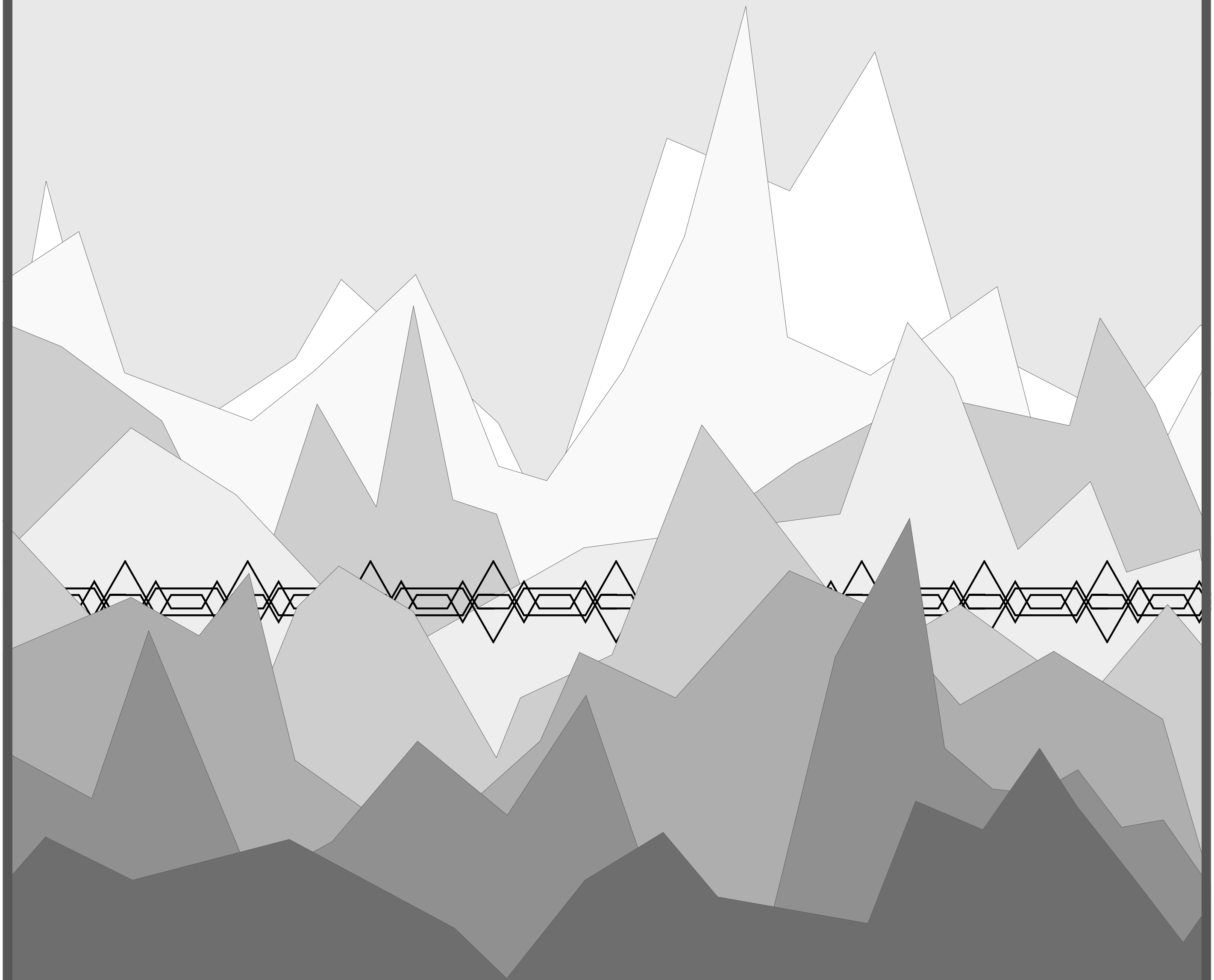
Zig zag
en de
antiperiodiek



Wiskunde B-dag
vrijdag 19 november 2010

Lees dit vooraf

De Wiskunde B-dag opdracht 2010 gaat over lijnen met knikken die je vooral via de computer als bijzondere grafieken te voorschijn roept. Hier volgt een overzicht van het geheel.

Deel A: Voorbereidingen

Hier krijg je de eerste - maar belangrijke - knepen van het zigzaggebeuren onder de knie, vooral de functies *zig* en *zag*. Je leert ook het computerprogramma *Geogebra* kennen (als je dat nog niet kent). Een handleiding *Geogebra* vind je in de bijlage.
Je doet *oefeningen* die zijn bedoeld voor het leren tekenen en redeneren met *zig, zag* en de computer. Je hoeft de uitwerkingen ervan niet in je eindwerkstuk op te nemen.

Deel B: Knikdesign: symmetrische en antiperiodieke bandpatronen

Dit deel gaat over oneindig doorlopende patronen met speciale eigenschappen. Het gaat niet alleen om tekenen met de computer, je moet ook *verklaren* wat je vindt met de computer. Dat doe je in *Redeneer- en Tekenopgaven (R&T)*. Die komen wel in je eindverslag!
In dit deel toon je je eigen creativiteit in *Eigen productie-opgaven.*

Deel C: Eentopsfuncties

In deel B maakte je antiperiodieke patronen; in dit deel toon je aan dat elk antiperiodiek patroon op te bouwen is uit de basisfunctie *zig*. Redeneer- en Tekenopgaven komen in je eindverslag.

Deel D: 2-dimensionaal zigzaggen met snelheid en animatie

Na het theoretische deel C is dit een verademing! Je leert drie nieuwe elementen kennen, die je zigzagcreativiteit zeker zullen verhogen. Je zult ze vast kunnen gebruiken in deel E.

Deel E: Slotopdracht

> ***Maak een statisch of dynamisch (d.w.z. bewegend) patroon naar eigen design met behulp van alle technieken uit het voorgaande.***

Net als bij de creatieve opdrachten eerder, komen afbeeldingen met toelichting in je werkstuk en lever je je producten ook digitaal in als .ggb-bestand.

Spelregels Wiskunde B-dag 2010

Wat doe je, en wanneer?

Zorg dat je Deel A, B, C en een stuk van D zeker vóór 13.00 uur hebt gezien, zodat je ruim tijd hebt voor eigen ontwerpen van deel E (en B!) en de afwerking van je werkstuk.

Wat lever je in op papier?

Toegelichte uitwerkingen met tekeningen van de *Redeneer- en Tekenopgaven* en de *Eigen productie-opgaven* en de *Slotopgave*. Mooi is het als je deze uitwerkingen opneemt in een doorlopende tekst, zodat een lezer die van niets weet, toch van je tekst en je plaatjes kan genieten en ook nog begrijpt wat je hebt gedaan.

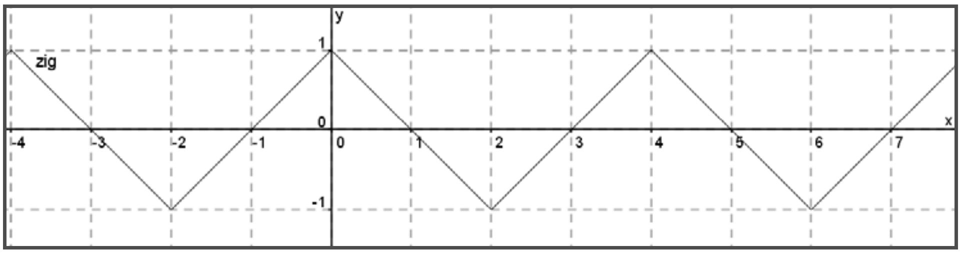
Hoe lever je de digitale bestanden in?

Niet teveel bestanden inleveren! Selecteer the-best-of en beperk het tot maximaal zes.
Om landelijke chaos te voorkomen is er een regel voor naamgeving van de bestanden.
In de wiskunde B-dag heeft jouw school een schoolnummer en jouw team een teamnummer.
Die nummers komen in je bestandsnaam, gevolgd door een ‘echte’ naam. Ben je van school 3071, zit je in team 23 en heb je een *slang* getekend dan heet dat bestand: **3071_23_slang.ggb**
Wijk NIET van de nummering af en maak er GEEN vergissingen mee.
In je verslag staan precies deze bestandsnamen en geef je een toelichting op de werking.

Deel A: Voorbereidingen

De zig-functie is een periodieke knikfunctie

Dit is de grafiek van de functie *zig(x).*



Het is duidelijk wat bedoeld wordt:

- *zig*(*0*) = 1
- De grafiek van *zig* gaat met vaste helling 1 of -1 op en neer tussen hoogte 1 en -1
- De grafiek herhaalt zichzelf; *zig* heeft periode 4.

De punten waar de helling verandert van 1 naar -1 of van -1 naar 1 op de grafiek heten *knikpunten*.

In het geval van *zig* zijn (0, 1) en (2, -1) *knikpunten*. De periodiciteit zorgt er voor dat alle punten (4*k*, 1) en (4*k* + 2, -1), waarbij *k* een geheel getal is, ook knikpunten zijn.

Oefening 1

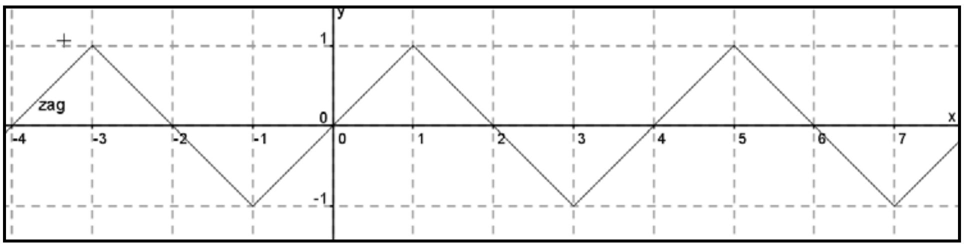
a. Bepaal *zig*(*x*) voor *x* = 1, voor *x* = 2006, voor *x* = 0.7 en voor *x* = -511.3.

b. Voor welke waarden van *x* in het interval [0, 8> geldt *zig*(*x*) = 3/4? (Zie voetnoot[1].)

c. Wat zijn de knikpunten van 2·*zig*(*x*) en van 0.5·*zig*(*x* - 1)?

De familie van zig en zag

Dit is de grafiek van *zag,* het broertje van *zig.*



Oefening 2

a. Bereken *zag*(*x*) voor *x* = 2, voor *x* = 2007, voor *x* = 1.7 en voor *x* = -510.3

b. Wat zijn de knikpunten van de grafiek van *zag*?

De *zig*-functie is een voorbeeld van een *periodieke knikfunctie*.

Dit zijn de algemene kenmerken van een periodieke knikfunctie:

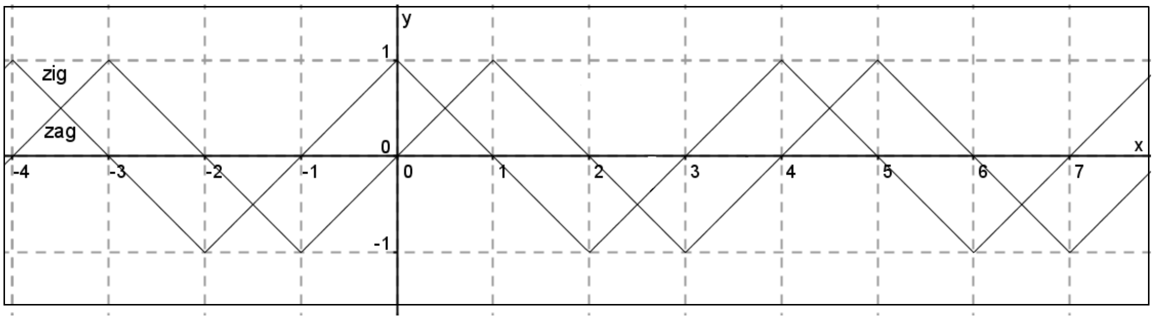
- de functie is periodiek.
- de grafiek bestaat uit stukken rechte lijn met verschillende helling, die kop aan staart op elkaar aansluiten. De aansluitpunten heten de *knikpunten.*

De hellingen van een periodieke knikfunctie hoeven dus niet 1 en -1 te zijn. Ook hoeven positieve en negatieve hellingen elkaar niet steeds af te wisselen.

[1] Met [0, 8> wordt bedoeld: het getal 0, alle getallen tussen 0 en 8, maar NIET 8 zelf.

Oefening 3
Schets de grafiek van een periodieke knikfunctie die periode 5 heeft en waarvan de punten (1, 0), (2, 3) en (4, -1) de knikpunten zijn (de helling van de grafiek hoeft niet -1 of 1 te zijn).
Is (1001, -1) een knikpunt bij deze grafiek?

Verschuiven
Hier zie je de grafieken van *zig* en *zag* samen in één figuur.



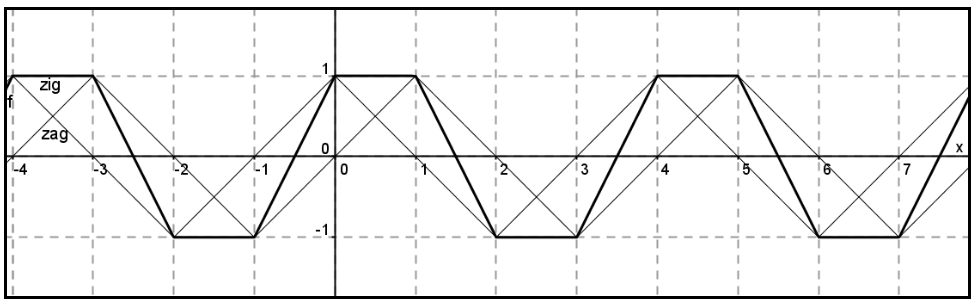
Oefening 4

a. Voeg de grafiek toe van *zig*(*x* - 2). Die grafiek krijg je door de grafiek van *zig*(*x*) over een afstand 2 naar rechts te verschuiven.

b. Voeg ook de grafiek van *zig*(*x* - 3) toe.
Waarom krijg je hetzelfde resultaat als je *zig*(*x* +1) toevoegt in plaats van *zig*(*x* - 3)?

c. Beredeneer dat geldt: *zag*(*x*) = *zig*(*x* - 1)

Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen
Behalve schuiven met functies (zoals net gebeurde) kun je ook functies optellen.
Hier zie je in één figuur *zig*(*x*), *zag*(*x*) en de somfunctie *zig*(*x*) + *zag*(*x*). De laatste is wat dikker getekend.



Oefening 5

a. Controleer of de grafiek goed getekend is door de optelling *zig*(*x*) + *zag*(*x*) te controleren in de knikpunten van *zig* en in de knikpunten van *zag* in het interval [0, 4>
Waarom is het afdoende om dit alleen in die vier punten te controleren en waarom hoef je dus niet alle tussenliggende punten van de grafiek te controleren?

b. Teken de grafiek van *y* = *zig*(*x*) + *zig*(*x* - 1/2). Maak desnoods even een tabel van de punten die je nodig hebt: dat zijn de knikken van *zig*(*x*) én die van *zig*(*x* - 1/2).

c. Toon aan dat voor alle waarden van *x* geldt:

$$zig(x) + zig(x-1) + zig(x-2) + zig(x-3) = 0.$$

Verder onderzoeken met Geogebra op de computer

Door zelf te tekenen, te rekenen en te redeneren heb je nu behoorlijk inzicht opgebouwd in de functie *zig*(x), de verschoven familieleden *zig*(x - a) en de samenhangen onderling. Nu gaan we dit soort grafieken tekenen met het computerprogramma Geogebra.
Maar eerst doe je een paar oefeningen in het gebruik van Geogebra.

Oefening 6

Met Geogebra kun je heel gemakkelijk grafieken tekenen.

a. Start Geogebra; zie zo nodig in de bijlage hoe dat gaat.

b. Zet de cursor in het invoerveld; zie onderaan op het scherm.
Tik in $f(x) = 2 - x/2$; sluit af met Enter.
Constateer:
- dat de grafiek goed getekend is,
- dat de formule voor f ook verschijnt in de linkerkolom, het *algebraveld*,
- dat je in het algebraveld door de bal vóór f aan te klikken de grafiek kan *verbergen* en laten *verschijnen.*

c. Tik in het invoerveld in: $g(x) = f(x) + f(x + 2)$. Constateer dat je snel een nieuwe grafiek maakt, waarbij je $f(x)$ als bouwsteen gebruikt.

d. Na rechtsklikken op f of g (in het algebraveld of het tekenscherm) krijg je een menu te zien. Door *Eigenschappen* te kiezen krijg je de kans je grafiek rood te kleuren en een dikkere lijn te geven. Er zijn nog veel meer toeters en bellen!
- Zoek uit hoe dat gaat.
- Zoek ook uit hoe je via *Eigenschappen* van f de formule $f(x) = 2 - x/2$ in $f(x) = 3 - x/3$ kunt veranderen. Gebruik het tabblad *Basis*. Verandert g mee?

Let op in Geogebra: Verandert g mee?
In de eigenschappen van g zie je niets veranderen, in het algebravenster (links op het scherm) zie je wel iets veranderen. Kijk goed naar beide!

e. Als laatste kennismakingsactie:
- Verschuif het tekenscherm met SHIFT + slepen met de muis
- Vergroot en verklein het beeld met het scrollwiel van de muis. Of via de menuknop rechtsboven. Zie zo nodig de handleiding in de bijlage.

f. Verwijder f en g. Dat is meer dan verbergen!
Als je eerst f verwijdert, verwijdert Geogebra zelf ook g. Logisch, want g hangt af van f.

Let op in Geogebra: Namen van formules
Als je in Geogebra steeds de formules intikt zoals hier aangegeven, dus als

f(x) = 2 - x/2 *en niet zoals* ***y = 2 - x/2***

gaat het goed. Dan kun je de formule aanroepen met zijn naam **f** *en ook dingen doen zoals bijvoorbeeld*

g(x) = f(x) + f(x + 2).

Namen mag je zelf kiezen, maar houd je aan deze spellingsregels:
- *met een letter beginnen, daarna mogen ook cijfers,*
- *géén spaties in de naam.*

Geogebra geeft foutmeldingen als je dit niet doet of maakt onverwachte bokkesprongen!

Dit was even een korte inleiding in het gebruik van Geogebra.
We gaan nu Geogebra gebruiken voor *zig* en familieleden.

Zig en Zag in Geogebra

Oefening 7

Je hebt twee manieren om de functie *zig*(*x*) met Geogebra te maken.

EEN: Open vanuit Geogebra het bestand *zigzag.ggb*. [Op school hoor je waar dat bestand staat]. Je ziet *zig* en *zag* nu op het scherm, als grafiek en als formule.

TWEE: Je voert zelf een formule voor *zig* in, en maakt daarna *zag* ook.
Voer nauwkeurig in:

$zig(x) = abs\ (x - 4 * floor(x/4) - 2) - 1$
$zag(x) = zig(x - 1)$

Oefening 8

Oefenen met zig en zag.

a. Tik in $som(x) = zig(x) + zag(x)$ en controleer de grafieken van oefening 5.

b. Voorspel de knikpunten van de grafiek van $h(x) = zig(x) - 1/2\ zig(2\ x)$ en controleer je voorspelling met Geogebra. Bewaar deze formule voor later!

Oefening 9

(Deze oefening mag je overslaan; je hebt bij de rest van de opgaven nooit de lange formule voor zig nodig. Van de andere kant: als je dit wél bestudeert, leer je een techniek die wel nuttig kan zijn in andere situaties ...)

Ga met behulp van het kader hieronder na wat er eigenlijk gebeurt in de lange formule voor *zig*.

zig(x) = abs (x - 4∗ floor(x / 4) - 2) - 1

Deze formule leer je begrijpen als je hem stap voor stap vanuit het binnenste van de formule laat groeien en kijkt wat er per stap verandert in de grafieken.

1. Start met invoeren van
   floor(x)
   floor(*x*) is het grootste gehele getal dat niet boven *x* ligt. Vandaar die steeds hogere horizontale streepjes. Immers: *floor*(6,5) = *floor*(6).
2. Verbreed de grafiek met een factor 4 in de x-richting:
   floor(x/4)
3. Vergroot de grafiek met een factor 4 in de *y*-richting:
   4∗floor(x/4)
4. Het verschil met de grafiek van *y* = *x* zelf loopt steeds op van 0 tot 4:
   x - 4∗floor(x/4)

Verklaar zelf de veranderingen in de grafieken bij de volgende drie stappen:

5. *x - 4∗floor(x/4) - 2*
6. *abs(x - 4∗floor(x/4) - 2)*
7. *abs(x - 4∗floor(x/4) - 2) - 1*

Deel B: Knikdesign
symmetrische en antiperiodieke bandpatronen

A thing of beauty is a joy for ever [2]
Zeker! En heel zeker als het om een mooi patroon gaat dat eeuwig doorgaat, zoals bij de periodieke formules van vandaag. Je mag tegenwerpen dat het vaak aan de toeschouwer ligt of hij/zij het mooi vindt: *Beauty is in the eye of the beholder*[3]. Maar er is geen twijfel mogelijk bij de twee knikgrafieken in de eerste *R&T-opgave* die je gaat aanvullen tot een regelmatig patroon van vier knikgrafieken met symmetrieën.
Deze opgaven komen - uitgewerkt en toegelicht - in je verslag!

R&T-opgave 1. Een bandpatroon van 4 functies met samenhang, deel 1

a. Maak op een leeg scherm nog eens

$$h(x) = zig(x) - 1/2\ zig(2\ x)$$

en teken ook de grafiek van de verwante formule:

$$j(x) = zig(x) - 2\ zig(x/2)$$

b. Toon *algebraïsch* aan dat er ook een fraai verband is tussen deze twee formules:

$$j(x) = -\ 2\ h(x/2)$$

Aanwijzing bij de laatste vraag, over 'Toon algebraïsch aan'.

Wat je moet doen is laten zien dat de twee formules j(x) en - 2 h(x/2) eigenlijk hetzelfde zijn. Begin het bewijs met de grootste formule, en voer uit wat er staat. Op de plekken van x in de formule voor h moet je dus nu x/2 gebruiken:

$$-\ 2\ h(x/2) = -2\ (\ zig(\ x/2\ ) - 1/2\ zig(2\ x/2)\ ) = ...$$

Uitwerken, vereenvoudigen, enzovoort. Kom je uiteindelijk uit op de formule voor j(x)?

c. Beoordeel op esthetische[4] gronden welke van de volgende formules het patroon van *h* en *j* het mooiste aanvult:

$$k(x) = 3/2 - h(x) \quad \text{of} \quad k(x) = 5/2 - h(x)$$

d. Voeg nog een vierde functie toe aan de drie die je al hebt, om te zorgen dat het geheel van de vier grafieken een horizontale symmetrie-as heeft.

Let op: stukjes GeoGebra-beeld in je verslag opnemen doe je zó:

- *Tik op ESC of Klik op de knop 'Verplaatsen"*
- *Maak door slepen een lichtgrijze rechthoek op het stuk dat je wilt oppakken*
- *Kies uit het menu **Bewerken** (of Edit) de optie **Tekenvenster kopiëren***
- *Ga naar je verslag (in MsWord of in een ander programma): **Plakken**!*

Schoonheid optimaliseren met een schuifknop
Of nu $k(x) = 3/2 - h(x)$ het beste is, of $k(x) = 5/2 - h(x)$?
Wie zal het zeggen, misschien is het $k(x) = a - h(x)$ voor een nog te ontdekken waarde van a.

---

[2] John Keats, in het verhalende gedicht Endymion, 1818.
[3] Margaret Wolfe Hungerford, in de roman Molly Bawn, 1878.
[4] Esthetiek is de wetenschap van smaak, stijl en schoonheid.

Met Geogebra kan je efficiënt de esthetisch beste waarde van *a* opzoeken. Dat gaat zo:

Stap 1: Maak een schuifknop, waarmee je *a* een range waarden kunt geven.
Stap 2: Gebruik de aangepaste formule $k(x) = a - h(x)$ in plaats van de eerder gebruikte. Ook de vierde formule (van R&T opgave 1d) pas je aan om de symmetrie te behouden.

Stap 2 ligt voor de hand, maar Geogebra eist stap 1 eerst, anders is niet bekend wat *a* is.

Maak de schuifknop zó:

- Tik in het invoerveld in: $a = 1$.
- *a* staat nu in het algebravenster. Maak *a* ***zichtbaar*** door op de bal ervoor te klikken. De schuifknop verschijnt.
- Later (of nu) pas je via rechts-klikken en *Eigenschappen* de schuifknop aan.

R&T-opgave 2. Een bandpatroon van 4 functies met samenhang, deel 2

a. Monteer de schuifknop, op de manier van Stap 1 en Stap 2 hierboven, op je scherm.
Let erop dat je voor veranderen van formules eerst ESC moet gebruiken, of op de knop “Verplaatsen” moet klikken. Zie wat dit betreft de handleiding, onderdeel 4 en 5.

b. Gebruik je schuifknop om enkele esthetisch aantrekkelijke situaties te vinden.

c. Je hebt gezien dat de grafiek van $k(x) = a - h(x)$ het spiegelbeeld in een horizontale lijn is van de grafiek van $h(x)$ zelf. Welke lijn is dat?

Eigen productie-opgave 1. Bandpatronen ontwerpen met meer grafieken tegelijk

Niets houdt je tegen om andere schuifknoppen in je formules te gebruiken, of dezelfde schuifwaarde op meer plaatsen in één formule te gebruiken. Daarmee kun je allerlei fraaie en onverwachte bandpatronen samenstellen, uitgaande van de functie *zig*, verschuivingen daarvan en varianten als *zig*(2 *x*), *zig*(*x* / 3).
Creëer twee verschillende aantrekkelijke en interessante bandpatronen volgens eigen ontwerp, met of zonder symmetrie in een horizontale lijn.

Symmetrische patronen, symmetrische functies

In het voorgaande kwam symmetrie in een horizontale lijn aan bod.
Spiegelsymmetrie van één functie in de verticale lijn $x = 0$ was al steeds aanwezig. De grafiek van *zig*(*x*) is symmetrisch in die verticale spiegellijn.
Over spiegelen in verticale lijnen, zoals $x = 0$, gaat de volgende Redeneer- en Tekenopgave.

R&T-opgave 3. Spiegelsymmetrie vinden

De spiegelsymmetrie van de functie *zig* in de verticale lijn $x = 0$ kun je ook zo beschrijven:

$$zig(-x) = zig(x)$$

Daar staat gewoon dat *zig* op de symmetrisch ten opzichte van 0 liggende posities *x* en -*x* dezelfde waarde heeft.

a. Toon aan dat de functie *zig*(*x* - 1/2) *niet* spiegelsymmetrisch is in de lijn $x = 0$.

b. Toon aan dat de functie *zig*(*x* + 1/2) + *zig*(*x* - 1/2) wél spiegelsymmetrisch is in de lijn $x = 0$.

c. De waarde 1/2 is maar een voorbeeld.
Onderzoek nu de functies *zig*(*x* - *a*) en *zig*(*x* + *a*) + *zig*(*x* - *a*) op symmetrie in verticale lijnen, voor waarden van *a* in $[0, 4\rangle$. Waar liggen die symmetrie-assen?

R&T-opgave 4. Spiegelsymmetrie, andere assen

De functie *zag*(x) is niet symmetrisch in de lijn $x = 0$, maar wel in de lijn $x = 1$. Dat kun je algebraïsch formuleren door aan te geven dat twee getallen die symmetrisch liggen ten opzichte van het getal 1, dezelfde waarde opleveren:

$$zag\,(1 - x) = zag(1 + x)$$

a. Toon algebraïsch aan dat dit zo is, gebruikmakend van de definitie van *zag*.

b. Wat zijn de symmetrie-assen van de functies h en j uit R&T-opgave 1?

c. Stel je voor dat $n(x)$ en $m(x)$ functies zijn die de symmetries-as $x = b$ hebben voor een of andere waarde van b.
Toon algebraïsch aan dat $3\,n(x) - 7\,m(x)$ dan óók de symmetrie-as $x = b$ heeft.

d. Zo'n formule als $3\,n(x) - 7\,m(x)$ noemen we een lineaire combinatie van de functies n en m.
Formuleer nu een zo algemeen mogelijke stelling (waar vraag c een onderdeel van is) over de symmetrie van lineaire combinaties.
Aanwijzing: je 'stelling' kan zo beginnen:

Als de functies ..., ... symmetrisch zijn in x = c, ...

Antisymmetrie

De functie *zag* is niet symmetrisch in de verticale lijn $x = 0$, want $zag(-x)$ is niet gelijk aan $zag(x)$. Maar er geldt wel:

$$zag(-x) = -zag(x)$$

Functies die deze eigenschap hebben noemen we ***antisymmetrisch*** in de verticale lijn $x = 0$.

De functie *zig* is antisymmetrisch in de lijn $x = 1$, want:

$$zig(1 - x) = -zig(1 + x)$$

Oefening 10

a. Zijn er, behalve de lijn $x = 1$, nog andere verticale lijnen waarin *zig* ook antisymmetrisch is?

b. Geldt er ook een stelling (zoals je in R&T-opgave 4d gemaakt hebt) over antisymmetrie en lineair combineren?

Periodiciteit

We hebben tot nu toe steeds functies bekeken die de periode 4 hebben. Dat gaan we ook tot bijna aan het eind van de Wiskunde B-dag opgave zo houden.

Een functie f heeft periode 4 als voor alle x geldt:

$$f(x + 4) = f(x)$$

Zo'n functie heeft dan óók automatisch periode 8, of 12 of ...
Dat bewijs je zo:

$$f(x + 8) = f(x + 4 \;\; + 4) = f(x + 4) = f(x)$$

R&T-opgave 5. Periodiek en (anti)symmetrisch

a. Toon aan (algebraïsch!):
Als f periode 4 heeft en een symmetrie-as $x = a$, dan heeft f óók een symmetrie-as $x = a + 4$.

b. Toon aan, corrigeer, of geef een tegenvoorbeeld:
- lineaire combinaties van functies met periode 4 hebben ook periode 4.
- Als f periode 4 heeft met symmetrie-as $x = a$, dan heeft f ook symmetrie-as $x = 4 - a$

Tot slot: Antiperiodieke functies

Voor zowel *zig* als *zag* geldt, dat ze in de tweede helft van het interval [0, 4> het tegengestelde zijn van wat er in de eerste helft van het interval gebeurt. Algebraïsch geformuleerd gaat het om vergelijken van de waarden die horen bij $x + 2$ en x:

$$zig(x + 2) = -zig(x)$$
$$zag(x + 2) = -zag(x)$$

Functies met deze eigenschap noemen we ***antiperiodiek met periode 2.***
Het is weer zo dat lineaire combinaties van functies, die .... Enzovoort!!

R&T-opgave 6. Voorbeelden bedenken

Teken grafieken van functies die allemaal periode 4 hebben. Maak er drie:

a. een die antiperiodiek met periode 2 is én antisymmetrisch is in $x = 2$

b. een die NIET antiperiodiek met periode 2 is en WEL antisymmetrisch is in $x = 2$

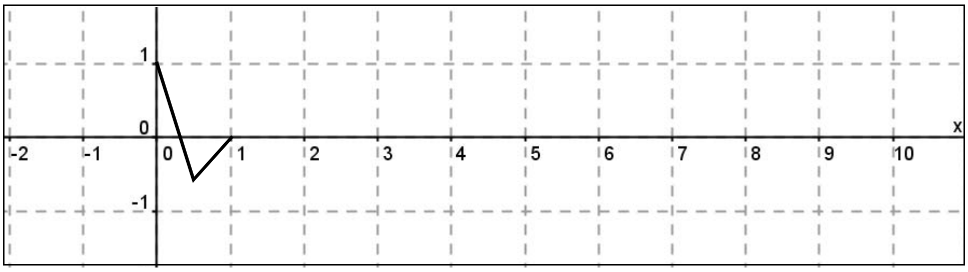
c. een die WEL antiperiodiek met periode 2 is en NIET antisymmetrisch is in $x = 2$.

R&T-opgave 7. Antiperiodiek, dus ook periodiek!

Toon (algebraïsch!) aan: een functie die antiperiodiek is met periode 2, is automatisch periodiek met periode 4.

R&T-opgave 8. Voltooien

Van de functie waarvan hieronder een stukje grafiek staat, is gegeven dat hij antiperiodiek is met periode 2 en ook symmetrisch is rond $x = 0$. Voltooi de grafiek.



Samenvatting

Je hebt kennisgemaakt met de vier eigenschappen (anti)symmetrie en (anti)periodiciteit van functies en grafieken.
Je heb ook gezien dat als functies $m(x)$ en $n(x)$ een van deze eigenschappen bezitten bij een bepaalde as of periode, dat lineaire combinaties van $m(x)$ en $n(x)$ die eigenschap dan ook bezitten.

Eigen productie-opgave 2. Bandpatronen met anti-kenmerken

Creëer twee verschillende interessante bandpatronen met periode 4 volgens eigen ontwerp

- bestaande uit een of meer grafieken van knikfuncties
- waarin grafieken zitten met diverse (anti)symmetrieën rond $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ en $x = 3$.
- waarin het patroon met behulp van schuifparameters beïnvloed kan worden.

Van je patroon neem je een paar zeer verschillende varianten (toestanden bij verschillende schuifinstellingen) op in het papieren verslag. Kies ook een Geogebra-bestand dat je toevoegt bij je eindproduct.

Deel C
Eentopsfuncties

In deel B maakte je antiperiodieke patronen door allerlei combinaties van *zig*-functies en hun verschoven familieleden te gebruiken. In dit deel toon je aan dat je - in zekere zin - elk antiperiodiek patroon vanuit die basisfuncties kunt bouwen. De bijhorende *Redeneer- en Tekenopgaven* komen uiteraard weer in je eindverslag.

Eerst bouwen we daartoe anti-periodieke functies die in één knikpunt de waarde 1 hebben, in een ander knikpunt (noodzakelijk) de waarde -1, maar verder overal de waarde 0 aannemen: de *eentopsfuncties.* Later combineren we dit soort functies.

De constructie sluit aan bij de symmetrische functie $zig(x - a) + zig(x + a)$.

R&T-opgave 9. De flanken gelijk 0 maken

a. Voer in Geogebra deze functie in:

$$azi(x) = zig(x - a) + zig(x + a)$$

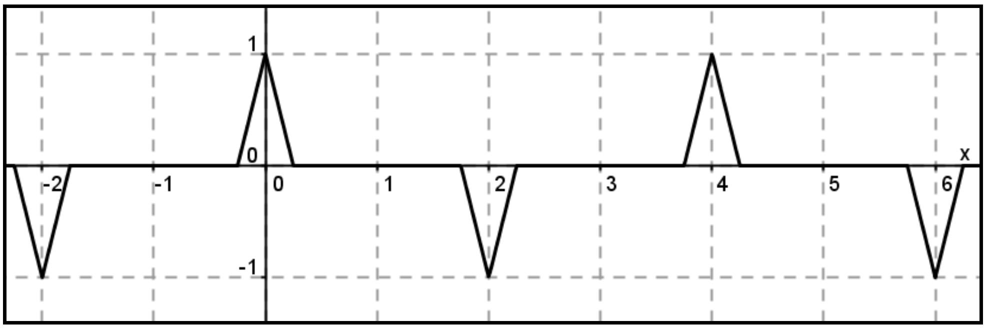
b. We gaan deze functie gebruiken voor vrij kleine waarden van a.
Onderzoek wat er gebeurt met de grafiek als a van 0 naar 1 gaat.

c. De schuine flanken van deze functies zijn stukjes van de flanken van 2 $zig(x)$. Ofwel: als we het *verschil* van de functie 2 $zig(x)$ en de functie uit onderdeel ***a*** nemen, moet dat verschil voor de meeste waarden van x gelijk zijn aan nul, en in de buurt van $x = 0$, $x = 2$ en $x = 4$ niet. Probeer dat uit met Geogebra.

d. Geef nu een redenering waarmee je kunt verklaren dat de formule

$$top(x) = 1/(2\,a)\ (\ 2\ zig(x) - zig(x + a) - zig(x - a)\ )$$

voor de waarde $a = 1/4$ deze grafiek heeft. Test het met Geogebra!



e. Teken ook de grafieken bij de waarden $a = 0.1$ en 1.

f. Verklaar:
- de functie $top(x)$ is antiperiodiek (met periode 2)
- de breedte van de bergvoet, de afstand tussen begin en eind van de berg, is $2a$.
- de topwaarde is 1 (bij elke waarde van $a > 0$).
- voeg de functies $top(x - a)$ en $top(x - 2a)$ toe. Bij deze twee functies geldt dat de top van de grafiek precies boven een bergvoet van $top(x)$ ligt.

Functies met gegeven knikpunten maken

Als je van een antiperiodieke knikfunctie met periode 4 de knikpunten in het interval [0, 2> weet, weet je alles van de functie. Want uit de antiperiodiciteit volgt hoe de functie zich op [2, 4> gedraagt en door de periodiciteit weet je de rest dan ook.

Denk nu eens als eerste voorbeeld aan vijf knikpunten in [0, 2>, gelijk verdeeld als volgt:

	0	$1 \cdot 4/10$	$2 \cdot 4/10$	$3 \cdot 4/10$	$4 \cdot 4/10$

We gaan een functie maken die bij deze waarden van x de volgende waarden aanneemt

	4	3.5	2	-1	-2

Het plan: kies voor elk van die knikpunten de juiste *eentopsfunctie* en tel op.
Kies voor de a-parameter in $top(x)$: $a = 4/10$. Daarmee verdeel je [0, 4] in precies 10 gelijke intervallen. De voet van de eentopsfunctie met top in 0 ligt dan juist op de tweede knik.
Dus $4 \cdot top(x)$ heeft de waarde 4 in het eerste knikpunt en in de andere knikpunten waarde 0:

$4 \cdot top(x)$:	4	0	0	0	0

Om de waarde 3.5 op het tweede knikpunt goed te krijgen gebruiken we $3.5 \cdot top(x - 4/10)$.

$3.5 \cdot top(x - 4/10)$:	0	3.5	0	0	0

De functie $4 \cdot top(x) + 3.5 \cdot top(x - 4/10)$ heeft de eerste twee knikpunten al raak, en verder nul als waarde bij de andere knikpunten!

R&T-opgave 10. Afmaken van het voorbeeld

a. Schrijf de functie op die de *vijf* aangegeven knikpunten heeft.

b. Neem de proef op de som met Geogebra.

De functie die je net hebt gemaakt, noemen we een *5-puntsfunctie* omdat je 5 knikpunten hebt gedefinieerd op het interval [0, 2>. Op een hele periode van 4 zijn er dus 10 knikpunten.
Het is wel duidelijk dat de methode ook werkt als er 10, of 17, of - algemeen - n knikpunten zijn op het interval [0, 2>

c. Wat voor a moet je in die gevallen kiezen? Geef een formule in n die de juiste waarde voor a levert.

De antiperiodieke functies met n knikpunten in [0, 2> noemen we n-puntsfuncties.
We gaan met Geogebra een aantal n-puntsfuncties maken.
Pas even op: Geogebra gebruikt natuurlijk één waarde voor a voor alles wat ze kent. Dus als jij $a = 4/12 = 1/3$ stelt om met 6-puntsfuncties te gaan werken, gaat het wel fout met je eerder gemaakte 5-puntsfuncties.
Er is een simpele oplossing: maak voor je 6-puntsfuncties een nieuw bestand .

Doet dat VEILIG als volgt:

1. Bewaar het werk dat je gemaakt hebt onder een zelfgekozen naam.

2. Bewaar een kopie van dat werk onder een andere naam via ***Bewaar Als*** (onder Bestand) en geef als naam iets op waarin de 6 staat, bijvoorbeeld:
   schoolnr_teamnr_Top6functies.ggb

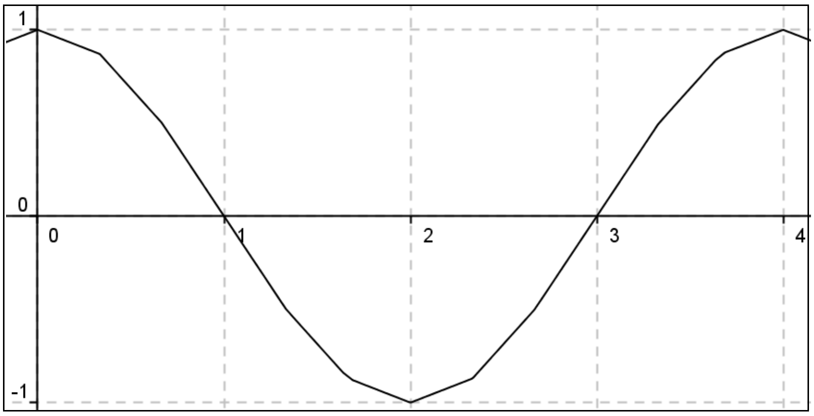
3. Verberg wat je niet meer wilt zien en misschien toch nodig hebt. Je kunt ook - voorzichtig - ‘Delete’ of ‘Verwijder’ gebruiken.

Je gaat nu zelf een 6-puntsfunctie bouwen waarvan de grafiek wel wat lijkt op die van de functie cos(x). Die functie heet *golf6A*(x).
De functie heeft periode 4 en is symmetrisch in $x = 0$ en in $x = 2$ en antisymmetrisch in $x = 1$ en in $x = 3$. Verder zijn (0, 1), (1/3, 0.87) en (2/3, 0.5) de drie knikpunten op [0, 1>

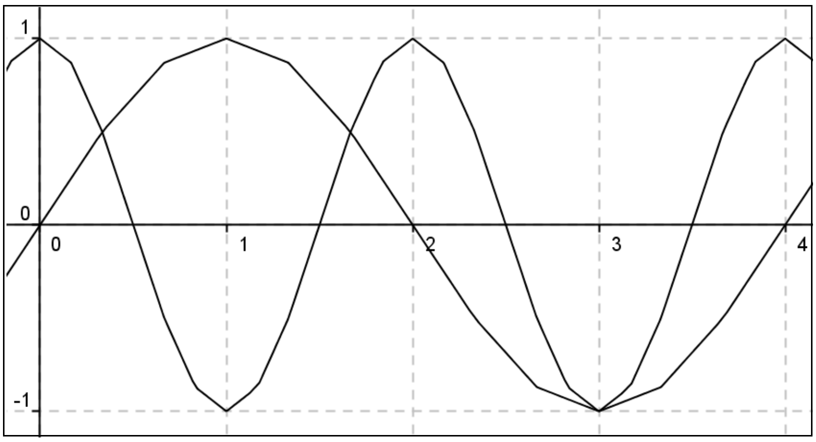
R&T-opgave 11. Golffuncties

a. Voer in $a = 1/3$.

b. Maak *golf6A*(x), zoals hieronder weergegeven, op een zo zuinig mogelijke manier.



c. Maak *golf6B*(x) en *dubbelgolf6*(x) *vanuit golf6A.*



Eigen productie-opgave 3. Bandpatronen met n-functies

Creëer twee verschillende aantrekkelijke bandpatronen met periode 4 met gebruikmaking van de hulpmiddelen van deel **B** en **C**.

Deel D: snelheid, twee dimensies, animatie

Je gaat hier drie nieuwe elementen leren kennen, die je creatieve repertoire (op zigzaggebied) aanzienlijk uitbreiden. Met een enkel voorbeeld worden hier veel mogelijkheden aangegeven. Je zult ze graag gaan gebruiken in deel E, de slotopdracht.

Nieuw element I: Snelheid

zig(*x*) gaat in het interval [0, 4> precies één keer neer en op.
Bekijken we nu *zig*(3*x*), ook met *x* van 0 naar 4, dan loopt de 3*x* door drie periodes: van 0 tot 4, van 4 tot 8, van 8 tot 12. Drie keer neer en op dus op het interval [0, 4>.
In plaats van de 3 kun je andere snelheidsfactoren gebruiken; en je kunt snelheden combineren. Je hebt al eerder deze snelheidsvariatie gebruikt. Zo dadelijk een spannend voorbeeld.

Nieuw element II: Animatie

Je hebt al eerder schuifknoppen gemaakt. Klik je rechts op een schuifknop, dan zie je ook de mogelijkheid ‘Animatie’. Geogebra laat het gekozen getal dan zelf bewegen. Leuk om te gebruiken!

R&T-opgave 12. Snelheidsverschillen, uitdoven en aanzwellen in animatie

a. Voer in de functie *zw*(*x*) = *zig*(*x*) + *zig* (1.1 *x*)
Zoom zonodig uit tot je een range van minstens 0 - 100 ziet. Omdat de grafiek dan te plat wordt, vermenigvuldig je het geheel verticaal met een factor 5 of 6.

b. Verklaar het periodiek uitdoven en aanzwellen van de grafiek. Wat is de totale periode?

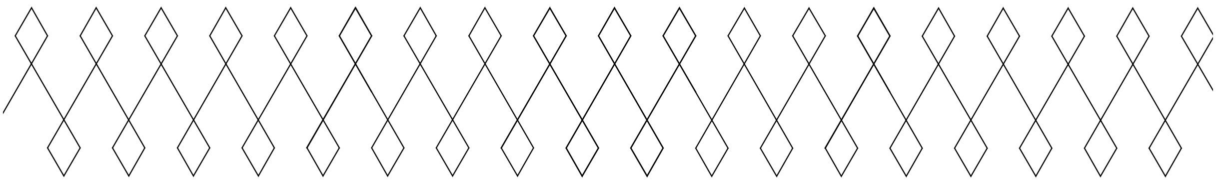
c. Voor de hand ligt nu de functie-familie *zig*(*x*) + *zig*(*c x*), waarbij *c* in kleine stappen van 1 naar bijvoorbeeld 3 loopt. Maak dat en *animeer* het. Het is een fraai gezicht. Bij welke waarde van c heeft de functie een periode van 400?

Nieuw element III: Grip op de horizontale beweging krijgen

Bij alle voorgaande (band)patronen werkten we op basis van grafieken. Grafieken op de computer kun je je voorstellen als gemaakt door een bewegend punt dat een spoor nalaat.
Het punt maakt simultaan twee bewegingen:

– een regelmatig doorgaande beweging in de *x*-richting van links naar rechts.
– een door de formule bepaalde (op en neer) beweging in de *y*-richting.

Dit bandpatroon zul je daar nooit mee kunnen maken:



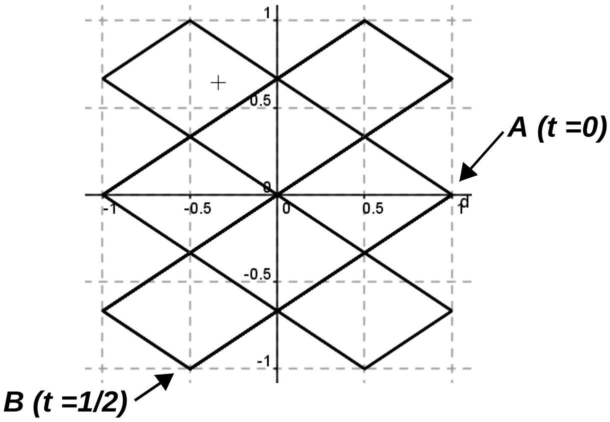
Om dat toch te kunnen maken, moet Geogebra het bewegende punt ook in de *x*-richting door een formule laten bepalen die af en toe in dit geval zal moeten terugbewegen!
Het opgeven van én de horizontale beweging én de verticale beweging, gaat met het commando *Kromme* (of *Curve* in de English version of Geogebra).

Voorbeeld

Voer je in Geogebra in (let op de vierkante haken!)

```
Curve [zig(3t), zig(2t + 1), t, 0, 4]        (Engelse versie)
Kromme[zig(3t), zig(2t + 1), t, 0, 4]        (Nederlandse versie)
```

dan krijg je de volgende figuur te zien:



Stel je bij *t* het lopen van de tijd voor. Voor alle waarden van *t* tussen 0 en 4 tekent Geogebra nu de punten met *x*-coördinaat *zig*(3*t*) en *y*-coördinaat *zig*(2t + 1). Als je dit met de hand wilt nadoen, zou je alle knikpunten in een tabel met *zig*(3*t*) en *y*-coördinaat *zig*(2t + 1) zetten:

t	*x*-coördinaat: *zig*(3*t*)	*y*-coördinaat: *zig*(2*t* + 1)	letter in figuur
0	1	0	*A*
1/2	-1/2	-1	*B*
2/3	-1	-2/3	......
1			......
......	......	......	......
......	......	......	......

Waarom die ,t , in de kromme-opdracht?

Geogebra is bereid ook andere namen dan *t* te gebruiken, maar jij moet wel zeggen wie er loopt. Dat doe je op de plek in het commando ná de formules. Later gebruik je extra parameters, en dan zou het niet duidelijk zijn als je dit niet aangaf.

R&T-opgave 13.

a. Vul de tabel aan; markeer ook de punten *C*, *D* etc. in de figuur.

b. Hoeveel knikpunten zijn er in totaal?

Het beschrijven van de baan van een punt met behulp van twee functies, x(*t*) en *y*(*t*), wordt de de methode van *parameterkrommen* genoemd.

Om je bewust te maken van de vele mogelijkheden - voor je aan de slot opdracht begint - volgen hier eerste een paar suggesties.

R&T-opgave 14. Mogelijkheden proberen

Bij deze opgave grijp je terug op eerder gemaakte functies. Allicht!

Maak schuifjes *p, q, r, s* (kies zelf geschikte ranges voor de schuifjes), voer in, en zie wat je dan al allemaal maken kunt. Leg een paar beelden vast.

a. Kromme[*zig*(*p t*), *zag*(*q t* + *s*), *t*, 0, 20]

b. Kromme[*t* + *r zig*(*p t*), *r zag*(*q t*), *t*, 0, 20] (als *r* niet te klein is loopt *x* nu soms achteruit!)

c. Kromme[*t* + *r golf6A*(*p t*), *r golf6B*(*q t*), *t*, 0, 20]

R&T-opgave 15. Parameterkrommen en antiperiodieke functies

De in onderdeel 14b en c gebruikte functies voor de *x*-coordinaat zijn niet antiperiodiek.
Als je je beperkt to antiperiodieke functies voor de *x*- én de *y*-coordinaat, krijg je figuren met een speciale symmetrie.

a. Wat is die symmetrie?

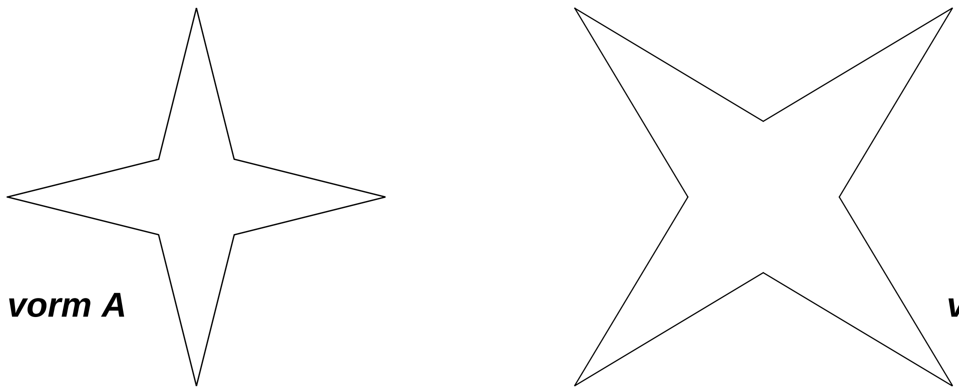
b. Bewijs dit!

Deel E: Drie slotopdrachten

Voor ***Slotopdrachten*** maak je enkele voorgeschreven en zelf bedachte (bewegende) figuren *met behulp van technieken uit het voorgaande.*

Slotopdracht A

Maak een kromme die voortdurend van vorm A naar vorm B overgaat en weer terug.



vorm A ***vorm B***

Slotopdracht B

Uit de theorie volgt dat je met n-puntsfuncties en het commando Kromme (of Curve) heel goed met behulp van alleen zig-functies een letter uit het alfabet kunt tekenen in het deel van het vlak met positieve coordinaten, maar dat die letter dan ook omgekeerd verschijnt in het deel van het vlak met negatieve coordinaten.

Maak op die manier de letter A en eventueel andere letters van het alfabet.

Slotopdracht C

Maak een statisch of dynamisch (d.w.z. bewegend) patroon naar eigen design met behulp van alle technieken uit het voorgaande.

Net als bij de creatieve opdrachten eerder, komen *afbeeldingen met toelichting* in je werkstuk en lever je je bewegende producten ook digitaal als *.ggb-bestand* in.