikale demonstraties en klassengesprekken spelen een wezenlijke rol in het expliciteren van de resultaten van de leerlingen en het bewerkstelligen van een convergentie in het wiskundige denken.

Referenties

- Doorman, L.M. (2005). *Modelling motion: from trace graphs to instantaneous change*. Utrecht, the Netherlands: CD-Bèta Press.
- Doorman, M., Drijvers, P., Boon, P. & Van Gisbergen, S. (2007). Het ligt aan de belminuten hoeveel eruit komt. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 26(3), 42-46.
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Van Gisbergen, S., Gravemeijer, K. (in press). *Tool use in a technology-rich learning arrangement for the concept of function*. Paper accepted for publication in the proceedings of the CERME5 conference, February 2007, Cyprus.
- Drijvers, P. (in druk). Instrument, orkest en dirigent: een theoretisch kader voor ICT-gebruik in het wiskundeonderwijs. *Pedagogische Studiën*.
- Drijvers, P. & Gravemeijer, K.P.E. (2004). Artefact en instrument: Computeralgebra en algebraïsche schema’s. *Tijdschrift voor didactiek van de bètawetenschappen*, 21(1), 47-68.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- Gravemeijer, K.P.E., Bowers, J. & Stephan, M.L. (2003). A hypothetical learning trajectory on measurement and flexible arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12, 51-66.
- Kieran, C. & Drijvers, P. (2006). Learning about equivalence, equality, and equation in a CAS environment: the interaction of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theorizing. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11, 205-263. <http://www.springerlink.com/content/u7t3580294652u37/>
- Lagrange, J.-b. (2005). Curriculum, classroom practices, and tool design in the learning of functions through technology-aided experimental approaches. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10, 143-189.

- Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *Mathematik lehren*, 103, 8-11.
- Rabardel, P. (2002). *People and technology - a cognitive approach to contemporary instruments*. <http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr>.
- Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 281-307.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematics in Science and Technology Education*, 14, 293-305.
- Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 356-366.