Stellingen en bewijzen ervan in de vlakke meetkunde. **Bert Boon** onderneemt samen met zijn leerlingen een zoektocht naar het bewijs van de Stelling van Morley. Een reisverslag.

De stelling van Morley, een zoektocht

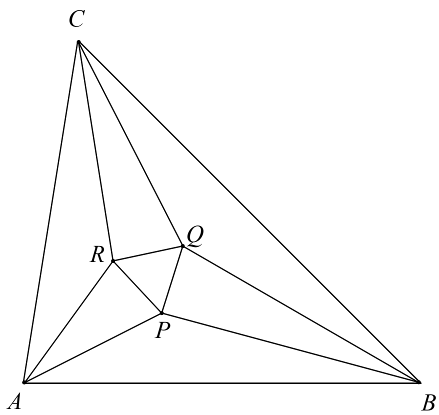
Nu de vlakke meetkunde terug is in het vwo, is het hoog tijd een van de parels uit die meetkunde, de stelling van Morley, voor het voetlicht te halen. De stelling van Morley behoort niet tot het klassieke repertoire – zij dateert uit 1904 – en intrigeert omdat een zo mooie eigenschap zo lastig te bewijzen is. Nadat het begin van de meetkunde in klas 5 was afgerond, heb ik het erop gewaagd die stelling in de klas te bewijzen en het is mij niet tegengevallen. Twee lessen lang hebben we gedurende een half uur per les het bewijs opgebouwd. De les voorafgaande aan de twee lessen had ik de figuur met stelling uitgedeeld om hun nieuwsgierigheid te prikkelen. Sommigen bleken toch al wat hulplijnen getrokken te hebben, maar niemand kon er verder wat mee. In de eerste les kwamen we in een klassengesprek een heel eind. De tweede les is het bewijs in collegevorm afgemaakt. Het bewijs hieronder volgt min of meer de behandeling in de klas.

Trisectrices

Een bissectrice is in ons meetkundeonderwijs een bekend begrip: ze deelt een hoek in twee gelijke delen. Trisectrices delen een hoek in drie gelijke delen. Een hoek heeft dus twee trisectrices. Helaas zijn zij niet met passer en liniaal te construeren, misschien dat we daarom in de Oudheid weinig stellingen over trisectrices tegenkomen.

De trisectie van een hoek behoort samen met de cirkelkwadratuur en de kubusverdubbeling (het Delische probleem) tot de drie onoplosbare problemen uit de Oudheid. In deze gevallen gaat het steeds om het vinden van een constructie met passer en liniaal van respectievelijk een trisectrice van een hoek, een vierkant met een oppervlakte gelijk aan die van een gegeven cirkel en de ribbe van een kubus met de dubbele inhoud van een gegeven kubus. Van deze drie problemen is inmiddels aangetoond dat de constructie met passer en liniaal onmogelijk is. Het laatst gebeurde dat voor de cirkelkwadratuur in 1882 door F. Lindemann.

De stelling van Morley is genoemd naar de ontdekker, de Engelse wiskundige Frank Morley (1860-1937) en heeft betrekking op de trisectrices van een driehoek. Men trekt in $\Delta\, ABC$ de trisectrices van de hoeken. De trisectrices die het dichtst bij zijde AB liggen, snijden elkaar in P, die het dichtst bij zijde BC liggen in Q en die het dichtst bij zijde AC liggen in R.



De stelling van Morley zegt:

$\boxed{\Delta\, PQR \text{ is gelijkzijdig}}$

Hoe vinden we een bewijs?

Als er geen directe lijn zichtbaar is tussen het 'gegeven' en het 'te bewijzen', zijn we vaak aangewezen op de volgende methode (methode komt van het Griekse methodos, letterlijk: de weg waarlangs).

Gegeven $\longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow$ Te bewijzen

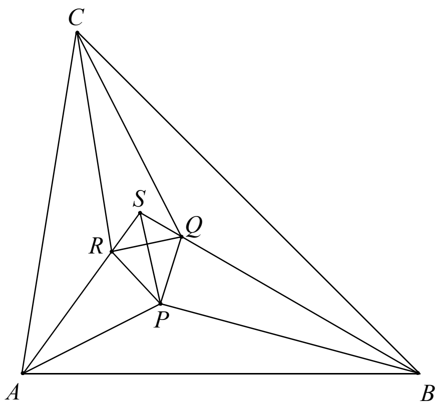
Probeer eerst vanuit de gegevens stappen te zetten op de weg naar het 'te bewijzen': zet de gegevens op een rij en kijk wat je uit die gegevens kunt afleiden. Als je niet verder komt, probeer je vanuit het 'te bewijzen' stappen terug te zetten richting 'gegeven'. Zo probeer je het gat tussen die twee steeds kleiner te maken. Die aanpak volgen we hier ook.

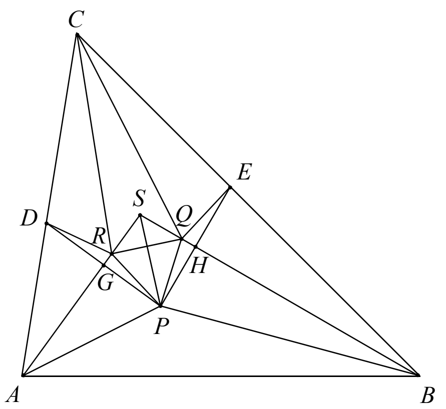
Van trisectrice naar bissectrice

Van trisectrices weten we niet veel, van bissectrices des te meer. Nu is elke trisectrice ook bissectrice en wel van de hoek tussen een zijde en een andere trisectrice. Dus laten we maar eens kijken hoever we met onze kennis van bissectrices komen. Wat weten we?

- Elk punt van een bissectrice heeft gelijke afstanden tot de benen van de hoek.
- De bissectrice van een hoek is de symmetrieas van die hoek.
- De bissectrices van een driehoek gaan door één punt.

Om de laatste eigenschap te benutten verlengen we *AR* en *BQ* tot zij elkaar snijden.
Het snijpunt noemen we *S*.



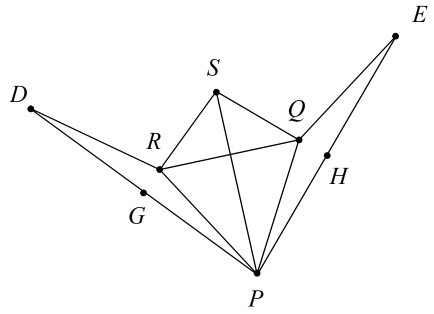


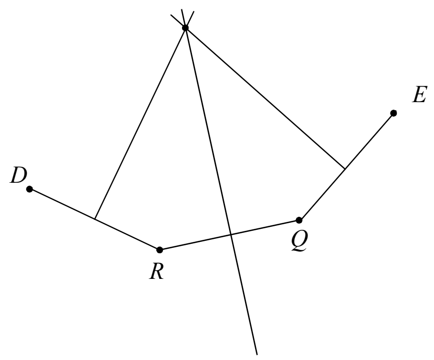
In Δ *ABS* zijn *AP* en *BP* bissectrices, dus *SP* ook: de twee hoekjes bij *S* zijn even groot.
P heeft gelijke afstanden tot *AS* en *BS*.

Om gebruik te maken van de symmetrie-eigenschap van een bissectrice trekken we loodlijnen uit *P* op *AS* en *BS*. Deze snijden *AS* en *BS* in *G* en *H*, en de zijden *AC* en *BC* in *D* en *E*.
Omdat $PG = PH$ is ook $PD = PE$ maar ook $DR = PR$ en $EQ = PQ$ (we gebruiken dat *AS* bissectrice is van hoek *CAP* en *BS* bissectrice van hoek *CBP)*.

Vanuit het 'te bewijzen'

Laten we eens aannemen dat het 'te bewijzen' juist is: zou Δ *PQR* gelijkzijdig zijn, dan zou $DR = RQ = QE$.
Die lijnstukjes zijn alledrie zijde van een driehoek met *C* als hoekpunt en liggen tegenover gelijke hoeken. Dat doet denken aan gelijke omtrekshoeken, gelijke koorden: zouden *D*, *R*, *Q*, *E* en *C* op een cirkel liggen?
De figuur gevormd door de lijnstukjes *DR*, *RQ* en *QE* ziet er redelijk symmetrisch uit. Laten we eerst eens kijken of *D*, *R*, *Q* en *E* op een cirkel liggen.





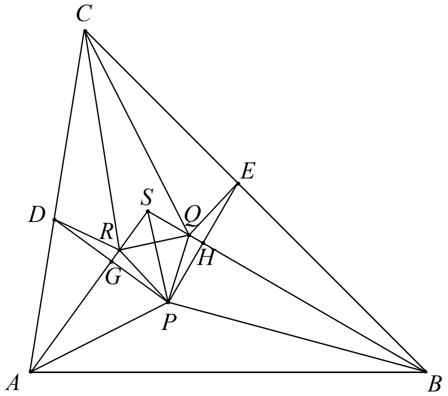
Uit het voorgaande volgt (nog steeds aannemend dat Δ *PQR* gelijkzijdig is) dat de driehoeken *PEQ* en *PDR* congruent zijn (*ZZZ*, bovenste figuur). Dus zijn de hoeken bij *Q* en *R* in die driehoeken gelijk. De hoeken bij *Q* en *R* in Δ *PQR* zijn uiteraard ook gelijk en daaruit volgt dat $\angle DRQ = \angle EQR$. Kortom, de figuur gevormd door de lijnstukjes *DR*, *RQ* en *QE* is symmetrisch in de middelloodlijn van *RQ*. De middelloodlijn van *DR* zal die van *RQ* in hetzelfde punt snijden als de middelloodlijn van *QE* (onderste figuur) en dus gaat er een cirkel door die vier punten.

Hier eindigde de eerste les onze verkenning. Tot hier toe konden alle leerlingen het volgen, al hadden we nog geen idee of we een bewijs zouden vinden. Maar we hadden wel het gevoel dat we wat greep op de zaak kregen. We hadden meer ontdekt dan we bij het begin voor mogelijk hadden gehouden. De les eindigde met de intrigerende vraag:

Ligt *C* op de cirkel?

Welke middelen hebben we om aan te tonen dat *C* op de cirkel ligt? Koordenvierhoeken?

Om te bewijzen dat vierhoek *DRQS* een koordenvierhoek is, zou $\angle DRQ + \angle DCQ = 180°$ moeten zijn. Dat is een lastig stukje rekenwerk, maar we laten ons niet ontmoedigen.



Om breuken te vermijden kiezen we de grootte van de drie hoekjes bij *A* gelijk aan α, die bij *B* en *C* aan respectievelijk β en γ.
We moeten nu aantonen:
$\angle DRQ = 180° - 2\gamma$.

Van de hoeken rond *R* kennen we $\angle PRQ$ (= 60°).
$\angle DRP$ is het dubbele van $\angle ARP$ en hoek *ARP* is weer een buitenhoek van Δ *SRP*, dus:

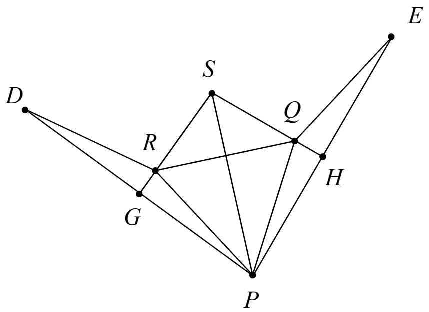
$$\boxed{\angle ARP = \tfrac{1}{2} \cdot \angle S + \angle RPS} \qquad (1)$$

$\frac{1}{2} \cdot \angle S$

In Δ *ABS* kunnen we $\angle S$ uitdrukken in α en β:
$\angle S = 180° - (2\alpha + 2\beta)$, dus $\frac{1}{2} \cdot \angle S = 90° - (\alpha + \beta)$.
Met een schuin oog naar wat we aan moeten tonen, merken we op dat $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180°$, dus $\alpha + \beta + \gamma = 60°$, $\alpha + \beta = 60° - \gamma$ en $\frac{1}{2} \cdot \angle S = 90 - (60° - \gamma) = 30° + \gamma$.

$$\boxed{\tfrac{1}{2} \cdot \angle S = 30° + \gamma} \qquad (2)$$

$\angle$ *RPS*



Omdat Δ $SGP \cong$ Δ *SHP* (ZHH) en Δ $DPR \cong$ Δ *EPQ* is $\angle RPS = \angle QPS = 30°$

$$\boxed{\angle RPS = 30°} \qquad (3)$$

We substitueren (3) en (2) in (1) en vinden:
$\angle ARP = 60° + \gamma$.
Nu kunnen we $\angle DRQ$ berekenen:
$\angle DRQ = 360° - \angle PRQ - 2 \cdot \angle ARP =$
$= 360° - 60° - (120° + 2\gamma) = 180° - 2\gamma$
en dus ligt *C* op de cirkel.

We hebben nu gevonden:

Als Δ PQR gelijkzijdig is, geldt DR = RQ = QE en liggen de punten C, D, R, Q en E op een cirkel.

Een blikwisseling

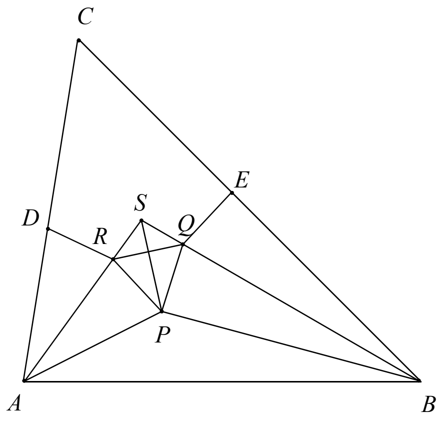
We hebben met behulp van het 'te bewijzen' mooie eigenschappen ontdekt, maar hoe kunnen die ons helpen om vanuit het gegeven naar het 'te bewijzen' te komen? Het idee dat hier een oplossing biedt, is die gelijkzijdige driehoek vast te houden!

We tekenen alleen de trisectrices van de hoeken *A* en *B* en kiezen op *AS* en *BS* punten *R* en *Q* zó dat we een gelijkzijdige Δ *PQR* krijgen. Als we kunnen aantonen dat *C* op de cirkel door *D*, *R*, *Q* en *E* ligt, dan volgt direct dat de hoeken bij *C* gelijk zijn (gelijke koorden, gelijke omtrekshoeken), met andere woorden: *CQ* en *CR* zijn dan de trisectrices van hoek *C*.

Gezien het voorgaande kiezen we *Q* op *BS* en *R* op *AS* zó, dat $\angle RPS = \angle QPS = 30°$.
Uit de congruentie van de driehoeken *SRP* en *SQP* (HZH) volgt direct *PR* = *PQ* en omdat $\angle P = 60°$ is Δ *PQR* gelijkzijdig, waaruit weer volgt *DR* = *RQ* = *QE*. Ook geldt weer
$\angle DRQ = \angle EQR = 180° - 2\gamma$,
dus *D, R, Q* en *E* liggen op een cirkel.

Omdat we nu niet over de trisectrices van hoek *C* beschikken, moeten we op een andere manier aantonen dat *C* op deze cirkel ligt. Hoek *C* staat op de koorde *DE*.

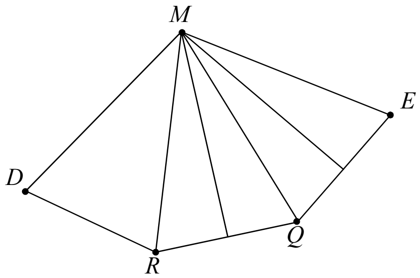
We berekenen de middelpuntshoek bij die koorde.



Is M het middelpunt van die cirkel, dan is in ΔMRQ:

$\angle M = 180° - \angle R - \angle Q$, met $\angle Q = \angle R = \frac{1}{2} \cdot \angle DRQ = 90° - \gamma$, dus:

$\angle M = 180° - (180° - 2\gamma) = 2\gamma$.



De driehoeken MDR, MRQ en MQE zijn congruent (*ZZZ*), dus:

$\angle DME = 6\gamma$ en omdat $\angle DCE = 3\gamma$, moet C op de cirkel liggen.

Het bewijs is rond.

Samenvatting van het bewijs

We zetten de stappen van het bewijs nog eens op een rijtje.

1. In ΔABC trekken we de trisectrices van de hoeken A en B. De twee trisectrices die het dichtst bij zijde AB liggen snijden elkaar in P, de andere twee snijden elkaar in S.
2. Op AS en BS kiezen we punten R en Q zó, dat: $\angle RPS = \angle QPS = 30°$.
   $\Delta SRP \cong SQP$ (HZH), dus ΔPQR is gelijkzijdig.
3. SP is ook bissectrice in ΔABS. We spiegelen P in AS en BS. Omdat AS en BS bissectrices zijn, liggen de spiegelbeelden D en E op AC en BC.
4. $DR = RQ = QE$.
5. $\angle DRQ = \angle ERQ = 180° - 2\gamma$.
6. Vierhoek $DRQE$ heeft een omgeschreven cirkel met middelpunt M; $\angle DME = 6\gamma$, dus C ligt op deze cirkel.
7. De drie hoekjes bij C staan op gelijke koorden, dus CQ en CR zijn de trisectrices van hoek C.

Evaluatie van de behandeling in de klas

Na afloop vroeg ik aan de leerlingen wie het bewijs hadden kunnen volgen. Van de 21 leerlingen had tweederde het verhaal goed kunnen volgen, waarvan weer de helft zeer gedetailleerd (zij hadden veel opgeschreven). Eenderde was al snel na het begin in de tweede les de draad kwijtgeraakt, maar had (om het positief te zeggen) de rest niet willen ophouden met vragen. Voor de leerlingen was het vooral interessant eens een tamelijk groot bewijs onder ogen te krijgen waarin allerlei kleine stellingen die zij in het reguliere programma hadden gehad, bruikbaar bleken. Zelf vond ik dat je nu toch heel goed kon zien wie de echte bèta's waren. Kijk ik naar de tijd die het mij gekost heeft het bewijs van de stelling te doorgronden, dan is het bestuderen en begrijpelijk maken van een forse stelling een praktische opdracht waard!

Verantwoording

De zoektocht is een gefantaseerde reconstructie op weg naar het bewijs zoals gegeven door M.T. Naraniengar in 1909. Dat bewijs is onder meer te vinden in *Mathematical Gems I* van Ross Honsberger, in *Geometry revisited* van Coxeter en Greitzer en in iets gewijzigde vorm in het *Leerboek der Vlakke Meetkunde* van Molenbroek. In de loop van de tijd zijn er vele bewijzen gepubliceerd. Een veel aangehaald meetkundig bewijs reconstrueert op een gelijkzijdige driehoek een driehoek die gelijkvormig is met de gegeven driehoek *ABC*. In *Pythagoras 19(*2) (november 1979) schreef Jan van de Craats aan de hand van dit bewijs een helder artikel. Zo'n bewijs is te vinden in de *Introduction to geometry* van Coxeter en in *Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde* van Bottema (Epsilon uitgave). In dat laatste boek staat ook een goniometrisch bewijs. In de negende jaargang van *Euclides* zijn zo'n negen bewijzen te vinden. Natuurlijk kunt u ook op internet terecht zie bijvoorbeeld:
www.cut-the-knot.com/triangle/Morley/Morley.html

Bert Boon, Chr. Gymnasium Sorghvliet, Den Haag
E-mail: aw.boon@hccnet.nl

Literatuur

Bottema, O. (1987). *Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde*. Utrecht: Epsilon.
Epsilon Uitgaven, 9

Coxeter, H.S.M. & S.L. Greitzer (1995). *Geometry revisited*. Washington DC: MAA.
New mathematical library, 19

Craats, J. van de (1979). Een schoonheidsprijs voor een stelling? *Pythagoras 19(*2) 28-32.

Honsberger, R. (1973). *Mathematical Gems I*. Washington DC: MAA.

Molenbroek, P. *Leerboek der Vlakke Meetkunde*. Groningen: Noordhoff. (vele drukken)

Wijdenes, P. (1932). De gelijkzijdige driehoek van Morley. *Euclides*, *9*, 40-55.